ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 4 (455)

УДК 517.927

А.В. КОМАРОВ, О.М. ПЕНКИН, Ю.В. ПОКОРНЫЙ

О СПЕКТРЕ РАВНОМЕРНОЙ СЕТКИ ИЗ СТРУН

1. Краевые задачи на пространственных сетях (геометрических графах) возникают при изучении процессов и явлений в самых различных разделах естествознания — от сложных молекул до нейронных систем [1]. Одна из наиболее наглядных реализаций таких задач — упругие деформации сетки, связанной из натянутых струн. Развитые воронежскими математиками методы позволили описывать такие задачи в терминах обыкновенного дифференциального уравнения, построив для них точный аналог теории Штурма–Лиувилля, включая теорию сравнения Штурма и осцилляционные спектральные свойства [2]. Последние свойства свидетельствуют наследование сеткой важнейших свойств ее компонент — отдельных ребер-струн. С другой стороны, плоская сетка из струн явно не является одномерным объектом и при достаточно мелких ячейках должна обнаруживать родственность с мембраной. Вопрос о сходстве их спектров, возникший более десяти лет назад, уже при постановке сопровождался серьезными сомнениями физической природы — реакция мембраны и прямоугольной сетки на точечное воздействие качественно различны: мембрана противодействует по континууму направлений, а сетка — всего лишь по четырем (если усилие сосредоточено в узле) или даже по двум направлениям.

В работе на примере квадратной однородной мембраны показывается, что переход к достаточно густой сетке из струн не меняет спектра в главном.

2. Спектр Λ однородной мембраны, натянутой на квадрат $Q = [0, l] \times [0, l]$, определяется задачей

$$\sigma \Delta u + \lambda \rho u = 0, \tag{1}$$

$$u|_{\partial Q} = 0, \tag{2}$$

где ρ $(= \mathrm{const})$ — плотность распределения масс и σ $(= \mathrm{const})$ — внутреннее напряжение мембраны, обеспечиваемое равномерным ее натяжением. Спектр Λ, очевидно, вещественен, положителен и состоит из последовательности

$$\lambda_k = \frac{\pi^2 \sigma}{l^2 \rho} k \tag{3}$$

при таких натуральных k, которые допускают представление $k = n^2 + m^2$ с целыми n, m. Количество таких представлений при каждом k определяет кратность соответствующего λ_k.

Рассмотрим на том же квадрате $Q = [0; l] \times [0; l]$ сетку Γ_h из струн с квадратными ячейками $h \times h$, закрепленную в узлах, лежащих в ∂Q (их совокупность обозначим $\partial \Gamma_h$). Обозначим через ρ_h плотность струн, а через σ_h — их натяжение. Будем считать, что в узлах Γ_h, не лежащих на границе ∂Q, т. е. не попавших в $\partial \Gamma_h$ (их совокупность обозначим через $I(\Gamma_h)$), помещены грузы с массами m_h. Если значения m_h, σ_h и ρ_h связать с параметрами σ, ρ мембраны равенствами

$$\rho = \frac{2\rho_h + m_h}{h^2}, \quad \sigma = \frac{\sigma_h}{h}, \tag{4}$$

Работа поддержана Министерством высшего образования Российской Федерации (Конкурсный центр Санкт-Петербургского государственного университета, грант № 97-0-1.8-100).

то такую сетку можно считать физической дискретизацией исходной мембраны и наоборот, мембрану — осреднением такой сетки. Назовем такую сетку из струн для задачи (1), (2) "тканой мембраной". Оказывается, ее спектр при малых h адекватен "началу" $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ спектра Λ со сколь угодно большим n. Точнее говоря, верна

Теорема 1. *Для того чтобы положительное число λ было точкой спектра описанной "тканой мембраны" Γ_h, необходимо и достаточно, чтобы λ удовлетворяло одному из уравнений*

$$2\cos\frac{\pi h}{l}i + 2\cos\frac{\pi h}{l}j = 4\cos h\sqrt{\lambda\frac{\rho_h}{\sigma_h}} - m_h\sqrt{\frac{\lambda}{\rho_h\sigma_h}}\sin h\sqrt{\lambda\frac{\rho_h}{\sigma_h}} \quad (i,j=\overline{1,N-1}), \tag{5}$$

$$\left(\sin h\sqrt{\lambda\frac{\rho_h}{\sigma_h}}\right)^{N^2-1} = 0, \tag{6}$$

где $Nh = l$.

Точное описание (5), (6) спектра Γ_h определяет кратность каждой точки спектра. Так, решения уравнения (6) имеют кратность (N^2-1). Решения уравнений (5) при фиксированной сумме i^2+j^2 сливаются при $h \to 0$, что опять же определяет кратность общего решения как точки спектра. Из (6) видно, что решения λ этого уравнения при малых h как угодно далеки от нуля. Поэтому "начало спектра" Λ_h мембраны Γ_h определяется уравнениями (5), из которых следует, что

$$\lambda_k^h = \lambda_k + O(h), \tag{7}$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ — спектр мембраны, т. е. последовательность (3), а $\lambda_0^h, \lambda_1^h, \ldots$ — спектр сетки Γ_h, расположенный по возрастанию.

3. Для доказательства теоремы опишем сначала соответствующую "тканой мембране" Γ_h математическую модель колебаний. На каждом ребре ячейки размера h (если оно не лежит на границе ∂Q) для струны справедливо обычное соотношение

$$\sigma_h u'' + \lambda\rho_h u = 0, \tag{8}$$

где производные берутся вдоль ребра ячейки. Обозначим через a_{ij} узел сетки Γ_h с координатами $(ih,\, jh)$ при $i,j=\overline{0,N}$. Горизонтальное ребро сетки, соединяющее соседние вершины a_{ij} и a_{i+1j}, обозначим через γ_{ij}^1, а вертикальное ребро между a_{ij} и a_{ij+1} — через γ_{ij}^2. Для функции $u(x)$, заданной на Γ_h, сужения на ребра γ_{ij}^k будем обозначать через u_{ij}^k. Любое из этих сужений удовлетворяет уравнению (8). Рассматриваемые функции $u(x) : \Gamma_h \to R$ непрерывны во всех внутренних узлах и, кроме того, в этих узлах должны удовлетворять условию баланса натяжений, что означает

$$\sigma_h[(u_{ij}^1)'(a_{ij}) - (u_{i-1j}^1)'(a_{ij}) + (u_{ij}^2)'(a_{ij}) - (u_{ij-1}^2)'(a_{ij})] + \lambda m_h u_{ij}(a_{ij}) = 0. \tag{9}$$

Закрепление сетки на границе квадрата Q приводит к аналогичным (2) условиям

$$u_{ij}(a_{ij}) = 0. \tag{10}$$

Каждое ребро γ_{ij}^k $(k=1,2)$ параметризуем в направлении от a_{ij} скаляром t, меняющимся от 0 до h. Вид уравнения (8) для функций $u_{ij}^k(t)$ сохранится.

Решение $u_{ij}^k(t)$ уравнения (8) представимо в виде

$$u_{ij}^k(t) = A_{ij}^k\sin\sqrt{\frac{\lambda\rho_h}{\sigma_h}}t + B_{ij}^k\cos\sqrt{\frac{\lambda\rho_h}{\sigma_h}}t, \tag{11}$$

где A_{ij}^k, B_{ij}^k — произвольные постоянные. В силу непрерывности решений в целом на сетке для каждого из внутренних узлов a_{ij} значения u_{ij} вдоль примыкающих ребер должны быть одинаковыми. Обозначая это значение через $\overline{u_{ij}}$, имеем

$$\overline{u_{ij}} = u_{ij}^k(0) = u_{i-1j}^1(h) = u_{ij-1}^2(h)$$

или с учетом (11)

$$\begin{aligned} \overline{u_{ij}} &= B_{ij}^k, \\ \overline{u_{ij}} &= A_{i-1j}^1 \sin h\sqrt{\frac{\lambda\rho_h}{\sigma_h}} + B_{i-1j}^1 \cos h\sqrt{\frac{\lambda\rho_h}{\sigma_h}}, \\ \overline{u_{ij}} &= A_{ij-1}^2 \sin h\sqrt{\frac{\lambda\rho_h}{\sigma_h}} + B_{ij-1}^2 \cos h\sqrt{\frac{\lambda\rho_h}{\sigma_h}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Условия на границе (10) дополняют (12) соотношениями

$$\overline{u_{ij}} = 0 \quad (\text{при } \ a_{ij} \in \partial\Gamma_h). \tag{13}$$

Подстановка (11) в (9) приводит, если для упрощения обозначить

$$\sin\left(h\sqrt{\frac{\lambda\rho_h}{\sigma_h}}\right) = s, \quad \cos\left(h\sqrt{\frac{\lambda\rho_h}{\sigma_h}}\right) = c, \tag{14}$$

к соотношениям

$$\begin{aligned} &\frac{1}{s}\sqrt{\lambda\rho_h\sigma_h}[(u_{i+1j} - cu_{ij}) - c(u_{ij} - cu_{i-1j}) + s^2 u_{i-1j} + \\ &\qquad + (u_{ij+1} - cu_{ij}) - c(u_{ij} - cu_{ij-1}) + s^2 u_{ij-1}] + \lambda\rho_h u_{ij} = 0, \end{aligned}$$

которые преобразуются к виду

$$\frac{1}{s}\left[(u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij-1} + u_{ij+1}) - \left(4c - sm_h\sqrt{\frac{\lambda}{\rho_h\sigma_h}}\right)u_{ij}\right] = 0. \tag{15}$$

Таким образом, для каждого λ имеем систему уравнений (12), (13), (15), линейных относительно A_{ij}^k, B_{ij}^k, $\overline{u_{ij}}$. Нули по λ определителя этой системы дают искомый спектр. Этот определитель с учетом специфики системы допускает представление в виде

$$\begin{vmatrix} D_1 & D_2 \\ 0 & D_3 \end{vmatrix}, \tag{16}$$

где строки фрагмента (D_1 D_2) составлены из коэффициентов уравнений (12), (13), причем

$$D_1 = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} s & c & & & 0 & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & 0 & & & s & c \\ & & & & & 1 \end{matrix}}^{4N(N-1)} \end{pmatrix}.$$

Блок D_3 в (16) составлен из коэффициентов соотношений (15), а определитель D_3 допускает представление $(s)^{-(N-1)^2}|\widetilde{D}_3|$, где $\widetilde{D}_3$ составлен из коэффициентов системы уравнений

$$(u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij-1} + u_{ij+1}) - \alpha u_{ij} = 0, \quad \alpha = 4c - sm_h\sqrt{\frac{\lambda}{\rho_h\sigma_h}}.$$

Таким образом, определитель (16) обращается в нуль лишь при $s^{N^2-1} = 0$ (что приводит к (6)) или при $|\widetilde{D}_3| = 0$.

Следующий шаг обусловлен представлением $|\widetilde{D}_3| = |G - \alpha I|$, где G — матрица смежности графа, полученного из Γ_h выбрасыванием граничных вершин a_{ij} ($\in \partial\Gamma_h$) и ребер, к ним примыкающих. Тем самым нули $|\widetilde{D}_3| = 0$ совпадают со спектром алгебраического графа с матрицей смежности G. Этот спектр (согласно, напр., [3]) состоит из чисел вида $\alpha = 2\cos\frac{\pi i}{N} + 2\cos\frac{\pi j}{N}$ ($i, j = \overline{1,\, N-1}$), т. е.

$$4c - sm_h\sqrt{\frac{\lambda}{\rho_h\sigma_h}} = 2\cos\frac{\pi i h}{l} + 2\cos\frac{\pi j h}{l},$$

что с учетом (14) приводит к (5).

4. Формулы (5), (6) позволяют изучить спектр "тканой мембраны" достаточно подробно. Достаточно очевидный уход в бесконечность при $h \to 0$ решений уравнения (6) отмечался выше. Зависимость решений (5) от h достаточно нетривиальна, т. к. множество этих решений для каждой пары i, j образует неограниченную последовательность, таких пар i, j при фиксированном h конечное число, неограниченно возрастающее при $h \to 0$. Рассмотрим вначале поведение решений (5) при фиксированных i, j. Оно особенно просто, если все $m_h = 0$, т. е. загрузка массами в узлах сетки отсутствует. Тогда уравнения (5) принимают вид

$$2\cos\frac{\pi i h}{l} + 2\cos\frac{\pi j h}{l} = 4\cos h\sqrt{\frac{\lambda\rho_h}{\sigma_h}},$$

что дает явное представление для собственных значений

$$\lambda_{hk} = \left[\pm\ \arccos\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi i h}{l} + \cos\frac{\pi j h}{l}\right) + 2\pi k\right]^2 \frac{\sigma_h}{h^2\rho_h}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Рассмотрим общий случай ненулевых m_h. Положим

$$\mu = \sqrt{\lambda\frac{\rho_h}{\sigma_h}}h, \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi i h}{l} + \cos\frac{\pi j h}{l}\right), \quad g = \frac{m_h}{2\rho_h h}. \tag{17}$$

Для μ эквивалентное (5) уравнение имеет вид

$$f(\mu) \equiv \gamma_{ij} - \cos\mu + g\mu\sin\mu = 0. \tag{18}$$

Это уравнение при фиксированных i, j имеет лишь простые корни. Для его левой части $f(\mu)$ соседние экстремумы имеют противоположные знаки (проверяется непосредственно). Поэтому нули f перемежаются с экстремумами, что позволяет давать оценки нулям f. Значения i, j по-прежнему фиксируем.

Эквивалентное $f'(\mu) = 0$ уравнение имеет вид $tg\tau = -\frac{g}{g+1}\tau$ и его решения $\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$ оцениваются так:

$$\frac{\pi}{2}(2k-1) \le \tau_k \le \pi k, \tag{19}$$

причем $\tau_0 = 0$. Если через $\mu^0, \mu^1, \mu^2, \ldots$ обозначить последовательность корней уравнения (18) при фиксированных i, j, то из (19) сразу следует, например, что $0 \le \tau_0 \le \mu^0 \le \tau^1 \le \pi$ и, вообще,

$$\frac{\pi}{2}(2k-1) \le \tau_k \le \mu_k \le \tau_{k+1} \le \pi(k+1).$$

Чрезвычайно важно здесь, что эти оценки не зависят от i, j. Отсюда с учетом связи (17) $\mu^k(h)$ с $\lambda_k(h)$ легко увидеть, что $\lambda_1(h), \lambda_2(h), \ldots$ при $h \to 0$ уходят в бесконечность равномерно по i, j. Для оценки поведения наименьшего (при фиксированных i, j) корня $\lambda_0(h)$ уравнения (5) представим (5) с помощью разложения Тейлора по степеням h. С учетом равенств (4) получим $\frac{\pi^2}{l^2}(i^2+j^2) = \frac{\rho}{\sigma}\lambda + O(h^2)$, что означает

$$\lambda = \frac{\pi^2\sigma}{l^2\rho}(i^2+j^2) + O(h^2).$$

Сопоставление этого равенства с (7) приводит к основному результату работы.

Теорема 2. *При каком угодно большом M спектр "тканой мембраны" Γ_h при достаточно малых h отличается в пределах $|\lambda| < M$ от спектра непрерывной мембраны лишь на $O(h^2)$.*

Литература

1. Павлов Л.С., Фаддеев Б.Д. *Модель свободных электронов и задача рассеяния* // ТМФ. – 1983. – Т. 55. – № 2. – С. 257–269.
2. Покорный Ю.В., Пенкин О.М. *О теоремах сравнения для уравнений на графах* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 7. – С. 1141–1150.
3. Цветкович Д., Дуб М., Захс Х. *Спектры графов*: *Теория и применение*. – Киев: Наук. думка, 1984. – 327 с.

Воронежский государственный университет

Поступила 30.04.1999