ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 8 (471)

УДК 517.518

В.А. АБИЛОВ, Ф.В. АБИЛОВА

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ–БЕССЕЛЯ

1. Пусть $L_2 = L_2([0,1], x^{2p+1})$ — пространство суммируемых с квадратом функций $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ с весом x^{2p+1}, $p > -\frac{1}{2}$, и нормой

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 x^{2p+1} f^2(x)dx}.$$

Известно ([1], с. 355), что система функций

$$j_p(\lambda_n x) = \frac{2^p \Gamma(p+1) \Im_p(\lambda_n x)}{(\lambda_n x)^p}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\Im_p(u)$ – функция Бесселя первого рода порядка p, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — занумерованные в порядке возрастания положительные корни уравнения $\Im_p(u) = 0$, является полной ортогональной системой в пространстве L_2. Обозначим через $E_n(f) = \inf\limits_{P_n} \|f - P_n\|$ наилучшее приближение функции $f \in L_2$ полиномами вида

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i j_p(\lambda_i x).$$

Напомним, что n-поперечником Колмогорова множества $M \subset L_2$ называется величина

$$d_n(M) = d_n(M; L_2) = \inf_{F_n \subset L_2} \{ \sup_{f \in M} \{ \inf_{g \in F_n} \|f - g\|\}\},$$

где последний раз точная нижняя грань берется по всем подпространствам $F_n \subset L_2$ размерности $n \in \mathbb{N}$ ([2], с. 186).

В пространстве L_2 рассмотрим оператор усреднения

$$T_h(f) = T_h(f; x) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(p+\frac{1}{2})} \int_0^\pi f(\sqrt{x^2 + h^2 - 2xh\cos t}\,) \sin^{2p} t\, dt, \quad 0 \le h \le 1.$$

Отметим следующие его свойства [3]:

1) $T_h(f)$ — линейный оператор,

2) $T_h(j_p(\lambda x)) = j_p(\lambda h) j_p(\lambda x)$,

3) $T_0(f) = T_0(f; x) = f(x)$,

4) $\|T_h(f) - f\| \to 0$, $h \to 0$,

5) функция $u(x,h) = T_h(f; x)$, $x, h \in [0,1]$, является решением задачи Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2p+1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} + \frac{2p+1}{h}\frac{\partial u}{\partial h},$$
$$u(x,0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial h}\right|_{h=0} = 0,$$

где $f(x)$ — любая дважды непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[0,1]$.

Определим теперь разности первого и высших порядков, как и в классическом случае, следующим образом:

$$\Delta_h(f;x) = T_h(f;x) - f(x) = (T_h - E)f(x),$$

$$\Delta_h^k(f;x) = \Delta_h(\Delta_h^{k-1}(f;x);x) = (T_h - E)^k f(x) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}T_h^i(f;x),$$

где $T_h^0(f;x) = f(x)$, $T_h^i(f;x) = T_h(T_h^{i-1}(f;x);x)$, $i = 1,2,\dots,k$; $k = 1,2,\dots$, E — единичный оператор в пространстве L_2.

Величину $\Omega_k(f;\delta) = \sup\limits_{0<h\le\delta}\|\Delta_h^k(f;x)\|$ будем называть обобщенным модулем непрерывности k-порядка функции $f \in L_2$. Введем обозначения:

$$D = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2p+1}{x}\frac{d}{dx}$$

— дифференциальный оператор второго порядка, $W_\varphi^{r,k}(D)$, $r = 0,1,\dots$; $k = 1,2,\dots$, — класс функций $f \in L_2$, имеющих на отрезке $[0,1]$ обобщенные производные ([4], с. 168) $f^{(s)}(x)$, $s = 0,1,\dots,2r$, принадлежащие пространству L_2, для которых

$$\Omega_k(D^r f;\delta) = O[\varphi(\delta)],$$

где $\varphi(t)$ — заданная монотонно возрастающая непрерывная функция на $[0;+\infty)$, причем $\varphi(0) = 0$. Кроме того, здесь и ниже $D^0 f = f$, $D^r f = D(D^{r-1}(f))$, $r = 1,2,\dots$ Наконец, через $\omega(t)$ обозначим модуль непрерывности, т. е. функцию, заданную на $[0,+\infty)$ и удовлетворяющую там условиям

1) $\lim\limits_{t\to 0}\omega(t) = \omega(0) = 0$,
2) $0 \le \omega(t_2) - \omega(t_1) \le \omega(t_2 - t_1)$, $t_1 \le t_2$.

2. Пусть $f \in L_2$. Ряд $f(x) \sim \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i(f) j_p(\lambda_i x)$, где

$$b_i(f) = \frac{1}{\|j_p(\lambda_i;x)\|^2}\int_0^1 x^{2p+1} f(x) j_p(\lambda_i x)dx,$$

будем называть рядом Фурье-Бесселя функции $f \in L_2$.

Обозначим $E_n(f) = \sqrt{\sum\limits_{i=n}^{\infty} a_i^2(f)}$, где $a_i^2(f) = \|j_p(\lambda_i x)\|^2 b_i^2(f)$. Известно, что $\|f\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^2(f)}$.

Для функции Бесселя $\Im_p(u)$ справедливы оценки ([1], с. 355)

$$\Im_p(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}}\left[\cos\left(u - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{u}\right)\right], \quad u \to +\infty, \tag{1}$$

$$\Im_p(u) = \frac{u^p}{2^p\Gamma(p+1)}[1 + O(u^2)], \qquad u \to 0. \tag{2}$$

Из (1) вытекает асимптотическая оценка для нулей λ_n функции $\Im_p(u)$

$$\lambda_n = \pi n + O(1). \tag{3}$$

Из (1), (2) и из определения функции $j_p(u)$ следует

$$|1 - j_p(u)| \le c_1, \qquad u \ge 1, \tag{4}$$

$$|1 - j_p(u)| \le c_2 u^2, \qquad 0 \le u \le 1, \tag{5}$$

$$|\sqrt{\lambda_n x}\,\Im_p(\lambda_n x)| \le c_3. \tag{6}$$

Здесь и всюду ниже $c_1, c_2, \ldots$ — некоторые фиксированные положительные постоянные, зависящие, быть может, только от p и k.

Кроме того, функции $j_p(\lambda_n x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка ([5], с. 321) $Dy = \lambda_n^2 y$ и $j_p(0) = 1$, $j_p'(0) = 0$. Умножая обе части последнего уравнения на x^{2p+1}, получим

$$\frac{d}{dx}\left(x^{2p+1}\frac{d}{dx}j_p(\lambda_n x)\right) + \lambda_n^2 x^{2p+1} j_p(\lambda_n x) = 0. \tag{7}$$

Известны два утверждения.

Предложение A$_1$ [3]. *Пусть $f \in L_2$. Если $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i(f) j_p(\lambda_i x)$, то*

$$T_h(f;x) = \sum_{i=1}^{\infty} j_p(\lambda_i h) b_i(f) j_p(\lambda_i x),$$

причем сходимость рядов справа понимается в смысле пространства L_2.

Предложение A$_2$ ([6], с. 51). *Пусть $A : L_2 \to L_2$ — самосопряженный вполне непрерывный оператор, $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \cdots$ — его отличные от нуля собственные значения, расположенные в порядке невозрастания их абсолютных величин, причем в написанной цепочке неравенств каждое собственное число повторяется столько раз, какова его кратность. Тогда $d_n(M; L_2) = |\mu_{n+1}|$, где $M = \{g \in L_2 : g = Af,\ f \in L_2,\ \|f\| \leq 1\}$.*

Лемма. *Если $f \in W_\varphi^{r,k}(D)$, то*

$$b_i(f) = (-1)^r \frac{1}{\lambda_i^{2r}} b_i(D^r f).$$

Доказательство. Умножив (7) на $f(x)$ и интегрируя полученное равенство дважды по частям, получим

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{2p+1} f(x) j_p(\lambda_i x)dx &= -\frac{1}{\lambda_i^2}\int_0^1 f(x)\frac{d}{dx}\left[x^{2p+1}\frac{d}{dx}j_p(\lambda_i x)\right]dx = \\
&= -\frac{1}{\lambda_i^2}\int_0^1 f(x) d\left[x^{2p+1}\frac{d}{dx}j_p(\lambda_i x)\right] = \\
&= -\frac{1}{\lambda_i^2} f(x) x^{2p+1}\frac{d}{dx}j_p(\lambda_i x)\Big|_0^1 + \frac{1}{\lambda_i^2}\int_0^1 \left[x^{2p+1}\frac{d}{dx}j_p(\lambda_i x)\right]\frac{d}{dx}f(x)dx = \\
&= \frac{1}{\lambda_i^2}\int_0^1 x^{2p+1}\frac{d}{dx}f(x) d j_p(\lambda_i x) = \\
&= \frac{1}{\lambda_i^2} x^{2p+1}\frac{d}{dx}f(x) j_p(\lambda_i x)\Big|_0^1 - \frac{1}{\lambda_i^2}\int_0^1 j_p(\lambda_i x) d\left[x^{2p+1}\frac{d}{dx}f(x)\right] = \\
&= -\frac{1}{\lambda_i^2}\int_0^1 j_p(\lambda_i x)\left[x^{2p+1}\frac{d^2}{dx^2}f(x) + (2p+1)x^{2p}\frac{d}{dx}f(x)\right]dx = \\
&= -\frac{1}{\lambda_i^2}\int_0^1 x^{2p+1}\left[\frac{d^2}{dx^2}f(x) + \frac{2p+1}{x}\frac{d}{dx}f(x)\right] j_p(\lambda_i x)dx = -\frac{1}{\lambda_i^2}\int_0^1 x^{2p+1} Df(x) j_p(\lambda_i x)dx.
\end{aligned}$$

Отсюда следует $b_i(f) = -\frac{1}{\lambda_i^2} b_i(Df)$. $\square$

Замечание. Из только что доказанной леммы и из предложения A$_1$, пользуясь равенством Парсеваля и формулой бинома Ньютона, легко показать, что если $f \in W_\varphi^{r,k}(D)$, то

$$\|\Delta_h^k(D^r f)\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}[1 - j_p(\lambda_i h)]^{2k}\lambda_i^{4r} a_i^2(f).$$

Теорема 1. *Если* $\varphi(t) = t^\nu$, $\nu > 0$, *то* $E_n(f) = O(n^{-2r-\nu}) \iff f \in W_\varphi^{r,k}(D)$, $r = 0, 1, \dots$; $k = 1, 2, \dots$; $0 < \nu < 2k$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $f \in W_\varphi^{r,k}(D)$. В силу неравенства Гёльдера при $k = 1, 2, \dots$ имеем

$$E_n^2(f) - \sum_{i=n}^{\infty} j_p(\lambda_i h) a_i^2(f) = \sum_{j=n}^{\infty} [1 - j_p(\lambda_i h)] a_i^2(f) = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i(f)|^{2-\frac{1}{k}} |a_i(f)|^{\frac{1}{k}} [1 - j_p(\lambda_i h)] \le$$

$$\le \left(\sum_{i=n}^{\infty} a_i^2(f) \right)^{\frac{2k-1}{2k}} \left(\sum_{i=n}^{\infty} [1 - j_p(\lambda_i h)]^{2k} a_i^2(f) \right)^{\frac{1}{2k}} \le c_4 (E_n^2(f))^{\frac{2k-1}{2k}} \left(n^{-4r} \sum_{i=n}^{\infty} [1 - j_p(\lambda_i h)]^{2k} \lambda_i^{4r} a_i^2(f) \right)^{\frac{1}{2k}}.$$

В последнем неравенстве воспользовались тем, что $\lambda_n \asymp n$ (см. (3)). Но в силу замечания к лемме

$$\sum_{i=n}^{\infty} [1 - j_p(\lambda_i h)]^{2k} \lambda_i^{4r} a_i^2(f) \le \|\Delta_h^k (D^r f)\|^2.$$

Поэтому из предыдущего неравенства следует

$$E_n^2(f) \le c_4 (E_n^2(f))^{\frac{2k-1}{2k}} n^{-\frac{2r}{k}} \|\Delta_h^k (D^r f)\|^{\frac{1}{k}} + \sum_{i=n}^{\infty} j_p(\lambda_i h) a_i^2(f).$$

Отсюда, пользуясь определением функции $j_p(x)$ и неравенством (6), имеем

$$E_n^2(f) \le c_5 (E_n^2(f))^{\frac{2k-1}{2k}} n^{-\frac{2r}{k}} \varphi^{\frac{1}{k}}(h) + 2^p \Gamma(p+1) \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_i h}\, \Im_p(\lambda_i h)}{(\lambda_i h)^{p+\frac{1}{2}}} a_i^2(f) \le$$

$$\le c_5 (E_n^2(f))^{\frac{2k-1}{2k}} n^{-\frac{2r}{k}} \varphi^{\frac{1}{k}}(h) + c_6 (\lambda_n h)^{-p-\frac{1}{2}} \sum_{i=n}^{\infty} a_i^2(f).$$

Положим в последнем неравенстве $h = c\lambda_n^{-1}$, где $c > 0$ — произвольная постоянная, выбор которой ниже укажем. Тогда

$$E_n^2(f) \le c_5 (E_n^2(f))^{\frac{2k-1}{2k}} n^{-\frac{2r}{k}} \varphi^{\frac{1}{k}} \left(\frac{c}{\lambda_n} \right) + c_6 c^{-p-\frac{1}{2}} \sum_{i=n}^{\infty} a_i^2(f)$$

или

$$(1 - c_6 c^{-p-\frac{1}{2}}) E_n^2(f) \le c_5 (E_n^2(f))^{\frac{2k-1}{2k}} n^{-\frac{2r}{k}} \varphi^{\frac{1}{k}} \left(\frac{c}{\lambda_n} \right).$$

Выберем теперь c так, чтобы $1 - c_6 c^{-p-\frac{1}{2}} \ge \frac{1}{2}$. Тогда из последнего неравенства следует

$$E_n(f) \le c_7 n^{-2r} \varphi\left(\frac{c}{\lambda_n} \right). \tag{8}$$

Остается заметить, что по условию теоремы $\varphi(t) = t^\nu$, а $\lambda_n \asymp n$. Следовательно, $E_n(f) = O(n^{-2r-\nu})$.

Необходимость. Пусть $E_n(f) = O(n^{-2r-\nu})$, $0 < \nu < 2k$, т. е. $\sum\limits_{i=n}^{\infty} a_i^2(f) \le c_8 n^{-4r-2\nu}$. Покажем, что $f \in W_\varphi^{r,k}(D)$. Очевидно, ряд, полученный после r-кратного применения оператора D к ряду

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i(f) j_p(\lambda_i x),$$

имеет вид

$$(-1)^r \sum_{i=1}^{\infty} a_i(f) \lambda_i^{2r} j_p(\lambda_i x).$$

Легко показать, что он сходится в пространстве L_2 и поэтому будет служить рядом Фурье–Бесселя функции $D^r f \in L_2$. Далее имеем

$$\|\Delta_h^k(f;x)\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2(f)\lambda_i^{4r}[1-j_p(\lambda_i h)]^{2k}.$$

Разобьем последнюю сумму на два слагаемых по схеме

$$\sum_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{n-1} + \sum_{i=n}^{\infty} = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2,$$

где $n = [h^{-1}]$, и оценим каждое слагаемое в отдельности. Напомним, что $\lambda_n \asymp n$. Имеем (см. (4), (5))

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_2 &= \sum_{i=n}^{\infty} a_i^2(f)\lambda_i^{4r}[1-j_p(\lambda_i h)]^{2k} \le c_9 \sum_{i=n}^{\infty} a_i^2(f) i^{4r} = \\ &= c_9\left\{n^{4r}\sum_{i=n}^{\infty} a_i^2(f) + \sum_{i=n}^{\infty}[(i+1)^{4r} - i^{4r}] \sum_{s=i+1}^{\infty} a_s^2(f)\right\} \le \\ &\le c_{10}\left\{n^{4r}\sum_{i=n}^{\infty} a_i^2(f) + \sum_{i=n}^{\infty} i^{4r-1} \sum_{s=i+1}^{\infty} a_s^2(f)\right\} \le \\ &\le c_{11}\left\{n^{4r} n^{-4r-2\nu} + \sum_{i=1}^{\infty} i^{4r-1} i^{-4r-2\nu}\right\} \le c_{12} n^{-2\nu} \le c_{13} h^{2\nu},\end{aligned}$$

т. е. $\sum_2 \le c_{13}h^{2\nu}$. Оценим теперь $\sum_1 = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i^2(f)\lambda_i^{4r}[1-j_p(\lambda_i h)]^{2k}$. В силу неравенства (7) имеем

$$\sum\nolimits_1 \le c_{14} h^{4k} \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2(f)\lambda_i^{4r+4k} \le c_{15} h^{4k} \sum_{i=1}^{n} a_i^2(f) i^{4r+4k}.$$

Далее,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i^2(f) i^{4r+4k} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{s=i}^{n} a_s^2(f) - \sum_{s=i+1}^{n} a_s^2(f)\right) i^{4r+4k} \le \\ &\le \sum_{i=1}^{n}[i^{4r+4k} - (i-1)^{4r+4k}] \sum_{s=i}^{n} a_s^2(f) \le c_{16} \sum_{i=1}^{n} i^{4r+4k-1} \sum_{s=i}^{n} a_s^2(f) \le \\ &\le c_{17} \sum_{i=1}^{n} i^{4r+4k-1} i^{-4r-2\nu} = c_{17} \sum_{i=1}^{n} i^{4k-2\nu-1} \le c_{18} n^{4k-2\nu} \le c_{19} h^{-4k+2\nu}.\end{aligned}$$

Следовательно, $\sum_1 \le c_{20}h^{2\nu}$. Объединяя полученные оценки для $\sum_1$ и для $\sum_2$, имеем

$$\|\Delta_h^k(D^r f)\|^2 \le c_{21} h^{2\nu}.$$

Отсюда следует, что $f \in W_\varphi^{r,k}$. $\square$

Теорема 2. *Если* $\varphi(t) = \omega(t^k)$, *то* $d_n(W_\varphi^{r,k}(D); L_2) \asymp n^{-2r}\omega(n^{-k})$, $r = 0, 1, 2, \dots$; $k = 1, 2, \dots$; $n = 1, 2, \dots$

Доказательство. Пусть $f \in W_\varphi^{r,k}(D)$. Из условий теоремы и неравенства (8) следует неравенство

$$d_n(W_\varphi^{r,k}(D); L_2) \le c_{22} n^{-2r}\omega(n^{-k}). \tag{9}$$

Определим оператор $A : L_2 \to L_2$ следующим образом:

$$g(x) = Af(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(f)\mu_i j_p(\lambda_i x),$$

где, как и выше, $b_i(f)$, $i = 1, 2, \ldots$, — коэффициенты Фурье–Бесселя функции $f \in L_2$, а $\mu_i = \frac{1}{i^{2r}}\omega(1/i^k)$, $i = 1, 2, \ldots$ Очевидно, что A — самосопряженный оператор в пространстве L_2, числа μ_i являются его собственными значениями, а $j_p(\lambda_i x)$ — отвечающими им собственными функциями.

Рассмотрим множество $M = \{g \in L_2 : g = Af,\ f \in L_2,\ \|f\| \le 1\}$. В силу предложения A_2 имеем

$$d_n(M; l_2) \asymp n^{-2r}\omega(n^{-k}). \tag{10}$$

Покажем, что $M \subset W_{\varphi}^{r,k}(D)$. Пусть $g \in M$. Рассуждая как и выше, получим включение $D^r g \in L_2$ и неравенство

$$\|\Delta_h^k(D^r f)\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}[1 - j_p(\lambda_i h)]^{2k}\lambda_i^{4r}\mu_i^2 a_i^2(f) \le c_{23}\sum_{i=1}^{\infty}[1 - j_p(\lambda_i h)]^{2k}\omega^2\left(\frac{1}{i^k}\right)a_i^2(f).$$

Вновь полагая $n = [h^{-1}]$, разобьем последнюю сумму на два слагаемых по схеме

$$\sum_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{n-1} + \sum_{i=n}^{\infty} = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2$$

и оценим каждое слагаемое в отдельности. Имеем

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{i=n}^{\infty}[1 - j_p(\lambda_i h)]^{2k}\omega^2\left(\frac{1}{i^k}\right)a_i^2(f) \le c_{24}\sum_{i=n}^{\infty}\omega^2\left(\frac{1}{i^k}\right)a_i^2(f) \le$$
$$\le c_{24}\omega^2(n^{-k})\sum_{i=n}^{\infty}a_i^2(f) \le c_{24}\omega^2(n^{-k}) \le c_{24}\omega^2(h^k),$$

т. е. $\sum_2 \le c_{25}\omega^2(h^{-1})$. Рассмотрим $\sum_1 = \sum\limits_{i=1}^{n-1}[1 - j_p(\lambda_i h)]^{2k}\omega^2(\frac{1}{i^k})a_i^2(f)$. Так как (см. (5)) $|1 - j_p(\lambda_i h)| \le c_2\lambda_i^2 h^2$ и $\frac{\omega(t_2)}{t_2} \le 2\frac{\omega(t_1)}{t_1}$, $t_1 \le t_2$, то

$$\sum\nolimits_1 \le c_{26}h^{4k}\sum_{i=1}^{n} i^{4k}\omega^2\left(\frac{1}{i^k}\right)a_i^2(f) = c_{27}h^{4k}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\omega(i^{-k})}{i^{-k}}\right]^2 i^{2k}a_i^2(f) \le$$
$$\le c_{28}h^{4k}h^{-2k}n^{2k}\omega^2(h^k)\sum_{i=1}^{n}a_i^2(f) \le c_{29}\omega^2(h^k),$$

т. е.

$$\sum\nolimits_1 \le c_{29}\omega^2(h^k).$$

Объединяя оценки для $\sum_1$ и $\sum_2$, получим $\|\Delta_h^k(D^r g)\|^2 \le c_{30}\omega^2(h^k)$, а это означает, что $g \in W_{\varphi}^{r,k}(D)$.

Таким образом, $M \subset W_{\delta}^{r,k}(D)$. Отсюда и из (10)

$$d_n(W_{\varphi}^{r,k}(D); L_2) \ge c_{31}n^{-2r}\omega(n^{-k}),$$

что вместе с (9) завершает доказательство. $\square$

Литература

1. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – 4-е изд. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
2. Колмогоров А.Н. *Избранные труды. Математика и механика.* – М.: Наука, 1987. – 470 с.
3. Левитан Б.М. *Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье* // УМН. – 1951. – Т. 6. – Вып. 2. – С. 102–143.
4. Никольский С.М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* – М.: Наука, 1977. – 455 с.
5. Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы.* – М.: Наука, 1970. – 671 с.
6. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.* – М.: Наука, 1965. – 448 с.

Дагестанский государственный университет
Институт физики Дагестанского научного центра

Поступила
22.04.1999