И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2005 МАТЕМАТИКА № 9 (520)

УДК 517.927

А.Л. ТЕПТИН

МНОГОТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СО ЗНАКОРЕГУЛЯРНОЙ ФУНКЦИЕЙ ГРИНА

Пусть $B = (b_{jk})$ — вещественная $r \times n$-матрица, $b_{j1} = 1$, $l_{jc}y \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} b_{jk} y^{(n-k)}(c)$, $j = \overline{1,r}$; $T_n(B; a, b; \alpha, \beta)$ $(a \le \alpha < \beta \le b)$ — класс таких операторов $L = d^n/dx^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} p_k(\cdot) d^k/dx^k$ с суммируемыми на $[a,b]$ коэффициентами, что при любых c_j, $j = \overline{1,r}$, $\alpha \le c_1 \le \dots \le c_r \le \beta$, каждое решение $y(x) \not\equiv 0$ уравнения $Ly = 0$, удовлетворяющее любым μ из краевых условий $l_{jc_j}y = 0$, $j = \overline{1,r}$, имеет на $[a,b]$ не более $n - \mu - 1$ нулей с учетом кратности $\forall \mu$, $\mu = \overline{1,r}$.

Следуя [1], функцию $K(x,s)$ будем называть знакорегулярным в $[a,b] \times (a,b)$ ядром, если все отличные от нуля определители $K\left(\begin{smallmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_k \end{smallmatrix}\right) = \det(K(x_i, s_j))_1^n$ для каждого k имеют один и тот же знак ε_k $\forall x_i, s_i$, $i = \overline{1,k}$, $a \le x_1 < \dots < x_k \le b$, $a < s_1 < \dots < s_k < b$, $k = 1, 2, \dots$ Если к тому же $K(x,s) \ne 0$ в $[a,b] \times (a,b)$ и $K\left(\begin{smallmatrix} s_1 & \dots & s_k \\ s_1 & \dots & s_k \end{smallmatrix}\right) \ne 0$ $\forall s_i$, $i = \overline{1,k}$, $a < s_1 < \dots < s_k < b$, $k = 1, 2, \dots$, то знакорегулярное ядро называется сильно знакорегулярным [1]. При $\varepsilon_k = 1$, $k = 1, 2, \dots$, такое ядро называется ядром Келлога (осцилляционным) ([2], [3]).

В [4] показано, что если при условии

$$L \in T_n(B; a, b; c_1, c_r) \tag{1}$$

существует перестановка $(j_1, \dots, j_r)$ множества $\{1, 2, \dots, r\}$, для которой

$$j_\nu < j_{\nu+k}, \quad k = \overline{2, r-\nu}, \quad \nu = \overline{1, r-2}, \tag{2}$$

$$B\begin{pmatrix} j_\nu & \dots & j_{\nu+\mu} \\ 1 & \dots & \mu+1 \end{pmatrix} > 0, \quad \nu = \overline{1, r-\mu}, \quad \mu = \overline{1, r-1}, \tag{3}$$

то знак функции Грина $G(x,s)$ краевой задачи

$$Ly = 0, \tag{4}$$

$$l_{jc_j}y = 0, \quad j = \overline{1,r}, \quad a \le c_1 \le \dots \le c_r \le b, \tag{5}$$

$$y^{(\nu_i)}(a_i) = 0, \quad \nu_i = \overline{0, k_i - 1}, \quad i = \overline{1,m}, \quad a \le a_1 < \dots < a_m \le b \tag{6}$$

$(k_1 + \dots + k_m = n - r$, $a = \min\{c_1, a_1\}$, $b = \max\{c_r, a_m\}$, при $m = 0$ условия (6) отсутствуют и $r = n)$ определяется неравенством

$$K(x,s) = G(x,s)\sigma(s)/\omega(x) > 0 \ \text{ в } \ [a,b] \times ((a,b) \setminus \{c_j\}_1^r), \tag{7}$$

где $\omega(x) = (x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_m)^{k_m}$ при $r < n$ и $\omega(x) \equiv 1$ при $r = n$, а $\sigma(x) = \operatorname{sign}((l_{\nu+1} - l_\nu)(x - c_1) \dots (x - c_r))$ в интервале между c_{l_ν} и $c_{l_{\nu+1}}$, $\nu = \overline{0,r}$, $l_0 = 0$, $l_{r+1} = r + 1$, $c_0 = a$, $c_{r+1} = b$. Кроме того, оказалось [5], [6], что если при этом

$$l_\nu = \nu, \quad \nu = \overline{1,r}, \tag{8}$$

то $K(x,s)$, доопределенная при $s=c_j$, $j=\overline{1,r}$, по непрерывности с одной из сторон, является осцилляционным ядром. Однако примеры показывают, что при условиях (1)–(3), но при невыполнении (8), ядро (7) может быть не только осцилляционным, но даже и знакорегулярным. Таково ядро (7) для задачи

$$y'''-y'=0,\quad y''(c_1)-y'(c_1)=0,\quad y''(c_2)+y'(c_2)=0,\quad y''(c_3)-y(c_3)=0,$$

где c_1, c_2, c_3 — корни многочленов $5x^4-20x^3-15x^2+30x+4$, $5x^4+20x^3-15x^2-30x+4$ и x^5-25x^3+34x соответственно, $-1{,}327<c_1<-1{,}326$; $0{,}126<c_2<0{,}127$; $1{,}201<c_3<1{,}202$. Другой пример приведен в [6].

В данной статье выявляется случай, когда при условиях (1)–(3) и невыполнении (8) ядро (7) знакорегулярно, а именно, доказывается, что таков случай, когда

$$j_q=q+1,\quad j_{q+1}=q, \tag{9}$$

$$c_j=a,\quad j=\overline{1,q},\quad c_j=b,\quad j=\overline{q+1,r}, \tag{10}$$

т. е. условия (5) имеют вид

$$l_{ja}y=0,\quad j=\overline{1,q},\quad l_{jb}y=0, j=\overline{q+1,r},\quad 1\le q\le r-1,\quad r\ge 2. \tag{11}$$

Так как все интервалы (c_j,c_{j+1}), $j=\overline{0,q-1}$ и $j=\overline{q+1,r}$ пусты, то перестановки множеств $\{1,\dots,q-1\}$ и $\{q+2,\dots,r\}$ не меняют свойств задачи (4), (6), (11) и поэтому в случае (3), (9) можно перенумеровать краевые условия $l_{ja}y=0$, $j=\overline{1,q-1}$, $l_{jb}y=0$, $j=\overline{q+2,r}$, так, чтобы неравенства (3) были выполнены для

$$(j_1,\dots,j_r)=(1,\dots,q-1,q+1,q,q+2,\dots,r). \tag{12}$$

В дальнейшем будем считать, что такая перенумерация произведена.

1. Нулевым местом или отдельным нулем непрерывной функции $u(x)$ называется всякая компонента связности множества ее нулевых точек. Нулевое место $[c,d]\subset(a,b)$ называется узлом (пучностью), если $u(c-\varepsilon)u(d+\varepsilon)<0$ (>0) для всех достаточно малых $\varepsilon>0$ [1], [2]. Следуя [7], k-кратностью изолированного нуля x_0 функции $u(x)$ назовем число $r_k(u,x_0)=\max\{i\le k: u(x)=o(|x-x_0|^{i-1})\}$, а для нулевого места Ω другого типа положим $r_k(u,\Omega)=k$. Пусть $r_k(u,\mathcal{J})$ — сумма k-кратностей нулевых мест $u(x)$ в промежутке $\mathcal{J}$, $r_k(u)=r_k(u,[a,b])$; $\varphi(u)$ — число нулей $u(x)$ на $[a,b]$ с учетом обычной кратности; для измеримой функции $u(x)$ $S(u,\mathcal{J})$ — число перемен знака на $\mathcal{J}$ [1], [7], $S(u)=S(u,[a,b])$; $\operatorname{sign}_1 u=\operatorname{sign}u(x)$ $(\operatorname{sign}_2 u=\operatorname{sign}u(x))$ на $\mathcal{J}_0\subset[a,c]$, $\operatorname{mes}\mathcal{J}_0=c-a$ ($\mathcal{J}_0\subset[c,b]$, $\operatorname{mes}\mathcal{J}_0=b-c$), а $c\in(a,b)$ таково, что $u(x)$ не имеет перемен знака и $u(x)\not\sim 0$ на (a,c) ((c,b)) [1]; $C^k\mathcal{J}$ ($\widetilde{C}^k\mathcal{J}$) — множество вещественных функций, имеющих в $\mathcal{J}$ непрерывную (абсолютно непрерывную) k-ю производную, $\widetilde{C}^{-1}\mathcal{J}$ — множество суммируемых в $\mathcal{J}$ функций; $C_*[a,b]$ — множество непрерывных в $[a,b]$ функций, обладающих только изолированными нулями; $\delta[a,b]$ — множество обобщенных функций вида

$$u(x)=\sum_{i=1}^{k}A_i\delta(x-s_i),\quad a<s_1<\dots<s_k<b,\quad A_i\ne 0,\quad i=\overline{1,k},\quad k=1,2,\dots \tag{13}$$

($\delta(x)$ — дельта-функция), для которых $S(u)$ будем понимать как число перемен знака в ряду коэффициентов $A_1,\dots,A_k$, а $\operatorname{sign}_1 u=\operatorname{sign}A_1$, $\operatorname{sign}_2 u=\operatorname{sign}A_k$; $B(i_1\dots i_\mu)=B\left(\begin{smallmatrix} i_1 & \dots & i_\mu\\ 1 & \dots & \mu\end{smallmatrix}\right)$ — миноры матрицы B;

$$D(j_1\dots j_{\mu+1})=\frac{B(j_1\dots j_{\mu-1})B(j_1\dots j_{\mu+1})}{B(j_1\dots j_\mu)B(j_1\dots j_{\mu-1}j_{\mu+1})},\quad \mu=\overline{2,r-1},\quad D(j_1j_2)=B(j_1j_2); \tag{14}$$

I — единичный оператор; $T_n^k(a,b)$ — класс таких линейных дифференциальных операторов L n-го порядка с коэффициентами из $\widetilde{C}^{k-1}[a,b]$, что $\varphi(y)\le n-1$ для любого решения $y(x)\not\equiv 0$ уравнения $Ly=0$, $T_0^k(a,b)=\{I\}$; $\overline{\mathcal{J}}$ — замыкание $\mathcal{J}$; при $\mu=0$ будем полагать $(j_\nu,\dots,j_{\nu+\mu-1})=\emptyset$, так что, например, при $i_0 = r$ имеет место $(1, \dots, i_0 - 1, i_0 + 1, \dots, r) = (1, \dots, r-1)$, а при $i_0 = 1$ имеет место $(1, \dots, i_0 - 1, i_0 + 1, \dots, r) = (2, \dots, r)$.

В силу теорем 1 и 2 работы [8] при условии

$$L \in T_n(B; a, b; a, b) \tag{15}$$

для каждой перестановки $(j_1, \dots, j_r)$ множества $\{1, 2, \dots, r\}$ оператор L допускает в $[a, b]$ разложения

$$L_{n-\mu}^{j_1 \dots j_\mu} = \left(\frac{d}{dx} - \alpha_{j_1 \dots j_{\mu+1}}(x) I\right) L_{n-\mu-1}^{j_1 \dots j_{\mu+1}}, \quad \mu = \overline{0, r-1}, \tag{16}$$

где $L_{n-\mu}^{j_1 \dots j_\mu} = L$ при $\mu = 0$, $L_{n-\mu}^{j_1 \dots j_\mu}$ не зависит от порядка индексов $j_1, \dots, j_\mu$, $\mu = \overline{1, r}$,

$$L_{n-r} = L_{n-r}^{j_1 \dots j_r} \in T_{n-r}^r(a, b), \tag{17}$$

$$(L_{n-1}^j y)(c_j) = l_{jc_j} y \quad \forall y \in C^{n-1}[a, b], \quad j = \overline{1, r}, \tag{18}$$

$\alpha_{j_1 \dots j_\mu}(x)$ не зависят от порядка индексов $j_1, \dots, j_{\mu-1}$, $\mu = \overline{2, r}$,

$$\alpha_{j_1 \dots j_\mu}(x) \in \widetilde{C}^{\mu-2}[a, b], \quad \mu = \overline{1, r},$$

$$(\alpha_{j_1 \dots j_{\mu+1}}(x) - \alpha_{j_1 \dots j_{\mu-1} j_{\mu+1} j_\mu}(x)) D(j_1 \dots j_{\mu+1}) > 0 \quad \forall x \in [a, b], \quad \mu = \overline{1, r-1}, \tag{19}$$

а из(17) следует факторизация (см., напр., [9])

$$L_k = \left(\frac{d}{dx} - \beta_k(x) I\right) L_{k-1}, \quad \beta_k(x) \in \widetilde{C}^{n-k-1}[a, b], \quad k = \overline{1, n-r}, \quad L_0 = I. \tag{20}$$

Очевидно, при условии (15) существует функция Грина $G(x, s)$ задачи (4)–(6) $\forall c_j$, $a \le c_1 \le \dots \le c_r \le b$.

Дословным повторением доказательства леммы 1 из [10] с использованием теоремы из [4] может быть доказана

Лемма 1. *При условиях* (1)–(3) *для функции Грина задачи* (4)–(6) $\partial^{k_i} G(a_i, s) / \partial x^{k_i} \ne 0$, $i = \overline{1, m}$, $s \in (a, b) \setminus \{c_j\}_1^r$.

Ниже всюду предполагается, что c_j, $j = \overline{1, r}$, определены равенствами (10). Пусть

$$\Gamma(x, s) = \begin{cases} (-1)^{r-q-1} G(x, s) / \omega(x) & \text{при } x \ne a_i; \\ (-1)^{r-q-1} (\partial^{k_i} G(a_i, s) / \partial x^{k_i}) / \omega^{(k_i)}(a_i) & \text{при } x = a_i, \end{cases} \quad i = \overline{1, m}, \quad a \le x \le b, \quad a < s < b. \tag{21}$$

При $m = 0$ в силу свойств функции Грина $\Gamma(x, s)$ непрерывна в $[a, b] \times (a, b)$ и существуют равномерные конечные пределы $\Gamma(x, a+0)$, $\Gamma(x, b-0)$. При $m \ge 1$ это свойство $\Gamma(x, s)$ доказано в [5], [10]. При $s = a$ $(s = b)$ доопределим $\Gamma(x, s)$ и $G(x, s)$ по непрерывности справа (слева). В силу (7), (21) и леммы 1 при условиях (3), (12), (15)

$$\Gamma(x, s) > 0 \quad \forall (x, s) \in [a, b] \times (a, b). \tag{22}$$

Пусть

$$\Gamma z = \int_a^b \Gamma(\cdot, s) z(s) ds, \quad y(x) = (\Gamma u)(x), \tag{23}$$

$$v(x) = y(x) \omega(x), \quad v_0(x) = v_{j_1 \dots j_r}^0(x) = (L_{n-r} v)(x), \tag{24}$$

$$v_{j_1 \dots j_\mu}^{r-\mu}(x) = \left(\frac{d}{dx} - \alpha_{j_1 \dots j_{\mu+1}}(x) I\right) v_{j_1 \dots j_{\mu+1}}^{r-\mu-1}(x) = (L_{n-\mu}^{j_1 \dots j_\mu} v)(x), \quad \mu = \overline{0, r-1}, \tag{25}$$

так что в силу (16), (20) при $\mu = 0$

$$v_{j_1 \dots j_\mu}^{r-\mu}(x) = v^r(x) = (Lv)(x) = (-1)^{r-q-1} u(x). \tag{26}$$

В силу (25) и свойств операторов $L_{n-\mu}^{j_1\ldots j_\mu}$ функции $v_{j_1\ldots j_\mu}^{r-\mu}(x)$ не зависят от порядка индексов $j_1,\ldots,j_\mu$, $\mu=\overline{1,r}$. Поэтому из (25) следует

$$v_{j_1\ldots j_\mu}^{r-\mu}(x)-v_{j_1\ldots j_{\mu-1}j_{\mu+1}}^{r-\mu}(x)=(\alpha_{j_1\ldots j_{\mu-1}j_{\mu+1}j_\mu}(x)-\alpha_{j_1\ldots j_{\mu+1}}(x))v_{j_1\ldots j_{\mu+1}}^{r-\mu-1}(x),\quad \mu=\overline{1,r-1}. \tag{27}$$

Отметим, что при $u(x)\in C_*[a,b]$ все нули $y(x)$, $v(x)$, $(L_kv)(x)$, $k=\overline{1,n-r}$, $v_{j_1\ldots j_\mu}^{r-\mu}(x)$, $\mu=\overline{1,r}$ в $[a,b]$ могут быть только изолированными [11]. Пусть в этом случае $l=S(v_{j_1\ldots j_\mu}^{r-\mu})$, $\overline{x}_{j_1\ldots j_\mu}^{(k)}$, $k=\overline{0,l-1}$, — узлы $v_{j_1\ldots j_\mu}^{r-\mu}(x)$ в (a,b), занумерованные в порядке убывания, $\overline{x}_{j_1\ldots j_\mu}=\overline{x}_{j_1\ldots j_\mu}^{(0)}$, $\underline{x}_{j_1\ldots j_\mu}=\overline{x}_{j_1\ldots j_\mu}^{(l-1)}$. При $\mu=0$ $\overline{x}_{j_1\ldots j_\mu}^{(k)}=\overline{x}^{(k)}$, $k=\overline{0,l-1}$, и $\overline{x}^{(0)}=\overline{x}$, $\overline{x}^{(l-1)}=\underline{x}$ будем понимать как узлы $u(x)$ в (a,b).

В силу (11), (18), (21), (23)–(25), (27)

$$v_{\nu\ldots\nu+\mu-1}^{r-\mu}(a)=0,\ \ \nu=\overline{1,q-\mu+1},\qquad \mu=\overline{1,q}, \tag{28}$$

$$v_{\nu\ldots\nu+\mu-1}^{r-\mu}(b)=0,\ \ \nu=\overline{q+1,r-\mu+1},\ \ \mu=\overline{1,r-q}. \tag{29}$$

Если

$$u(x)\in C_*[a,b], \tag{30}$$

$$S(u)=p, \tag{31}$$

$$\operatorname{sign}_1 u=\gamma, \tag{32}$$

то в силу (25), (26), (28), (29), (32)

$$(-1)^{r-q-1}\gamma v_\nu^{r-1}(x)>0,\quad a<x\le\underline{x},\quad \nu=\overline{1,q},\quad (-1)^{r+p-q}\gamma v_\nu^{r-1}(x)>0, \\ \overline{x}\le x<b,\quad \nu=\overline{q+1,r}, \tag{33}$$

откуда по индукции

$$(-1)^{r-q-1}\gamma v_{\nu\ldots\nu+\mu-1}^{r-\mu}(x)>0,\quad a<x\le\underline{x}_{\nu\ldots\nu+\mu-2},\quad \nu=\overline{1,q-\mu+1},\quad \mu=\overline{1,q}, \tag{34}$$

$$(-1)^{r+p-q-\mu-1}\gamma v_{\nu\ldots\nu+\mu-1}^{r-\mu}(x)>0,\quad \overline{x}_{\nu+1\ldots\nu+\mu-1}\le x<b,\quad \nu=\overline{q+1,r-\mu+1},\quad \mu=\overline{1,r-q}. \tag{35}$$

А из (34), (35) в силу (25), (26), (31) и леммы 2 [11]

$$S(v_{\nu\ldots\nu+\mu-1}^{r-\mu})\le r_1(v_{\nu\ldots\nu+\mu-1}^{r-\mu},(a,b])\le S(v_{\nu\ldots\nu+\mu-2}^{r-\mu+1})\le\cdots \\ \cdots\le S(v_\nu^{r-1})\le S(u)\le p,\quad \nu=\overline{1,q-\mu+1},\quad \mu=\overline{1,q}, \tag{36}$$

$$S(v_{\nu\ldots\nu+\mu-1}^{r-\mu})\le r_1(v_{\nu\ldots\nu+\mu-1}^{r-\mu},[a,b))\le S(v_{\nu+1\ldots\nu+\mu-1}^{r-\mu+1})\le\cdots \\ \cdots\le p,\quad \nu=\overline{q+1,r-\mu+1},\quad \mu=\overline{1,r-q}. \tag{37}$$

Лемма 2. *Пусть* $y(x)\in C[a,b]$,

$$v(x)=y(x)\omega(x)\in C^{n-r}[a,b], \tag{38}$$

Тогда при условии (17)

$$r_1(y)\le r_1(L_{n-r}v). \tag{39}$$

И если при этом $y(x)$ *имеет на* $[a,b]$ *нулевое место* $[c,d]\supset[a_1,a_m]$ (*при* $m=1$ $[a_1,a_m]=\{a_1\}$), *а прочие нулевые места* $y(x)$ *суть изолированные простые нули либо* $r=n-1$, *то при* $a<c$, $d<b$

$$r_1(y)\le S(L_{n-r}v,(a,c))+S(L_{n-r}v,(d,b))+1\le r_1(L_{n-r}v,(a,b)), \tag{40}$$

а при $c=a$ $(d=b)$

$$r_1(y,(d,b])\le S(L_{n-r}v)\ \ (r_1(y,[a,c))\le S(L_{n-r}v)), \tag{41}$$

в остальных же случаях при $r < n$

$$r_1(y) \le S(L_{n-r}v). \tag{42}$$

Доказательство. Так как $r_{n-r+1}(v) \ge n-r+r_1(y)$, то в силу леммы 2 [7] $r_1(y) \le r_{n-r+1}(v) - n + r \le r_1(L_{n-r}v)$, т. е. при $m \ge 1$ выполняется (39), а при $m = 0$ имеет место тождество $y(x) \equiv v(x) \equiv (L_{n-r}v)(x)$.

Если при $m \ge 1$ и $r < n-1$ a_1 и a_m не принадлежат одному и тому же нулевому месту Ω функции $y(x)$ или $y(x)$ имеет кратный нуль, отличный от Ω, то $r_{n-r}(v) \ge n-r+r_1(y)$ и $r_1(y) \le r_{n-r}(v)-n+r \le r_1(L_{n-r-1}v)-1$, откуда ввиду (20) и леммы 2 [11] $r_1(y) \le r_1(L_{n-r-1}v)-1 \le S(L_{n-r}v)$, т. е. выполняется (42).

Если $y(x)$ имеет нулевое место $\Omega = [c,d] \supset [a_1, a_m]$ (так что $m \ge 1$, $r < n$), то в силу (20), (38) Ω является также нулевым местом $L_k v$, $k = \overline{0, n-r}$. Так как в силу (20) и обобщенной теоремы Ролля [12] между двумя отдельными нулями $L_{k-1}v$ лежит хотя бы один узел $L_k v$, $k = \overline{1, n-r}$, то в случае $a < c$, $d < b$ $r_1(y) = r_1(v) \le S(L_1 v, (a,c)) + S(L_1 v, (d,b)) + 1 \le r_1(L_1 v, (a,b))$, т. е. при $r = n-1$ и соответственно $m = 1$, $k_1 = 1$ верно (40), а при $r < n-1$ $r_1(L_{k-1}v, (a,b)) \le S(L_k v, (a,c)) + S(L_k v, (d,b)) + 1 \le r_1(L_k v, (a,b))$, $k = \overline{1, n-r}$, откуда следует (40). Если же $a = c$ ($b = d$), то $r_1(y, (d,b]) = r_1(v, (d,b]) \le S(L_1 v) \le r_1(L_1 v, (d,b])$ ($r_1(y, [a,c)) = r_1(v, [a,c)) \le S(L_1 v) \le r_1(L_1 v, [a,c))$), т. е. при $r = n-1$ выполняется (41), а при $r < n-1$ $r_1(L_{k-1}v, (d,b]) \le S(L_k v) \le r_1(L_k v, (d,b])$, $k = \overline{1, n-r}$ ($r_1(L_{k-1}v, [a,c)) \le S(L_k v) \le r_1(L_k v, [a,c))$, $k = \overline{1, n-r}$), откуда следует (41). $\square$

Ниже используется также очевидная

Лемма 3. *Если* $\alpha(x) \in \widetilde{C}^{-1}[c,d]$, $y(x) \in \widetilde{C}^0[c,d]$, $v(x) = y'(x) - \alpha(x)y(x)$, *а* $v(x) \not\sim 0$ *на* $[c,d]$ *и не имеет перемен знака, то* $r_1(y, [c,d]) \le 1$, *и если нулевое место* $y(x)$ *не содержит точек* c *и* d, *то оно является узлом.*

Замечание. Пусть $l_j = l_{ja}$, $j = \overline{1,q}$, $l_j = l_{jb}$, $j = \overline{q+1, r}$. Если

$$y^{(i)}(a_0) = 0 \;\text{ при некотором }\; a_0 \in [a,b], \quad i = \overline{0, h-1}, \quad h \le r-2, \tag{43}$$

то функция $v(x)$ (24) является решением любой из задач

$$Lv = (-1)^{r-q-1}u(x), \tag{44}$$

$$l_j v = 0 \;\; \forall j \in \{1,\dots,r\} \setminus \{j_0, \dots, j_0+l-1\}, \quad 1 \le j_0 \le r-l+1, \quad l \le h, \tag{45}$$

$$v^{(\nu_i)}(a_i) = 0, \quad \nu_i = \overline{0, k_i-1}, \quad i = \overline{0,m}, \quad k_0 = l \;\text{ при }\; a_0 \ne a_i, \quad i = \overline{1,m} \tag{46}$$

$$\begin{gathered}(v^{(\nu_i)}(a_i) = 0, \quad \nu_i = \overline{0, k_i-1}, \quad \forall i \in \{1,\dots,m\} \setminus \{i_0\}, \quad v^{(\nu_{i_0})}(a_{i_0}) = 0, \\ \nu_{i_0} = \overline{0, k_{i_0}+l-1} \;\text{ при }\; a_0 = a_{i_0}, \quad i_0 \in \{1,\dots,m\}).\end{gathered} \tag{47}$$

2. Теорема 1. *При условиях* (3), (12), (15), (30), (31) *для функций* (23), (24)

$$r_1(y) = r_1(\Gamma u) \le p, \tag{48}$$

$$r_1(v_0) \le p. \tag{49}$$

Доказательство. В силу (27) и независимости $v^{r-\mu}_{j_1 \dots j_\mu}(x)$ от порядка индексов $j_1 \dots j_\mu$

$$\begin{aligned} v^1_{1\dots qq+2\dots r}(x) - v^1_{1\dots q-1q+1\dots r}(x) = v^1_{q+2\dots r1\dots q}(x) - v^1_{q+2\dots r1\dots q-1q+1}(x) = \\ = (\alpha_{q+2\dots r1\dots q-1q+1q}(x) - \alpha_{q+2\dots r1\dots q+1}(x))v_0(x),\end{aligned} \tag{50}$$

где в силу (3), (12), (14), (19) и теоремы Фекете

$$\alpha_{q+2\dots r1\dots q-1q+1q}(x) - \alpha_{q+2\dots r1\dots q+1}(x) > 0 \;\; \forall x \in [a,b]. \tag{51}$$

Если $y(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$, то $r_1(y) = 0 \leq p$. Если же $r_1(y) \neq 0$, т. е. выполняется (43), то согласно замечанию $v(x) = y(x)w(x)$ является решением любой из задач (44)–(46) или (44), (45), (47) при $l = 1$.

В доказательстве леммы 7 [11] краевые условия (6) не используются, так что она верна для любого $m \geq 0$. В силу ее следствия при $j_0 = q+1$ ($j_0 = q$), $q < r-1$ ($q > 1$) $r_1(v^1_{1\ldots qq+2\ldots r}) \leq p$ ($r_1(v^1_{1\ldots q-1q+1\ldots r}) \leq p$), а при $j_0 = q+1 = r$ ($j_0 = q = 1$) в силу (36), (37) $r_1(v^1_{1\ldots r-1}, (a,b]) \leq p$ ($r_1(v^1_{2\ldots r}, [a,b)) \leq p$).

Если $S(v^1_{1\ldots qq+2\ldots r}) < p$ или $S(v^1_{1\ldots q-1q+1\ldots r}) < p$, то в силу (25) и леммы 2 [11] выполняется (49). Если же

$$S(v^1_{1\ldots qq+2\ldots r}) = S(v^1_{1\ldots q-1q+1\ldots r}) = p, \tag{52}$$

то в силу (32) и следствия леммы 7 [11] при $1 < q < r-1$ или (35) ((34)) при $q = 1$ ($q = r-1$)

$$(-1)^p \gamma v^1_{1\ldots qq+2\ldots r}(b) > 0, \quad \operatorname{sign}_2 v^1_{1\ldots q-1q+1\ldots r} = (-1)^{p-1}\gamma, \tag{53}$$

откуда ввиду (50), (51) $(-1)^p \gamma v_0(b) > 0$, значит, в силу (25), (53) $(-1)^p \gamma v_0(x) > 0$, $\overline{x}_{1\ldots q-1q+1\ldots r} \leq x \leq b$, что согласно (25), (52) и лемме (2) [11] снова влечет (49).

При $m = 0$, $r = n$ $L_{n-r} = L_0 = I$, $\omega(x) \equiv 1$, $v_0(x) \equiv v(x) \equiv y(x)$, так что (48) следует из (49). А при $m \geq 1$ в силу (49) и леммы 2 $r_1(y) = r_1(\Gamma u) \leq r_1(L_{n-r}v) = r_1(v_0) \leq p$. $\square$

Теорема 2. *Если выполнены условия* (3), (12), (15), (30), (32) *и*

$$S(y) = S(\Gamma u) = S(u) = p, \tag{54}$$

то при $p \neq 0$

$$\operatorname{sign}_1 v_0 = \operatorname{sign}_1 y = -\operatorname{sign}_1 u = -\gamma, \tag{55}$$

а при $p = 0$

$$\operatorname{sign}_1 y = \operatorname{sign}_1 u = \gamma. \tag{56}$$

Доказательство. Пусть (54) выполнено при $p \neq 0$. В силу леммы 2 и теоремы 1 $p = S(y) \leq r_1(y) \leq r_1(L_{n-r}v) = r_1(v_0) \leq p$, откуда

$$r_1(v_0) = r_1(y) = S(y) = p \neq 0, \tag{57}$$

значит, все нули $y(x)$ узловые и $y(a) \neq 0$, $y(b) \neq 0$.

Пусть $m = 1$, $y(a_1) = 0$, $S(v_0) \neq r_1(v_0)$, т. е.

$$S(v_0) < r_1(v_0), \tag{58}$$

и все нули $y(x)$, отличные от a_1, простые либо $r = n-1$. Тогда $a < a_1 < b$,

$$v(x) = y(x)(x-a_1)^{n-r}, \tag{59}$$

а в силу (57) и леммы 2

$$S(v_0, (a, a_1)) + S(v_0, (a_1, b)) + 1 = r_1(v_0, (a,b)) = r_1(v_0) = p, \tag{60}$$

так что, в частности,

$$v_0(a) \neq 0, \quad v_0(b) \neq 0. \tag{61}$$

Так как в силу (59) $r_{n-r+1}(v, a_1) = n-r+1$, то $(L_k v)(a_1) = 0$, $k = \overline{0, n-r}$, значит, $v_0(a_1) = 0$. Поэтому (58) возможно в силу (60) лишь, если a_1 — пучность $v_0(x)$, значит, в силу (20), (24) $\exists C \neq 0$, $\exists \varepsilon > 0 : (-1)^{n-r-k} C L_k v > 0$, $a_1 - \varepsilon < x < a_1$, $C L_k v > 0$, $a_1 < x < a_1 + \varepsilon$, $k = \overline{0, n-r}$, откуда

$$(-1)^{n-r} C v(x) > 0, \quad a_1 - \varepsilon < x < a_1, \quad C v(x) > 0, \quad a_1 < x < a_1 + \varepsilon. \tag{62}$$

Но a_1 — узел $y(x)$, так что (62) невозможно в силу (59). Значит, в случае (54) при $m \geq 1$ либо $S(v_0) = r_1(v_0)$ и тогда в силу (57)

$$r_1(y) = S(y) = S(v_0) = r_1(v_0) = p, \tag{63}$$

либо $m \geq 2$, либо $y(a_1) \neq 0$, либо $y(x)$ имеет кратный нуль, отличный от a_1, либо $r \neq n-1$. В последних случаях в силу (24), (54), леммы 2 и теоремы 1 $p = S(y) \leq r_1(y) \leq S(L_{n-r}v) = S(v_0) \leq r_1(v_0) \leq p$. Таким образом, при $m \neq 0$ из (54) всегда следует (63). А тогда буквальное повторение выкладок из ([11], с. 23) приводит к равенству

$$\operatorname{sign}_1 y = \operatorname{sign}_1 v_0. \tag{64}$$

При $m = 0$ (64) следует из равенства $y(x) \equiv v_0(x)$.

Пусть $r = 2$, $q = 1$. В силу (33), (29)

$$v_2^{r-1}(b) = 0, \quad (-1)^p \gamma v_2^{r-1}(x) < 0, \quad \overline{x} \leq x < b, \tag{65}$$

так что

$$\overline{x}_2 < \overline{x}. \tag{66}$$

В силу (27)

$$v_1^{r-1}(x) - v_2^{r-1}(x) = (\alpha_{21}(x) - \alpha_{12}(x))v_0(x). \tag{67}$$

Если

$$\operatorname{sign}_1 v_0 = \gamma, \tag{68}$$

то в силу (63) и следующих из него неравенств (61)

$$(-1)^p \gamma v_0(b) > 0, \tag{69}$$

откуда ввиду (25), (65)

$$(-1)^p \gamma v_0(x) > 0, \quad \overline{x}_2 \leq x \leq b, \tag{70}$$

т. е.

$$\overline{x}_{12} < \overline{x}_2. \tag{71}$$

Из (69) в силу (3), (12), (14), (19), (65), (67)

$$(-1)^p \gamma v_1^{r-1}(b) > (-1)^p \gamma v_2^{r-1}(b) = 0. \tag{72}$$

Если $\overline{x}_1 < \overline{x}$, то ввиду (31), (32), (72) $\overline{x}_1 < \overline{x}^{(1)}$, т. е. в силу (25), (31), (33) и леммы 2 [11] $S(v_1^{r-1}) \leq S(u) - 2 \leq p - 2$, $r_1(v_0) \leq S(v_1^{r-1}) + 1 \leq p - 1$, что противоречит (63). Значит,

$$\overline{x} \leq \overline{x}_1. \tag{73}$$

Если $\overline{x}_2 \geq \overline{x}_1^{(1)}$, то ввиду (66), (73) $\overline{x}_1^{(1)} \leq \overline{x}_2 < \overline{x}_1$, так что в силу (3), (12), (14), (19), (67), (72) $(-1)^p \gamma v_0(\overline{x}_2) \leq 0$, что противоречит (70). Поэтому $\overline{x}_2 < \overline{x}_1^{(1)}$, т. е. в силу (25), (36), (71) и леммы 2 [11] $r_1(v_0) \leq S(v_1^{r-1}) - 1 \leq p - 1$, что противоречит (63).

Итак, в случае (54) при $p \neq 0$, $r = 2$, $q = 1$ равенство (68) невозможно, т. е.

$$\operatorname{sign}_1 v_0 = -\gamma, \tag{74}$$

откуда в силу (64) следует (55). Таким образом, при $r = 2$, $p \neq 0$ теорема верна. Предположим, что при $p \neq 0$ она верна $\forall r \leq r_0$, $r_0 \geq 2$.

Пусть $r = r_0 + 1$. В силу (54) выполняется (43), т. е. $v(x)$ является решением любой из задач (44)–(46) или (44), (45), (47), в которых $l = 1$, число краевых условий (45) равно $r_0 = r - 1$, роль оператора L_{n-r} играет $L_{n-r_0} = L^{1\ldots j_0-1j_0+1\ldots r}_{n-r+1}$, функция $v_0(x)$ (24) заменяется функцией $\widetilde{v_0}(x) = v^1_{1\ldots j_0-1j_0+1\ldots r}(x)$, а уравнение (44) принимает вид $Lv = (-1)^{r_0-q-1}\widetilde{u}(x)$, где $\widetilde{u}(x) \equiv -u(x)$.

При $q+1 \le j_0 \le r$ $(1 \le j_0 \le q)$ число краевых условий (45) в точке a равно $q_0 = q$ $(q_0 = q-1)$, а в точке b равно $r-q-1 = r_0-q_0$ $(r-q = r_0-q_0)$ и в силу (3), (12), (15), (30), (32) и индуктивного предположения

$$\operatorname{sign}_1 \widetilde{v}_0 = \operatorname{sign}_1 \widetilde{v}^1_{1\ldots j_0-1j_0+1\ldots r} = -\operatorname{sign}_1 \widetilde{u} = \operatorname{sign}_1 u = \gamma \ \ \forall j_0, \ \ q+1 < j_0 \le r, \ \ q < r-1 \tag{75}$$

$$(\operatorname{sign}_1 \widetilde{v}_0 = \operatorname{sign}_1 v^1_{1\ldots j_0-1j_0+1\ldots r} = -\operatorname{sign}_1 u = -\gamma \ \ \forall j_0, \ \ 1 \le j_0 < q, \ \ q > 1). \tag{76}$$

А при $q = r-1$, $j_0 = r$ $(q = j_0 = 1)$ в силу (34) ((35)) для $\mu = q$ $(\mu = r-q)$

$$\operatorname{sign}_1 \widetilde{v}_0 = \operatorname{sign}_1 v^1_{1\ldots r-1} = \gamma \quad (\operatorname{sign}_2 \widetilde{v}_0 = \operatorname{sign}_2 v^1_{2\ldots r} = (-1)^{p-1}\gamma). \tag{77}$$

Так как в силу леммы 2 [11] при $S(v^1_{j_1\ldots j_{r-1}}) < p-1$ было бы $S(v_0) < p$, то ввиду (63) $S(v^1_{j_1\ldots j_{r-1}}) \ge p-1$ для любой перестановки $(j_1 \ldots j_r)$ множества $\{1, 2, \ldots, r\}$. Поэтому если при $q = j_0 = 1$ $\ S(\widetilde{v}_0) = S(v^1_{2\ldots r}) < p$, то $S(v^1_{2\ldots r}) = p-1$, но тогда в силу (25), (63) и леммы 2 [11] $\overline{x}_{2\ldots r} \le \overline{x}_{1\ldots r} < b$, а в силу (77) $\ (-1)^p\gamma v_0(b) < 0$, так что ввиду (63) выполняется (74). Если же $S(v^1_{2\ldots r}) = p$, то в силу (77)

$$\operatorname{sign}_1 \widetilde{v}_0 = \operatorname{sign}_1 v^1_{2\ldots r} = -\gamma. \tag{78}$$

В силу (27)

$$v^1_{1\ldots r-1}(x) - v^1_{2\ldots r}(x) = v^1_{2\ldots r-11}(x) - v^1_{2\ldots r}(x) = (\alpha_{2\ldots r1}(x) - \alpha_{2\ldots r-11r}(x))v_0(x), \tag{79}$$

в силу (19)

$$(\alpha_{2\ldots r1}(x) - \alpha_{2\ldots r-11r}(x))D(2\ldots r1) > 0 \ \ \forall x \in [a,b], \tag{80}$$

а в силу (3), (12)

$$D(2\ldots r1) = -\frac{B(2\ldots r-1)B(1\ldots r)}{B(2\ldots r)B(1\ldots r-1)} < 0. \tag{81}$$

Так как $r = r_0+1 > 2$, то из (79)–(81) в силу (75), (77) и (76), (78) следует (74). Значит, ввиду (64) при $r = r_0+1$ выполняется (55). Отсюда по индукции следует справедливость теоремы при $p \ne 0$ $\ \forall r$, $2 \le r \le n$.

Если же $p = 0$, то (56) следует из (22)–(23). $\square$

Обозначим

$$G_{jl}(\cdot, s) = L^{1\ldots j-1j+l\ldots r}_{n-r+l}G(\cdot, s), \ \ \Gamma_{jl}u = \int_a^b G_{jl}(\cdot, s)u(s)ds, \ \ j = \overline{1, r-l}, \ \ l = \overline{0, r-2}. \tag{82}$$

Лемма 4. *При условиях* (3), (12), (15)

$$S(\Gamma u) \le S(u), \ \ S(\Gamma_{10}u) \le S(u) \ \ \forall u(x) \in C[a,b] \cup \delta[a,b], \tag{83}$$

а в случае (43)

$$S(\Gamma_{j_0l}u) \le S(u) \ \ \forall u(x) \in C[a,b] \cup \delta[a,b], \ \ 1 \le j_0 \le r-l, \ \ 0 \le l \le r-2, \tag{84}$$

где l, j_0 определены в (45)–(47).

Доказательство. Согласно замечанию функцию $v(x)$ (см. (23), (24)) можно рассматривать как решение любой из задач (44)–(46) или (44), (45), (47), где роль L_{n-r} и $v_0(x)$ играют $L_{n-r+l}^{1\dots j_0-1j_0+l\dots r}$ и $v_{1\dots j_0-1j_0+l\dots r}^{l}(x)$, причем из условий (3), (12), (15) вытекают аналогичные условия для этих задач, так что к ним применима теорема 1. (При $r_1(y)=0$ полагаем $l=0$, $j_0=1$, а упомянутые задачи совпадают с (6), (11), (44).)

В силу (21), (23)–(25), (82)

$$v_{1\dots j_0-1j_0+l\dots r}^{l}(\cdot)=(L_{n-r+l}^{1\dots j_0-1j_0+l\dots r}v)(\cdot)=(-1)^{r-q-1}\int_a^b G_{j_0l}(\cdot,s)u(s)ds=(-1)^{r-q-1}(\Gamma_{j_0l}u)(\cdot). \quad (85)$$

В [10] показано, что $G_{jl}(x,s)$ — функция Грина краевой задачи вида (4), (6), (11) при $m=0$, следовательно, может быть доопределена до непрерывной в $[a,b]\times[a,b]$. Непрерывность $\Gamma(x,s)$ отмечена выше. Поэтому в силу (23), (85) любая функция $u(x)\in C[a,b]\cup\delta[a,b]$ может быть аппроксимирована такими функциями $u_n(x)\in C_*[a,b]$, что $S(u_n)\le S(u)\quad \forall n\in N$ и Γu_n $(\Gamma_{j_0l}u_n)$ равномерно сходится к Γu $(\Gamma_{j_0l}u)$, так что $\exists n_0: S(\Gamma u_n)\ge S(\Gamma u)$, $S(\Gamma_{j_0l}u_n)\ge S(\Gamma_{j_0l}u)\quad\forall n>n_0$. Отсюда в силу теоремы 1 $S(\Gamma u)\le S(\Gamma u_n)\le r_1(\Gamma u_n)\le S(u_n)\le S(u)$, $S(\Gamma_{j_0l}u)\le S(\Gamma_{j_0l}u_n)\le r_1(\Gamma_{j_0l}u_n)\le S(u_n)\le S(u)$, $1\le j_0\le r-l$, $0\le l\le r-2$.

Следствие. При условиях (3), (12), (15) $\Gamma(x,s)$ — знакорегулярное в $[a,b]\times(a,b)$ ядро.

Доказательство в силу (83) следует из теоремы 2 [1].

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* (3), (12), (15). *Если* $y(x)=(\Gamma u)(x)$ *имеет на* $[a,b]$ *нулевое место* $[a,d]\supset[a_1,a_m]$ $([c,b]\supset[a_1,a_m])$, *а прочие нулевые места* $y(x)$ *суть изолированные простые нули либо* $r\ge n-1$, *то*

$$r_1(\Gamma u,(d,b])\le S(u) \quad (86)$$

$$(\textit{соотв. } r_1(\Gamma u,[a,c))\le S(u)), \quad (87)$$

в остальных же случаях

$$r_1(\Gamma u)\le S(u)=p\quad \forall u(x)\in C[a,b]\cup\delta[a,b]. \quad (88)$$

Доказательство. Пусть $[a_1,a_m]\subset\Omega=[c,d]\subset[a,b]$ (значит, $r<n$), где Ω — нулевое место $y(x)$, а прочие нули $y(x)$ изолированные простые или $r=n-1$. В силу (24) $k_0=r_{n-1}(v,\Omega)>n-r$. Так как $v(x)\in C^l[a,b]$, $l\ge n-2$, $k_0\le n-1$ и $r\ge 2$, то в силу (20) Ω — также нулевое место L_kv, $k=\overline{0,n-r}$ и $L_k^{j_1\dots j_{n-k}}v$, $k=\overline{n-r,k_0-1}$.

Если $a<c$, $d<b$ и Ω — узел $L_{n-r}v$, то $S(L_{n-r}v,(a,c))+S(L_{n-r}v,(d,b))+1=S(L_{n-r}v)$, откуда в силу (40), (83) $r_1(y)\le S(L_{n-r}v)=S(\Gamma_{10}u)<S(u)$, т.е. выполняется (88). Если при этом Ω — пучность $L_{n-r}v$, то в силу (25) $L_{n-r+1}^{j_1\dots j_{r-1}}v$ для любой перестановки $(j_1,\dots,j_r)$ множества $\{1,2,\dots,r\}$ меняет знак при переходе через Ω, и поэтому в силу леммы 2 [11] $r_1(L_{n-r}v)\le S(L_{n-r+1}^{j_1\dots j_{r-1}}v,(a,c))+S(L_{n-r+1}^{j_1\dots j_{r-1}}v,(d,b))+1=S(L_{n-r+1}^{j_1\dots j_{r-1}}v)$, откуда в силу (39), (85) и свойств $L_{n-\mu}^{j_1\dots j_\mu}$, $\mu=\overline{0,r}$,

$$r_1(\Gamma u)\le r_1(L_{n-r}v)\le S(L_{n-r+1}^{j_1\dots j_{r-1}}v)=S(L_{n-r+1}^{1\dots j-1j+1\dots r}v)=S(\Gamma_{j1}u) \quad (89)$$
$$\exists j,\quad \max\{2,q\}\le j\le\min\{q+1,r-1\}.$$

Из (89) в силу (84) при $r>2$ снова следует (88). А при $r=2$

$$L_{n-r+1}^{j_1\dots j_{r-1}}v=L_{n-1}^{j_1}v=v_{j_1}^{r-1}(\cdot)=v_{j_1}^{1}(\cdot). \quad (90)$$

Но в силу (11), (18), (25), (26)

$$(v_j^{r-1})'-\alpha_j(x)v_j^{r-1}=(-1)^{r-q-1}u(x),\quad v_j^{r-1}(a)=0,\quad j=\overline{1,q},\quad v_j^{r-1}(b)=0,\quad j=\overline{q+1,r}, \quad (91)$$

откуда при $\gamma_0=(-1)^{r-q-1}\gamma$

$$\gamma_0v_j^{r-1}(x)>0\ \ \forall x\in(a,\underline{x}],\quad j=\overline{1,q},\quad (-1)^p\gamma_0v_j^{r-1}(x)<0\ \ \forall x\in[\overline{x},b),\quad j=\overline{q+1,r}, \quad (92)$$

т. е.

$$S(L_{n-1}^{j}v)=S(v_j^{r-1})\le S(u),\quad j=\overline{1,r}, \tag{93}$$

так что в силу (89), (90) и при $r=2$ выполняется (88).

Пусть теперь $c=a$. Так как Ω — нулевое место $L_k^{j_1\ldots j_{n-k}}v$, $k=\overline{n-r,k_0-1}$, то в силу (25) $\exists B_\mu : S(v_{j_1\ldots j_{\mu-1}}^{r-\mu+1},(a,\widetilde{x}_{j_1\ldots j_{\mu-1}}))=0$, $d<\widetilde{x}_{j_1\ldots j_{\mu-1}} \Rightarrow B_\mu v_{j_1\ldots j_\mu}^{r-\mu}(x)>0$, $d<x\le \widetilde{x}_{j_1\ldots j_{\mu-1}}$, откуда $r_1(L_{n-\mu}^{j_1\ldots j_\mu}v,(d,b])=r_1(v_{j_1\ldots j_\mu}^{r-\mu},(d,b])\le S(L_{n-\mu+1}^{j_1\ldots j_{\mu-1}}v)\le r_1(L_{n-\mu+1}^{j_1\ldots j_{\mu-1}}v,(d,b])$, $\mu=\overline{n-k_0+1,r}$, так что в силу (41)

$$r_1(\Gamma u,(d,b])\le S(L_{n-r}v)\le r_1(L_{n-r}v,(d,b])\le S(L_{k_0}^{j_1\ldots j_{n-k_0}}v). \tag{94}$$

При $k_0<n-1$ из (94) для $l=k_0-n+r$, $\max\{2,q-l+1\}\le j\le \min\{q+1,r-l\}$ в силу (84), (85) $r_1(\Gamma u,(d,b])\le S(L_{k_0}^{1\ldots j-1j+l\ldots r}v)=S(\Gamma_{jl}u)\le S(u))$, т. е. выполняется (86). При $k_0=n-1$ имеем $L_{k_0}^{j_1\ldots j_{n-k_0}}v=L_{n-1}^{j_1}v=v_{j_1}^{r-1}(\cdot)\quad \forall j_1\in\{1,2,\ldots,r\}$, так что из (94) в силу (93) снова следует (86).

Аналогичным образом при $d=b$ доказывается (87).

Далее, пусть $r=n$, т. е.

$$m=0,\quad w(x)\equiv 1,\quad y(x)\equiv v(x)\equiv v_0(x),\quad L_{n-r}=L_0=I. \tag{95}$$

При $S(u)=0$, $u(x)\not\equiv 0$ в силу (22), (23) $r_1(\Gamma u)=0$, т. е. для $r_1(\Gamma u)=0$ и $r_1(\Gamma u)=1$ выполняется (88).

Пусть $r_1(\Gamma u)\ge 2$. Если все нули $y=\Gamma u$ узловые, то в силу (83) $r_1(\Gamma u)=S(\Gamma u)\le S(u)$, т. е. опять справедливо (88).

Пусть $n>2$ и Ω — неузловое нулевое место $y(x)$, $a_0\in\Omega$. Так как $v(x)\equiv y(x)\in C^{n-2}[a,b]$, то функция $y_1(x)=y(x)/(x-a_0)$ может быть доопределена до непрерывной на $[a,b]$, причем

$$r_1(y_1,(d,b])=r_1(y,(d,b]),\quad r_1(y_1,[a,c))=r_1(y,[a,c)). \tag{96}$$

Поскольку

$$v(a_0)=0, \tag{97}$$

то для $v(x)$ как решения задачи (44), (45), (97) при $l=1$ $\max\{2,q\}\le j_0\le \min\{q+1,r-1\}$, $w_1(x)=x-a_0$, $v(x)=y_1(x)\omega_1(x)$ по доказанному выше при $c=a$ ($d=b$) в силу (23), (96) $r_1(\Gamma u,(d,b])=r_1(y_1,(d,b])\le S(u)$ ($r_1(\Gamma u,[a,c))=r_1(y_1,[a,c))\le S(u)$), т. е. выполняются (86), ((87)), а при $a<c$, $d<b$, когда Ω есть пучность $y(x)$, $r_2(y,a_0)=2$, $y_1(a_0)=0$, $r_1(y)=r_1(y_1)\le S(u)$, т. е. выполняется (88).

Наконец, при $n=r=2$ (так что $q=1$) в случае $S(L_{n-1}^{j}v)=S(L_1^{j}v)<S(u)=p$, $j=1$ ($j=2$), в силу (95) и леммы 2 [11] $r_1(\Gamma u)=r_1(y)=r_1(L_0v)\le S(L_1^{j}v)+1\le S(u)$, $j=1$ ($j=2$), т. е. выполняется (88), при $S(L_{n-1}^{j}v)=S(L_1^{j}v)\ge p$, $j=1,2$ в силу (3), (12), (19), (25), (67), (92), (93) и леммы 3 $S(v_j^{r-1})=p$, $j=1,2$, $(-1)^p\gamma_0v_1^{r-1}(b)>0$, $\gamma_0v_2^{r-1}(a)<0$, $\gamma_0v_0(a)>0$, $\gamma_0v_0(x)>0$ $\forall x\in[a,\underline{x}_1]$, где $\underline{x}_1$ — sup первого узла $v_1^{r-1}(x)$ в $(a,b]$. Значит, $r_1(\Gamma u)=r_1(v_0)\le S(v_1^{r-1})=p$, т. е. тоже выполняется (88).

Во всех остальных случаях, кроме перечисленных, (88) следует из (42) и (83). $\square$

На основе леммы 5, почти буквально повторяя доказательство леммы 10 из [10] (см. также [11]), доказывается

Лемма 6. *При условиях* (3), (12), (15) $\Gamma(x,s)$ — *сильно знакорегулярное в* $[a,b]\times(a,b)$ *ядро.*

Лемма 7. *При условиях* (3), (12), (15) $\forall p=0,1,\ldots\quad \exists u_p(x)\in C_*[a,b] : S(\Gamma u_p)=S(u_p)=p.$

Доказательство. При $p = 0$ достаточно взять $u_0(x) \in C[a,b]$, $u_0(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$. При $p > 0$ в силу леммы 6 система

$$\sum_{j=1}^{p+1} C_j \Gamma(s_i, s_j) = (-1)^{i-1}, \quad i = \overline{1, p+1},$$

имеет единственное решение $(C_1, \ldots, C_{p+1})^T \quad \forall p = 1, 2, \ldots$ Пусть $u_p(x) = \sum\limits_{j=1}^{p+1} C_j \delta(x - s_j)$, так что $\Gamma u_p = \sum\limits_{j=1}^{p+1} C_j \Gamma(\cdot, s_j)$, $S(u_p) \le p \le S(\Gamma u_p)$. Как упоминалось выше, $u_p(x)$ можно аппроксимировать такими функциями $u_{np}(x) \in C_*[a,b]$, что в силу теоремы 1 $p \le S(\Gamma u_p) \le S(\Gamma u_{np}) \le r_1(\Gamma u_{np}) \le S(u_{np}) \le S(u_p) \le p \quad \forall n > n_0$, т. е. $S(\Gamma u_{np}) = S(u_{np}) = p$, $p = 1, 2, \ldots$

3. Теорема 3. *Если $q(x)$ суммируема на $[a,b]$ и $\tilde{q}(x) = (-1)^{r-q} q(x) w(x) > 0$ почти всюду в $[a,b]$, то при условиях* (3), (12), (15)

1) *задача для уравнения $Ly = \lambda q(\cdot) y$ с краевыми условиями* (6), (11) *имеет счетное множество собственных значений λ_k, которые являются вещественными простыми,а при их нумерации в порядке возрастания абсолютных величин и соответствующей нумерации собственных функций $y_k(x)$*

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots ;$$

2) *каждая функция $\Psi_k(x) = y_k(x)/w(x)$ может быть доопределена до непрерывной в $[a,b]$, имеет там ровно $k-1$ нулей, все они узловые и лежат в (a,b), $k = 1, 2, \ldots$, причем нули $\Psi_k(x)$ и $\Psi_{k+1}(x)$ перемежаются, $k = 2, 3, \ldots$;*

3) $\{\Psi_k(x)\}_1^\infty$ *— ряд Маркова в $[a,b]$* [1], [2];

4) *всякая нетривиальная линейная комбинация $\Psi_{kp}(x) = \sum\limits_{i=k}^{p} C_i \Psi_i(x)$, $1 \le k \le p$, имеет в $[a,b]$ не менее $k-1$ узлов и не более $p-1$ нулей, считая пучность за два нуля.*

А если $\tilde{q}(x) \in C[a,b]$, $m \ge 2$, $a_1 = a$, $a_m = b$, то

5) $r_l(\Psi_{kp}) \le p - 1$, *где* $l = \min\limits_{i=\overline{1,m}} (n - r - k_i)$;

6) *нули $\Psi_k(x)$ простые $\forall k = 2, 3, \ldots$*

Доказательство сводится к повторению доказательств теоремы из [5] и теоремы 2 из [11].

Литература

1. Левин А.Ю., Степанов Г.Д. *Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака.* I // Сиб. матем. журн. – 1976. – Т. 17. – № 3. – С. 606–626.
2. Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем.* – 2-е изд. – М.–Л.: Гостехиздат, 1950. – 359 с.
3. Покорный Ю.В., Боровских А.В. *О теореме Келлога для разрывных функций Грина* // Матем. заметки. – 1993. – Т. 53. – № 1. – С. 151–153.
4. Тептин А.Л. *Новый признак знакопостоянства функции Грина* // Дифференц. уравн. – 1988. – Т. 24. – № 6. – С. 1066–1069.
5. Тептин А.Л. *Об осцилляционности спектра одной многоточечной краевой задачи* // Дифференц. уравн. – 1995. – Т. 31. – № 8. – С. 1370–1380.
6. Тептин А.Л. *К вопросу об осцилляционности спектра многоточечной краевой задачи* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 4. – С. 44–53.
7. Покорный Ю.В., Лазарев К.П. *Некоторые осцилляционные теоремы для многоточечных задач* // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т.23. – № 4. – С. 658–670.
8. Тептин А.Л. *О неосцилляции решений и знаке функции Грина* // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20. – № 6. – С. 995–1005.

9. Левин А.Ю. *Неосцилляция решений уравнения* $x^{(n)} + P_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + P_n(t)x = 0$ // УМН. – 1969. – Т. 24. – № 2. – С. 43–96.
10. Тептин А.Л. *Об осцилляционности спектра краевой задачи с функцией Грина, меняющей знак по обоим аргументам* // Ижевск. механ. ин-т. – Ижевск, 1993. – 49 с. – Деп.в ВИНИТИ 12.03.93, № 596-В93.
11. Тептин А.Л. *Об осцилляционности ядра, связанного с функцией Грина одной многоточечной задачи* // Ред. журн. Дифференц. уравн. – Минск, 1989. – 30 с. – Деп.в ВИНИТИ 11.08.89, № 5417-В89.
12. Чичкин Е.С. *Теорема о дифференциальном неравенстве для многоточечных краевых задач* // Изв.вузов. Математика. – 1962. – № 2. – С. 170–179.

Ижевский государственный
технический университет

Поступили
первый вариант 11.09.2001
окончательный вариант 02.12.2004