ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 8 (483)

УДК 517.518

Ф.Н. ГАРИФЬЯНОВ

ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

В статье исследуются аппроксимирующие свойства системы производных нечетной 2π-периодической функции

$$E(z) = F(z) - 2^{-1}\left[\operatorname{tg}\frac{z-a}{2} + \operatorname{tg}\frac{z+a}{2}\right], \tag{1}$$

где $\operatorname{Im} a > 0$, $|a| = \pi$, $|a \pm \pi| > \pi$. Считаем, что функция $F(z)$ голоморфна в полосе $|\operatorname{Im} z| \le 2\operatorname{Im} a$, а функция (1) имеет коэффициенты Фурье

$$e_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} E(x)\exp(-inx)dx \ne 0 \quad \forall n \ne 0. \tag{2}$$

Частный случай, когда функция (1) является двоякопериодической, рассматривался ранее в [1]. При других предположениях ограничения (2) выполнены, например, в простейшем случае

$$F(z) \equiv 0. \tag{3}$$

В § 1 строится система функций, биортогонально сопряженная на некотором контуре системе

$$\{E_j(z)\}, \quad j = \overline{0, \infty}, \tag{4}$$

где $E_0(z) = 1$, $E_j(z) = E^{(j)}(z)$, $j > 0$. Для этого используется теория краевых задач со сдвигом и интегральные уравнения типа свертки с периодическими ядрами, а не преобразование Бореля, как в классических результатах А.Ф. Леонтьева [2]. Теорию краевых задач к вопросам разложения голоморфных функций в обобщенные ряды Дирихле применял ранее А.П.Хромов (см., напр., [3]), но его подход, использующий свойства спектра краевой задачи для дифференциального оператора, существенно отличен от предлагаемого.

В § 2 рассматриваются вопросы о разложении функций, голоморфных в области D_0 или вне нее, в соответствующие биортогональные ряды. Здесь D_0 — область, содержащая начало координат и ограниченная дугами четырех окружностей

$$|z \pm (a \pm \pi)| = \pi. \tag{5}$$

Инвариантность системы (4) относительно дифференцирования позволяет получить по ней нетривиальные разложения нуля (н. р. н.). Заметим, что Ю.Ф. Коробейник [4] обнаружил тесную связь между свойствами системы элементов полного сепарабельного локально-выпуклого пространства быть абсолютно представляющей и допускать н. р. н.

Работа выполнена при финнасовой поддерржке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-00914).

В § 3 указаны некоторые приложения. Обсуждается вопрос об отношении полученных результатов к замечательному по своей простоте и общности методу П. Аппеля ([5], гл. 1, § 8), позволяющему получить разложения функций, голоморфных в замыканиях круговых областей, в ряды мероморфных функций с полюсами, лежащими вне этих замыканий.

1. Интегральные операторы и конструирование биортогональных систем

Всюду в этом параграфе, если это особо не оговорено, считаем, что $z \in D$, где D — прямоугольник с вершинами $\pm\pi$, $\pm a$. Введем интегральный оператор

$$(A\varphi)(z) \equiv (\pi i)^{-1} \int_\Gamma E(\tau - z)\varphi(\tau)d\tau, \quad \Gamma = \partial D, \tag{6}$$

плотность которого удовлетворяет условию Гёльдера на замыкании каждой из сторон. На кусочно-гладкой границе Γ_0 области D_0 определим нечетную функцию $\alpha(t) = t \pm (a \pm \pi)$, причем на каждой гладкой компоненте знаки выбраны так, чтобы $|\alpha(t)| = \pi$. В каждой из четырех луночек, дополняющих область D_0 до круга $|z| \leq \pi$, определим кусочно-линейную функцию $\alpha(z)$ аналитическим продолжением с соответствующей гладкой компоненты. Тогда $\alpha(\tau) : \Gamma \to \Gamma^-$, причем сдвиг разрывен в вершинах и $\alpha(\alpha(t)) = t$ в точках гладкости. На каждой стороне сдвиг совпадает с одним из двух преобразований, порождающих соответствующую двоякопериодическую группу, или с преобразованием, обратным к нему. Исследуем функциональное уравнение

$$(A\varphi)(z) = g(z), \tag{7}$$

где правая часть голоморфна в D. Заметим, что кусочная постоянная

$$\gamma(t) = \{1, \ \operatorname{Im} t \geq 0; \ -1, \ \operatorname{Im} t \leq 0\}$$

удовлетворяет однородному уравнению

$$(A\varphi)(z) = 0. \tag{8}$$

Действительно, производная соответствующего интеграла (6) равна нулю (достаточно применить формулу интегрирования по частям и воспользоваться периодичностью ядра), а сам интеграл является нечетной функцией. Поэтому впредь без ограничения общности считаем, что

$$\int_\Gamma \varphi(\tau)d\tau = 0, \tag{9}$$

т. е. в силу ([6], с. 25–26) получим

$$\varphi(\tau) = a^+(\tau) - a^+(\alpha(\tau)). \tag{10}$$

Здесь функция $a(z)$ голоморфна в D, а у ее граничного значения, также удовлетворяющего уравнению (8) по теореме Коши, возможны логарифмические особенности в вершинах. Поэтому

$$(A\varphi)(z) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma a^+(\tau)E(\alpha(\tau) - z)d\tau,$$

если учесть изменение ориентации контура при замене переменной интегрирования. Для любой 2π-периодической функции справедливо соотношение

$$f[\alpha(\tau)] = \{f(\tau + \pi - a), \ \operatorname{Im}\tau \geq 0; \ f(\tau + \pi + a), \ \operatorname{Im}\tau \leq 0\}, \tag{11}$$

а для функции (1) оба возникающих в правой части (11) выражения имеют простой полюс в нуле. Отсюда

$$(7) \ \Leftrightarrow \ (Ta)(x) = g(x), \quad x \in (-\pi, \pi), \tag{12}$$

где

$$(Ta)(x) \equiv 2a(x) + (\pi i)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} a(\theta) K(x-\theta) d\theta; \tag{13}$$

$$K(x) = \Delta(E, x); \quad \Delta(E, x) = E(x + a + \pi) - E(x - a + \pi). \tag{14}$$

Уравнение (12) является частным случаем уравнения типа свертки с периодическим ядром, исследуемого в замкнутой форме с помощью дискретного преобразования Фурье ([7], гл. VII, § 26, п. 2). Одним из решений однородного уравнения

$$(Ta)(x) = 0 \tag{15}$$

является постоянная — единственная голоморфная в D функция, для которой $a^+(\tau) = a^+[\alpha(\tau)]$. Считаем, что $g(x) \in L_2[-\pi, \pi]$. В силу четности ядерной функции (14) и альтернатив Фредгольма получим необходимое условие разрешимости уравнения (12)

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = 0. \tag{16}$$

Условие (16) является и достаточным, т. к. других решений уравнение (15) не имеет. Для этого надо показать, что $k_n \neq 0 \ \forall n \neq 0$, где k_n — коэффициенты Фурье ядерной функции. Используя формулу (11) для функции (1), имеем

$$k_n + i = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \exp(-in\tau) E[\alpha(\tau)] d\tau.$$

Делая в последнем интеграле замену и применяя формулу (11) уже для экспоненты, получим $k_n + i = 2(-1)^n i \sin(na) e_n \neq 0$ в силу ограничений (2).

Оператор (13) не является обратимым. Поэтому рассмотрим уравнение

$$(T_1 a)(x) \equiv 2a(x) + (\pi i)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} [K(x-\theta) + i] a(\theta) d\theta = g(x), \tag{17}$$

ядро которого отличается от ядра уравнения (12) лишь на постоянную, т. е. функция (10) не меняется при замене (12) на (17). Оператор (17) обратим и

$$a(x) = 2^{-1} \left[g(x) + (2\pi i)^{-1} i \int_{-\pi}^{\pi} R(x-\theta) g(\theta) d\theta \right]. \tag{18}$$

Здесь резольвента определяется равенством

$$R(\theta) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k_n}{k_n + i} \exp(in\theta),$$

где надо положить $k_0 = 0$.

Итак, решение функционального уравнения (7) получено в явном виде. Сформулируем окончательный результат.

Теорема 1. *Уравнение* (7) *разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие разрешимости* (16). *При выполнении этого условия общее решение дается формулой*

$$\varphi(\tau) = a^+[\alpha(\tau)] + \lambda \gamma(\tau) + b^+(\tau).$$

Здесь функция $a(z)$ определяется формулой (18), *λ — произвольная постоянная, а $b(z)$ — голоморфная в D функция. Общее решение однородного уравнения получается, если положить $a(z) = 0$.*

Приступим к построению биортогонально сопряженных систем. Положим

$$g_m(z) = (-1)^m (m!)^{-1} (z^m + b_m), \tag{19}$$

где постоянные подобраны с учетом (16):

$$b_{2m-1} = 0, \quad b_{2m} = -(2m+1)^{-1}\pi^{2m}, \quad m \geq 1. \tag{20}$$

Введем систему функций

$$\{\varphi_m\} : A\varphi_m = g_m, \tag{21}$$

удовлетворяющих равенствам (9) и

$$\varphi_m(\tau) + \varphi_m[\alpha(\tau)] = 0. \tag{22}$$

Пополним систему функцией $\varphi_0(\tau) = -i\gamma(\tau)/4$, для которой справедливо равенство (22) и

$$\int_\Gamma \varphi_0(\tau)d\tau = \pi i.$$

Лемма 1. *Системы функций* (21) *и* (4) *биортогонально сопряжены в том смысле, что*

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \varphi_m(\tau)E_j(\tau)d\tau = \delta_{m,j}. \tag{23}$$

Доказательство. При положительных индексах справедливость равенств (23) очевидна с учетом (19) и (21). При $m = 0$ все верно в силу соотношения (8), а при $j = 0$ — в силу ранее проведенной нормировки.

Лемма остается справедливой и при замене Γ на Γ_0, если под функциями (21) понимать граничные значения кусочно-голоморфных функций

$$\varphi_m(z) = H_m(z) - H_m[\alpha(z)], \quad z \in D \setminus D_0, \quad m \geq 1,$$

где функции

$$H_m(z) = 2^{-1}[g_m(z) + F_m(z)] \tag{24}$$

определяются формулой (18) при $g(x) = g_m(x)$. Здесь 2π-периодические функции $F_m(z)$ голоморфны в полосе $|\operatorname{Im} z| < d$ и $d \in (\operatorname{Im} a,\ 2\operatorname{Im} a)$ — некоторое число, определяемое выбором функции $F(z)$ в формуле (1). Например, (3) $\Rightarrow$ $d = 2\operatorname{Im} a$. При $m = 2k$ функции (21) непрерывны на Γ_0 как четные функции со структурой (22). При $m = 2k-1$ эти функции, вообще говоря, имеют в вершинах точки разрыва первого рода. Поэтому

$$\varphi'_{2m}(\tau) = -\varphi_{2m-1}(\tau). \tag{25}$$

Существует такая постоянная M, что

$$|\varphi_m(z)| \leq M(m!)^{-1}\sqrt{\pi^{-m}}, \quad z \in \overline{D} \setminus D_0. \quad \square \tag{26}$$

2. Свойства биортогональных рядов

Функции (21) неудобны тем, что ни одна из них не является граничным значением на Γ_0 функции, аналитической вне D_0 и исчезающей на бесконечности. Поэтому имеет смысл заменить их системой интегралов типа Коши

$$\{\Omega_m(z)\} : \Omega_m(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_0} \varphi_m(\tau)(\tau - z)^{-1} d\tau, \quad z \notin \overline{D}_0, \tag{27}$$

с сохранением справедливости равенств (23). Более того, после такой замены равенства (23) имеют место и в случае, когда вместо Γ берется контур L, удовлетворяющий условиям а) $D_0 \subset \operatorname{int} L$, б) функция (1) голоморфна в $\overline{\operatorname{int}} L$.

Условие а) можно заменить более слабым требованием, чтобы внутри L лежали лишь вершины прямоугольника, или даже условием, чтобы ни одна из вершин не лежала вне L. Вершины являются точками ветвления интегралов (27) и в плоскости с разрезом по контуру L всегда можно выделить голоморфные ветви, исчезающие на бесконечности. Сказанное справедливо и в случае, когда L — разомкнутая спрямляемая кривая, проходящая через все вершины.

Лемма 2. *Пусть для L выполнены условия* а) *и* б). *Тогда система функций* (4) *неполна в* $\operatorname{int} L$.

Доказательство. Проверим критерий неполноты ([2], с. 127) для функции

$$\Omega_0(z) = -\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{z-\pi}{z+\pi}\right), \tag{28}$$

где выделена ветвь логарифма, голоморфная в плоскости с разрезом по интервалу $[-\pi, \pi]$ и исчезающая на бесконечности. Тогда для некоторого контура Γ_1 имеем

$$\int_{\Gamma_1} \Omega_0'(z) E_j(z) dz = 0, \quad j = \overline{0, \infty}, \tag{29}$$

если только $D_0 \subset \operatorname{int} \Gamma_1 \subset \operatorname{int} L$, что и завершает эту проверку. $\square$

Замечание 1. Из общих результатов [8] и [9] вытекает, что система функций (4) полна в круге $|z| < \pi$. Равенства (29) означают, что ее радиус полноты равен π.

Сопоставим функции $\Psi(z)$, голоморфной в $\overline{\operatorname{ext}} L$ и исчезающей на бесконечности, ряд

$$\Psi(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \Omega_m(z), \tag{30}$$

где

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi i} \int_L \Psi(z) E_m(z) dz.$$

Тогда $\Omega_0'(z) \sim 0$. Теперь обсудим создавшуюся ситуацию. С одной стороны, вершины прямоугольника не должны лежать внутри контура, если система (27) является представляющей в достаточно общем классе аналитических функций. С другой стороны, вершины не могут лежать и вне контура, т. к. функции (27) имеют в них точки ветвления. Осталась единственная возможность — предельный случай, когда все вершины лежат на L. Особый интерес представляет случай $L = \Gamma_0$.

Теорема 2. *Пусть все особенности четной голоморфной функции $\Psi(z)$ лежат в D_0 и $\Psi(\infty) = 0$. Тогда в* (30) *имеет место знак равенства при $z \in cD_0$, причем ряд сходится абсолютно и равномерно.*

Доказательство. По формуле Сохоцкого–Племеля имеем $\Omega_{2m}^{-}(t)=\Omega_{2m}(t)-\varphi_m(t)/2$, $t\in\Gamma_0$, где особый интеграл в правой части понимается в смысле главного значения по Коши и получен из соответствующего интеграла типа Коши формальной заменой z на t. Применяя формулу интегрирования по частям для особого интеграла ([10], гл. 1, § 3, п. 5), получим

$$\Omega_{2m}(t)=\mu_t\varphi_{2m}(t)+(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_0}\varphi_{2m-1}(\tau)\ln(\tau-t)d\tau,\quad m\geq 1.$$

Здесь использованы формула (25) и аналоги формул Ю.В. Сохоцкого в угловых точках контура ([10], гл. 1, § 4, п. 5). Именно, $\mu_t=1/2$, если t — точка гладкости, и $\mu_t=0$ или $\mu_t=1$, если t — точка возврата. Однозначная ветвь логарифма выделена с помощью разреза, соединяющего точку t с бесконечно удаленной точкой. Итак, существует такая постоянная B, что выполняется неравенство $|\Omega_{2m}(t)|<B[(2m-1)!]^{-1}\pi^{2m}$. В силу (26) аналогичная оценка справедлива и для $\Omega_{2m}^{-}(t)$.

Введем бесконечноэлементные разностные операторы

$$V_a(f,z)\equiv f(w)+\sum_{n=1}^{\infty}[f(w+2\pi n)+f(w-2\pi n)],\quad w=z-a+\pi,$$

и $W=V_a+V_{-a}$, $z\in D$, порождаемые разложением функции (1) в ряд простейших дробей. Ясно, что $\alpha_m=(-1)^{m+1}W(\Psi^{(m)},0)$. Радиус сходимости ряда Маклорена функции $W(\Psi,z)$ больше, чем π, т. е. ряд (30) сходится абсолютно и равномерно на множестве cD_0 и исчезает на бесконечности. Обозначим его сумму через $\theta(z)$ и заметим, что разность

$$\varphi(z)=\Psi(z)-\theta(z)\tag{31}$$

удовлетворяет условию Липшица на Γ. Действительно, это справедливо на каждой открытой стороне прямоугольника, а в силу непрерывности — и всюду на Γ. Умножиая обе части равенства (31) на функции (4) и интегрируя по Γ, получим

$$\int_{\Gamma}\varphi(\tau)E^{(j)}(\tau)d\tau=0,\quad j=\overline{1,\infty}.$$

При нечетных j равенства выполняются за счет четности подинтегральной функции, т. е. отсюда следует (8). Применяя теорему 1 с учетом (9), имеем $\varphi(\tau)=b^{+}(\tau)$ и по теореме Лиувилля $\varphi(z)\equiv 0$. □

Если снять условие четности, то в соотношении (30) знак равенства имеет место на любом компакте, лежащем в области $c\overline{D}_0$, причем ряд сходится абсолютно и равномерно. Для доказательства достаточно взять вначале нечетную функцию и применить теорему 2 для ее первообразной. Затем произвольную функцию представить в виде суммы четной и нечетной компонент.

Теорема 3. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D_0 и непрерывна на ее замыкании. Тогда*

$$f(z)=\beta_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu E^{(\nu)}(z),\quad z\in D_0,\tag{32}$$

где

$$\beta_\nu=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0}f^{+}(\tau)\Omega_\nu^{-}(\tau)d\tau,\quad \nu=\overline{0,\infty}.$$

Ряд (32) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в области D_0.

Доказательства не приводим, поскольку с учетом теоремы 2 оно сводится к стандартному приему — представлению ядра Коши в виде биортогонального ряда (см., напр., [11], гл. 4, § 6, п. 3).

Замечание 2. Если дополнительно предположить, что четная функция $f^+(t) \in C^2(\Gamma_0)$, то равенство (32) имеет место в замыкании $\overline{D}_0$, причем ряд сходится там абсолютно и равномерно.

Замечание 3. Числа $\beta_0 = 0$ и $\beta_\nu = b_\nu$, определяемые равенствами (20), являются коэффициентами разложения функции (1) в ряд (32).

В частном случае, когда функция $f(z)$ 2π-периодична и голоморфна в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq \operatorname{Im} a$, с использованием обозначения (14) имеем

$$\beta_m = \frac{1}{\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} H_m(x)\Delta(f,x)dx.$$

Например, $\forall n \neq 0$ получим

$$\exp(-inz) = 4(-1)^{n+1}\sin(na)\sum_{m=1}^{\infty} h_{n,m}E_m(z), \quad z \in D_0,$$

где $H_{n,m}$ — коэффициенты Фурье функции (24).

Пусть теперь в формуле (1) функция $F(z)$ целая. Тогда множество точек сходимости ряда (32) не является, вообще говоря, связным. Это внешность окружностей (5) и окружностей, конгруэнтных им относительно однопериодической группы линейных сдвигов с периодом 2π. Все эти окружности соприкасаются в точках, конгруэнтных вершинам прямоугольника. Если же ряд (32) сходится хотя бы в одной точке внутри данных окружностей, то множество его точек сходимости является связной внешностью однопериодической решетки контуров, образованных окружностями $|\alpha(z)| = r < \pi$.

Система (4) допускает н. р. н.

$$0 = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j E_j(z), \quad \exists j : \gamma_j \neq 0, \quad z \in D_0.$$

Достаточно взять, например, ряд (32) для функции z^2 и трижды продифференцировать его внутри области. Ясно также, что ни одно н. р. н. не может равномерно сходиться на Γ_0, т. к. в противном случае из соотношения (23) имели бы тривиальное разложение нуля. Н. р. н. не могут сходиться и в каких-либо точках, лежащих внутри окружностей (5), поскольку справедлив аналог теоремы Абеля для степенных рядов.

Замечание 4. Н. р. н. сходится, например, в точках множества $|\operatorname{Im} z| > \pi + \operatorname{Im} a$ и интересный вопрос о том, чему же равна на этом множестве его сумма, пока не решен.

3. Некоторые приложения и замечания

В качестве одного из приложений ранее полученных результатов укажем на проблему разложения функций, голоморфных внутри или вне круга $|z| = \pi$, в биортогональные ряды. Для этого перепишем равенства (23) в следующей форме:

$$\int_L H_m^+(t)E_j[\alpha(t)]dt = \pi i\delta_{m,j}, \quad L : |t| = \pi, \quad m, j \geq 1. \tag{33}$$

Эти равенства остаются справедливыми и тогда, когда система (24) пополнена функцией $H_0(z) = 1$, а вторая система — функцией (28).

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в указанном круге и $f^+(t) \in C^2(L)$. Поставим ей в соответствие ряд

$$f(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m H_m(z), \quad |z| < \pi, \tag{34}$$

где

$$\mu_0 = \frac{1}{\pi i}\int_L f^+(t)\Omega_0^-(t)dt, \quad \mu_m = \frac{1}{\pi i}\int_L f^+(t)E_m[\alpha(t)]dt. \tag{35}$$

Теорема 4. *Если функция $f(z)$ четна, то в соотношении (34) имеет место знак равенства в замыкании круга. При этом ряд (34) сходится абсолютно и равномерно.*

Доказательство. Дважды применяя в интегралах (35) формулу интегрирования по частям, получим, что ряд (34) равномерно сходится на L. Поэтому функция $\theta_1(t) = \theta[\alpha(t)]$, где $\theta(z)$ — разность между суммой ряда (34) и функцией, по которой он построен, удовлетворяет однородному уравнению (8). Из теоремы 1 вытекает, что $\theta_1^+[\alpha(t)] = b^+(t)$, $t \in \Gamma$, т. е. $\theta_1(z)$ — постоянная. Но для постоянной, отличной от нуля, коэффициент $\mu_0 \neq 0$, т. е. $\theta(z) \equiv 0$. □

Если в теореме 4 снять условие четности, то в (34) также имеет место знак равенства. При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте из данного круга. Для голоморфной в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq \operatorname{Im} a$ функции с периодом 2π формулы (35) можно записать в более простом виде

$$\mu_m = \frac{(-1)^m}{\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} E(x)\Delta(f^{(m)}, x)dx, \quad m \geq 1.$$

Например, при $n \neq 0$ имеем

$$\exp(-inz) = 4(-1)^{n+1}\sin(na)e_n\sum_{m=1}^{\infty}(-in)^m H_m(z), \quad |z| < \pi.$$

Введем систему интегралов типа Коши

$$P_j(z) = (2\pi i)^{-1}\int_L (t-z)^{-1}E^{(j)}[\alpha(t)]dt, \quad j \geq 1, \quad |z| > \pi, \tag{36}$$

пополнив ее функцией (28). Полученная система также биортогональна в смысле (33) пополненной системе функций (26). Легко показать, используя формулу (11), что

$$P_j(z) = (-1)^{j+1}z^{-j-1} + (2\pi i)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}(x-z)^{-1}\Delta(E^{(j)}, x)dx,$$

т. е. на самом деле интегралы (36) голоморфны в плоскости с разрезом по интервалу $[-\pi, \pi]$ и на концах его при $E^{(j)}(a) \neq E^{(j)}(-a)$ имеют логарифмические особенности.

Теорема 5. *Пусть функция $\Psi(z)$ голоморфна в замыкании $|z| \geq \pi$ и исчезает на бесконечности. Тогда*

$$\Psi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j P_j(z) + a_0\Omega_0(z), \quad |z| > \pi,$$

где

$$a_j = \frac{1}{\pi i}\int_L \Psi(\tau)H_j(\tau)d\tau, \quad j = \overline{0, \infty}.$$

Доказательство этой теоремы идентично проведенному в ([11], гл. 4, § 6, п. 3).

Укажем еще одно приложение. Пусть l — простая кусочно-гладкая кривая, удовлетворяющая условию $l \cap cD = \{\pm\pi, \pm a\}$, концы которой совпадают с любыми соседними вершинами. Считаем, что выполнено условие (3). Выясним вопрос о полноте системы функций (4) в $L_2(l)$. Для этого рассмотрим уравнение свертки

$$(Mq)(t) \equiv \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma q(\tau)E(\tau - t)d\tau = \beta(t) \tag{37}$$

с правой частью $\beta(t) \in L_2(l)$. В плоскости с двубережным разрезом по l выделим голоморфные ветви интегралов (27), исчезающие на бесконечности. Умножим обе части уравнения (37) на функции $c_j(t) = \Omega_j^+(t) - \Omega_j^-(t)$ и проинтегрируем по l. При $j = 0$ получим необходимое условие разрешимости

$$\int_l \beta(t) c_0(t) dt = 0. \tag{38}$$

Заметим, что производные функции (28) использовать нельзя, т. к. в вершинах они имеют неинтегрируемые (даже в смысле главного значения по Коши) особенности. При $j > 0$ имеем $\int\limits_l q(\tau)[\tau^j + b_j]d\tau = \beta_j$, где β_j — вполне определенные числа. Уравнение свертки (37) оказалось сведенным к степенной проблеме моментов. В частности, однородное уравнение не имеет нетривиальных решений, удовлетворяющих условию $\int\limits_l q(\tau)d\tau = 0$. С другой стороны, интеграл $F_1(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_l q(\tau)E(\tau - z)d\tau$ является голоморфной в $\overline{D} \setminus \{\pm\pi, \pm a\}$ функцией. Поэтому однородное уравнение равносильно равенствам $\int\limits_\Gamma q(\tau)E^{(j)}(\tau)d\tau = 0$, $j = \overline{0, \infty}$. Последним равенствам удовлетворяет функция $c_0(t)$. Но при замене $E(z)$ на 1 полученная система (4) полна в $L_2(l)$, т. к. неоднородное уравнение (37) при $\beta(t) = c$ неразрешимо (см. (38)). То, что это минимально полная система, прямо следует из существования биортогонально сопряженной к ней системы $\{t'(s)c_j(t)\}$, $j = \overline{0, \infty}$, где $t = t(s)$ — параметрическое уравнение кривой с длиной дуги в качестве параметра.

Область D_0 является весьма частным случаем круговых областей D^*, ограниченных дугами n окружностей $|z - \alpha_j| = R_j$, $j = \overline{1, n}$. Для таких областей П. Аппель [12] предложил метод разложения произвольной функции $\Phi(z)$, голоморфной в замыкании области D^*, в ряд мероморфных функций, полюсы которых лежат вне $\overline{D}^*$ (рациональных, однопериодических, двоякопериодических). Например, если все точки области D^* лежат вне упомянутых окружностей, то

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} A_{k,j}\operatorname{ctg}^{(k)}(z - \alpha_j), \quad z \in D^*.$$

Таким образом, функции $\Phi(z)$ раскладываются в ряды по системе функций

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} A_{k,j}\operatorname{ctg}^{(k)}(z - \alpha_j)\right\}, \tag{39}$$

причем $A_{k,j} = A_{k,j,\Phi}$. Другими словами, фиксирован лишь набор полюсов α_j, а соотношения между коэффициентами $A_{k,j}$ при каждом фиксированном k изменяются в зависимости от выбора функции $\Phi(z)$. Функции (39) считаем определенными с точностью до некоторого постоянного множителя. Спрашивается, может ли для некоторых областей выполняться соотношение $A_{k,j} = B_k C_j$ $\forall k, j$? Рассмотренная в статье область D_0 дает один из таких примеров. Однако подобные ряды методом Аппеля получить уже нельзя, поскольку ряды Аппеля "существенно гуще". Примеры других таких областей имеются в [13].

Литература

1. Гарифьянов Ф.Н. *Абсолютно представляющие системы эллиптических функций* // Матем. заметки. – 1996. – Т. 59. – № 6. – С. 932–936.
2. Леонтьев А.Ф. *Обобщения рядов экспонент.* – М.: Наука, 1981. – 320 с.
3. Хромов А.П. *Оператор дифференцирования и ряды типа Дирихле* // Матем. заметки. – 1969. – Т. 6. – № 6. – С. 759–766.
4. Коробейник Ю.Ф. *Представляющие системы* // УМН. – 1981. – Т. 36. – № 1. – С. 73–126.
5. Уолш Дж.Л. *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области.* – М.: Ин. лит., 1961. – 508 с.
6. Чибрикова Л.И. *О граничных задачах для прямоугольника* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1964. – Т. 123. – Кн. 9. – С. 15–39.

7. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки.* – М.: Наука, 1978. – 295 с.
8. Коробейник Ю.Ф. *О полноте одной системы аналитических функций* // Матем. сб. – 1965. – Т. 67. – № 4. – С. 561–569.
9. Казьмин Ю.А. *О полноте одной системы аналитических функций*, II // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. – 1960. – № 6. – С. 11–19.
10. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.
11. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* – М.: Наука, 1976. – 536 с.
12. Appel P. *Developements en serie d'une fonction holomorphe dans une aire limitie par des ares de cercle* // Math. Ann. – 1883. – Bd. 21. – S. 118–124.
13. Гарифьянов Ф.Н. *Биортогональные ряды, порожденные группой диэдра* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 4. – С. 11-15.

Казанская государственная
сельскохозяйственная академия

Поступили
первый вариант 30.10.2000
окончательный вариант 21.06.2001