Известия вузов. Математика
2013, № 9, с. 21–27

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

М.М. ИБРАГИМОВ, К.К. КУДАЙБЕРГЕНОВ

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ L_1-ПРОСТРАНСТВ

Аннотация. Работа посвящена описанию сильно гранево симметричных пространств которые изометрически изоморфны L_1-пространству.

Ключевые слова: грань, булева алгебра, гранево симметричное пространство.

УДК: 598.17

1. Введение

Одной из важных задач теории операторных алгебр является геометрическая характеризация пространств состояний операторных алгебр. В связи с этим в середине 80-х годов прошлого века появилась работа Я. Фридмана и Б. Руссо [1], в которой были введены гранево симметричные пространства, основной целью введения которых является геометрическая характеризация предсопряженных пространств JBW^*-троек, допускающих алгебраическую структуру. Многие из свойств, требуемых в этих характеризациях, являются естественными предположениями для пространств состояний физических систем. Такие пространства рассматриваются как геометрическая модель для состояний квантовой механики. В работе [2] доказано, что предсопряженное пространство для алгебры фон Неймана и более общих JBW^*-троек является нейтральным сильно гранево симметричным пространством.

Проект классификации гранево симметричных пространств был начат в [3], где были даны геометрическая характеризация комплексных гильбертовых пространств и комплексных спин факторов. Было дано описание JBW^*-троек ранга 1 и 2, факторов Картана типа 1 и 4. Позже Я. Фридман и Б. Руссо в работе [4] получили описание атомических гранево симметричных пространств. А именно, было показано, что нейтральное, сильно гранево симметричное пространство линейно изометрично к предсопряженному пространству одного из факторов Картана типа 1–6 при условии, что оно удовлетворяет четырем естественным и физическим аксиомам, которые выполняются в предсопряженных пространствах JBW^*-троек.

М. Нейл и Б. Руссо в [5] нашли геометрические условия, при которых гранево симметричное пространство является изометричным предсопряженному пространству JBW^*-тройки. В частности, было доказано, что всякое нейтральное сильно гранево симметричное пространство разлагается в прямую сумму атомических и не атомических сильно гранево симметричных пространств. В [6] было получено полное описание сильно гранево симметричных пространств, которые изометрически изоморфны к предсопряженному пространству атомичной коммутативной алгебры фон Неймана.

Поступила 27.04.2012

Данная работа посвящена описанию сильно гранево симметричных пространств которые изометрически изоморфны L_1-пространству.

2. Предварительные сведения

Пусть Z — действительное или комплексное нормированное пространство. Элементы $x, y \in Z$ называются *ортогональными,* обозначение $x \diamondsuit y$, если $\|x+y\| = \|x-y\| = \|x\|+\|y\|$. Подмножества $S, T \subset Z$ называются *ортогональными,* обозначение $(S \diamondsuit T)$, если $x \diamondsuit y$ для всех $(x, y) \in S \times T$. Для подмножества S пространства Z положим $S^{\diamondsuit} = \{x \in Z : x \diamondsuit y \ \forall y \in S\}$ и назовем $S^{\diamondsuit}$ *ортогональным дополнением* к S. Выпуклое подмножество F единичного шара $Z_1 = \{x \in Z : \|x\| \leq 1\}$ называется *гранью,* если включение $\lambda y + (1-\lambda) z \in F$, где $y, z \in Z_1$, $\lambda \in (0, 1)$, влечет $y, z \in F$. Грань F единичного шара называется *выставленной по норме,* если $F = F_u = \{x \in Z : u(x) = 1\}$ для некоторого $u \in Z^*$ с $\|u\| = 1$. Элемент $u \in Z^*$ называется *проективной единицей,* если $\|u\| = 1$ и $u(y) = 0$ при всех $y \in F_u^{\diamondsuit}$ (см. [1]).

Определение 1 ([1])**.** Выставленная по норме грань F_u из Z_1 называется *симметричной,* если существует линейная изометрия S_u из Z на Z такая, что $S_u^2 = I$, и множество неподвижных точек которой в точности совпадает с топологической прямой суммой замыкания $\overline{\mathrm{sp}} F_u$ линейной оболочки грани F_u и ее ортогонального дополнения $F_u^{\diamond}$, т. е. совпадает с $(\overline{\mathrm{sp}} F_u) \oplus F_u^{\diamond}$.

Определение 2 ([1])**.** Пространство Z называется *слабо гранево симметричным пространством* (WFS-пространством), если каждая выставленная по норме грань из Z_1 симметрична.

Для каждой симметричной грани F_u определяются сжимающие проекторы $P_k(F_u)$, $k = 0, 1, 2$, на Z следующим образом. Во-первых, $P_1(F_u) = (I - S_u)/2$ является проектором на собственное подпространство соответствующим собственному значению -1 симметрии S_u. Далее определим $P_2(F_u)$ и $P_0(F_u)$ как проекторы из Z на $\overline{\mathrm{sp}} F_u$ и $F_u^{\diamondsuit}$ соответственно, т. е. $P_2(F_u) + P_0(F_u) = (I + S_u)/2$. Проекторы $P_k(F_u)$ называются *геометрическими пирсовскими.*

Проективная единица u из Z^* называется *геометрическим трипотентом,* если F_u является симметричной гранью и $S_u^* u = u$ для симметрии S_u, соответствующей к F_u. Через $\mathcal{GT}$ и $\mathcal{SF}$ обозначим множество всех геометрических трипотентов и симметричных граней соответственно, и соответствие $\mathcal{GT} \ni u \mapsto F_u \in \mathcal{SF}$ является биективным ([7], предложение 1.6). Для каждого геометрического трипотента u из сопряженного WFS-пространства Z пирсовские проекторы обозначим через $P_k(u) = P_k(F_u)$, $k = 0, 1, 2$. Далее, $U = Z^*$, $Z_k(u) = Z_k(F_u) = P_k(u) Z$ и $U_k(u) = U_k(F_u) = P_k(u)^*(U)$ и, следовательно, имеет место разложение Пирса $Z = Z_2(u) + Z_1(u) + Z_0(u)$ и $U = U_2(u) + U_1(u) + U_0(u)$. Трипотенты u и v называются *ортогональными,* если $u \in U_0(v)$ (которое влечет $v \in U_0(u)$) или эквивалентно $u \pm v \in \mathcal{GT}$ ([1], лемма 2.5). Более общо, элементы a и b из U называются *ортогональными,* если один из них принадлежит $U_2(u)$, а другой — $U_0(u)$ для некоторого геометрического трипотента u.

Сжимающий проектор Q на Z называется *нейтральным,* если для каждого $x \in Z$ равенство $\|Qx\| = \|x\|$ влечет $Qx = x$. Пространство Z называется *нейтральным,* если для каждого $u \in \mathcal{GT}$ проектор $P_2(u)$ является нейтральным.

Определение 3 ([1])**.** WFS-пространство Z называется *сильно гранево симметричным* (SFS-пространством), если для каждой выставленной по норме грани F_u из Z_1 и каждого $g \in Z^*$ с $\|g\| = 1$ и $F_u \subset F_g$ выполнено $S_u^* g = g$, где S_u — симметрия, соответствующая F_u.

Содержательными примерами нейтральных сильно гранево симметричных пространств являются гильбертово пространство, предсопряженное пространство к алгебре фон Неймана или JBW^*-алгебре и более общее, предсопряженное пространство к JBW^*-тройкам. Кроме того, геометрическим трипотентам соответствуют ненулевые частичные изометрии в алгебре фон Неймана и трипотенты в JBW^*-тройках [2].

В нейтральном сильно гранево симметричном пространстве Z каждый ненулевой элемент допускает *полярное разложение* ([7], теорема 4.3): для $0 \neq x \in Z$ существует единственный геометрический трипотент $v = v_x$ с $\langle v, x\rangle = \|x\|$ и $\langle v, x^\diamond\rangle = 0$. Если $x, y \in Z$, то $x \diamond y$ в том и только том случае, если $v_x \diamond v_y$ ([1], следствие 1.3(б), лемма 2.1). На множестве геометрических трипотентов отношение порядка вводится следующим образом: для $u, v \in \mathcal{GT}$ положим $u \leq v$, если $F_u \subset F_v$. Отметим, что это определение эквивалентно тому, что $P_2(u)^*v = u$ или $v - u$ либо равно нулю, либо геометрический трипотент ортогонален к u ([7], лемма 4.2).

3. Основной результат

Пусть Z — действительное нейтральное сильно гранево симметричное и $e \in Z^*$ — геометрический трипотент такой, что

$$Z_1 = \mathrm{co}(F_e \cup F_{-e}). \tag{1}$$

Обозначим $\nabla = \{u \in \mathcal{GT} : u \leq e\} \cup \{0\}$. Известно ([7], предложение 4.5), что относительно порядка "$\leq$" множество ∇ является полной ортомодулярной решеткой с ортодополнением $u^\perp = e - u$.

Пример. Пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |t_i|$, $x = (t_i) \in \mathbb{R}^n$ является SFS-пространством. Рассмотрим геометрический трипотент $e = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n \cong (\mathbb{R}^n)^*$. Тогда грань $F_e = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1,\ t_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}\right\}$ удовлетворяет свойству (1). В этом случае $\nabla = \{u = (\varepsilon_i) : \varepsilon_i \in \{0, 1\},\ i \in \overline{1,n}\}$.

Более общо, рассмотрим измеримое пространство (Ω, Σ, μ) с мерой, обладающее свойством прямой суммы, и пространство $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ классов эквивалентности интегрируемых действительных функций на (Ω, Σ, μ). Пространство $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ с нормой $\|f\| = \int\limits_\Omega |f(t)|\, d\mu(t)$, $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, является SFS-пространством.

Рассмотрим геометрический трипотент $e \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu) \cong L_1(\Omega, \Sigma, \mu)^*$, где e – класс, содержащий функцию тождественно равную единице. Тогда грань

$$F_e = \left\{f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu) : f \geq 0,\ \int_\Omega f(t)\, d\mu(t) = 1\right\}$$

удовлетворяет свойству (1). В этом случае $\nabla = \{\widetilde{\chi}_A : A \in \Sigma\}$, где $\widetilde{\chi}_A$ — класс содержащий характеристическую функцию множества $A \in \Sigma$.

Пусть теперь Z — действительное нейтральное сильно гранево симметричное пространство такое, что существует геометрический трипотент $e \in Z^*$, удовлетворяющий свойству (1).

Известно ([6], леммы 1 и 2), что если ∇ является булевой алгеброй, то для любого $u \in \nabla$, $u \neq 0$ имеют место условия

(1) $P_1(u) = 0$;

(2) $P_2(u) = P_0(u^\perp)$;

(3) $P_2(u+v) = P_2(u) + P_2(v)$, где $u\diamondsuit v$.

Основным результатом работы является

Теорема. *Пусть Z — действительное нейтральное сильно гранево симметричное пространство и $e \in Z^*$ — геометрический трипотент, удовлетворяющий равенству* (1). *Если ∇ — булева алгебра, то существует измеримое пространство (Ω, Σ, μ) с мерой, обладающее свойством прямой суммы такое, что пространство Z изометрически изоморфно пространству $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$.*

Для доказательства теоремы нам необходимо десять лемм.

Пусть $u, v \in \mathcal{GT}$. Если $F_u \cap F_v \neq \varnothing$, то через $u \wedge v$ обозначим такой геометрический трипотент, что $F_{u\wedge v} = F_u \cap F_v$, а в противном случае положим $u \wedge v = 0$.

Пусть $u, v \in \nabla$. Ясно, из $u\diamondsuit v$ следует $u \wedge v = 0$.

Пусть теперь $u \wedge v = 0$. Так как ∇ – булева алгебра, то $u \leq e - v$. Поэтому $u\diamondsuit v$, так как $v\diamondsuit(e-v)$.

Таким образом, имеет место

Лемма 1. *Пусть $u, v \in \nabla$. Тогда $u \wedge v = 0 \Longleftrightarrow u\diamondsuit v$.*

Лемма 2. *Пусть $v \in \mathcal{GT}$. Тогда $F_v \cap F_e \neq \varnothing$ или $F_{-v} \cap F_e \neq \varnothing$.*

Доказательство. Покажем, что для всякого $v \in \mathcal{GT}$ имеет место $F_v \cap F_e \neq \varnothing$ или $F_{-v} \cap F_e \neq \varnothing$. Пусть $f \in F_v$. Тогда из равенства (1) получим $f = tg + (1-t)h$, где $g \in F_e$, $h \in F_{-e}$, $0 \leq t \leq 1$.

Если $t = 1$, то $f = g$, и поэтому $f = g \in F_v \cap F_e$.

Если $t = 0$, то $f = h$, и поэтому $-f \in F_{-v} \cap F_e$.

Пусть теперь $0 < t < 1$. Так как F_v — грань, то $g, h \in F_v$. Поэтому $F_v \cap F_e \neq \varnothing$ и $F_{-v} \cap F_e \neq \varnothing$. Таким образом, $F_v \cap F_e \neq \varnothing$ или $F_{-v} \cap F_e \neq \varnothing$. □

Лемма 3. *Для всякого $u \in \mathcal{GT}$ существуют взаимно ортогональные геометрические трипотенты $u_1, u_2 \in \nabla$ такие, что $u = u_1 - u_2$.*

Доказательство. Положим $u_1 = u \wedge e$, $u_2 = (-u) \wedge e$. Покажем, что $u_1\diamondsuit u_2$, $u = u_1 + u_2$. Пусть $u_1 \wedge u_2 \neq 0$. Тогда существует $x \in Z_1$ такой, что $\langle u_1, x\rangle = \langle u_2, x\rangle = 1$. Так как $u_1 = u \wedge e$, $u_2 = (-u) \wedge e$, то $\langle u, x\rangle = 1$, $\langle -u, x\rangle = 1$, противоречие. Следовательно, $u_1 \wedge u_1 = 0$, и поэтому в силу леммы 1 получим $u_1\diamondsuit u_2$.

Предположим, что $v = u - u_1 + u_2 \neq 0$. В силу леммы 2 имеем $F_v \cap F_e \neq \varnothing$ или $F_{-v} \cap F_e \neq \varnothing$. Без ограничения общности будем считать, что $F_v \cap F_e \neq \varnothing$. Отсюда существует такой $x \in Z_1$, что $\langle v, x\rangle = \langle e, x\rangle = 1$. Так как $v \leq u$, то $\langle u, x\rangle = 1$. Отсюда $x \in F_u \cap F_e$, т.е. $x \in F_{u_1}$ или $\langle u_1, x\rangle = 1$. Так как $u_1\diamondsuit u_2$, то $\langle u_2, x\rangle = 0$. Таким образом, $\langle v, x\rangle = \langle u, x\rangle - \langle u_1, x\rangle + \langle u_2, x\rangle = 0$, что противоречит $\langle v, x\rangle = 1$. Отсюда $u = u_1 - u_2$. □

На пространстве Z введем отношение порядка

$$x \geq 0, \quad x \in Z \Leftrightarrow \langle u, x\rangle \geq 0 \ \ \forall u \in \nabla. \tag{2}$$

Лемма 4. *Пусть $x \in Z$. Следующие условия эквивалентны*:

(1) $x \geq 0$;

(2) $v_x \in \nabla$;

(3) $x \in \mathbb{R}^+ F_e$.

Доказательство. (1)⇒(2). Пусть $x \geq 0$. Рассмотрим наименьший геометрический трипотент v_x с $\langle v_x, x\rangle = \|x\|$. Согласно лемме 3 найдутся такие $u_1, u_2 \in \nabla$, что $v_x = u_1 - u_2$. Предположим $u_2 \neq 0$.

Тогда

$$\langle u_2, x\rangle = \langle u_2, P_2(v_x)(x)\rangle = \langle u_2, P_2(u_1)(x)\rangle - \langle u_2, P_2(u_2)(x)\rangle = \\ = -\langle u_2, P_2(u_2)(x)\rangle = -\langle P_2(u_2)^*(u_2), x\rangle = -\langle u_2, x\rangle.$$

Отсюда $\langle u_2, x\rangle = 0$, поэтому $\langle v_x, x\rangle = \langle u_1, x\rangle$. Поскольку $u_1 \leq v_x$ и v_x — наименьший трипотент с $\langle v_x, x\rangle = \|x\|$, то $u_1 = v_x$. Отсюда $u_2 = 0$, поэтому $v_x = u_1 \in \nabla$.

(2)⇒(3). Пусть $v_x \in \nabla$. Так как $v_x \leq e$, то $\frac{x}{\|x\|} \in F_{v_x} \subset F_e$, т. е. $x \in \mathbb{R}^+ F_e$.

(3)⇒(1). Пусть $x \in \mathbb{R}^+ F_e$. Тогда $x = \alpha y$, где $y \in F_e$, $\alpha \geq 0$. Поэтому для всякого $u \in \nabla$

$$\langle u, x\rangle = \langle u, \alpha y\rangle = \alpha\langle u, y\rangle = \alpha\|P_2(u)(y)\| \geq 0,$$

т. е. $\langle u, x\rangle \geq 0$. Это означает, что $x \geq 0$. □

Лемма 5. *Z — упорядоченное векторное пространство, т. е.*

(1) $x \leq x$;

(2) $x \leq y$, $y \leq z \Rightarrow x \leq z$;

(3) $x \leq y$, $y \leq x \Rightarrow x = y$.

Доказательство. Свойства (1) и (2) тривиальны. Покажем выполнение свойства (3). Пусть $x \leq y$, $y \leq x$. Тогда $\langle v, x - y\rangle = 0$ для всех $v \in \nabla$. Предположим $x \neq y$. Возьмем геометрический трипотент $u \in \mathcal{GT}$ такой, что $\langle u, x - y\rangle = \|x - y\|$. Согласно лемме 3 существуют такие $u_1, u_2 \in \nabla$, что $u = u_1 - u_2$. Тогда $\langle u_1, x - y\rangle = \langle u_2, x - y\rangle = 0$. Отсюда $\langle u, x - y\rangle = 0$, противоречие. Следовательно, $x = y$. □

Лемма 6. *Для всякого $u \in \nabla$ оператор $P_2(u)$ является положительным.*

Доказательство. Пусть $x \geq 0$. В силу леммы 4 имеем $x = \alpha y$, где $y \in F_e$, $\alpha \geq 0$. Если $P_2(u)(y) = 0$, то $P_2(u)(y) \in \mathbb{R}^+ F_e$. Если $P_0(u)(y) = 0$, то $P_2(u)(y) = y \in \mathbb{R}^+ F_e$.

Пусть теперь $P_2(u)(y) \neq 0$, $P_0(u)(y) \neq 0$. Так как $P_1(u) = 0$, то

$$\|P_2(u)(y)\| + \|P_0(u)(y)\| = \|P_2(u)(y) + P_0(u)(y)\| = \|y\| = 1,$$

и поэтому

$$\|P_2(u)(y)\|\frac{P_2(u)(y)}{\|P_2(u)(y)\|} + \|P_0(u)(y)\|\frac{P_0(u)(y)}{\|P_0(u)(y)\|} = y \in F_e.$$

Поскольку F_e — грань, то $\frac{P_2(u)(y)}{\|P_2(u)(y)\|} \in F_e$. Вновь в силу леммы 4 получим $P_2(u)(x) = \alpha P_2(u)(y) \geq 0$. □

Лемма 7. *Для всякого $x \in Z$ существуют взаимно ортогональные геометрические трипотенты $u_+, u_- \in \nabla$ с $u_+ + u_- = e$ такие, что*

$$x_+ = P_2(u_+)(x) \geq 0, \quad x_- = P_2(u_-)(x) \leq 0.$$

Доказательство. Возьмем наименьший геометрический трипотент $v_x \in \mathcal{GT}$ такой, что $\langle v_x, x\rangle = \|x\|$. Согласно лемме 3 существуют такие $u_1, u_2 \in \nabla$, что $v_x = u_1 - u_2$. Положим $u_+ = u_1$, $u_- = -u_2 + v_x^{\perp}$. Тогда

$$\|x\| = \langle v_x, P_2(v_x)(x)\rangle = \langle u_1, P_2(u_1)(x)\rangle - \langle u_2, P_2(u_2)(x)\rangle \leq \\ \leq \|P_2(u_1)(x)\| + \|P_2(u_2)(x)\| = \|P_2(u_1)(x) + P_2(u_2)(x)\| = \|P_2(v_x)(x)\| = \|x\|.$$

Отсюда

$$\langle u_1, P_2(u_1)(x)\rangle = \|P_2(u_1)(x)\|, \quad \langle -u_2, P_2(u_2)(x)\rangle = \|P_2(u_2)(x)\|. \tag{3}$$

Поскольку $P_2(v_x^{\perp})(x) = P_0(v_x)(x) = 0$, то из (3) вытекает, что u_1 — наименьший геометрический трипотент с $\langle u_1, P_2(u_+)(x)\rangle = \|P_2(u_+)(x)\|$, u_2 — наименьший геометрический трипотент с $\langle -u_2, P_2(u_-)(x)\rangle = \|P_2(u_-)(x)\|$. Следовательно, в силу леммы 4 имеем $P_2(u_+)(x) \geq 0$, $P_2(u_-)(x) \leq 0$. $\square$

Отметим, что из $u_+ \diamondsuit u_-$ следует $x_+ \diamondsuit x_-$.

Лемма 8. *Z — векторная решетка, т. е. для всяких $x, y \in Z$ существуют $x \vee y$, $x \wedge y \in Z$.*

Доказательство. Согласно лемме 7 существуют взаимно ортогональные геометрические трипотенты $u_+, u_- \in \nabla$ с $u_+ + u_- = e$ такие, что

$$P_2(u_+)(x-y) \geq 0, \quad P_2(u_-)(x-y) \leq 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} x \vee y &= P_2(u_+)(x) + P_2(u_-)(y), \\ x \wedge y &= P_2(u_+)(y) + P_2(u_-)(x). \end{aligned} \tag{4}$$

Действительно,

$$x \vee y - x = P_2(u_+)(x) + P_2(u_-)(y) - x = P_2(u_+)(x-x) + P_2(u_-)(y-x) \geq 0$$

и

$$x \vee y - y = P_2(u_+)(x) + P_2(u_-)(y) - y = P_2(u_+)(x-y) + P_2(u_-)(y-y) \geq 0.$$

Пусть $x, y \leq z$, где $z \in Z$. Тогда

$$z - x \vee y = z - P_2(u_+)(x) - P_2(u_-)(y) = P_2(u_+)(z-x) + P_2(u_-)(z-y) \geq 0.$$

Это означает, что $x \vee y = P_2(u_+)(x) + P_2(u_-)(y)$. Точно так же доказывается (4). $\square$

Лемма 9. *Пусть $x \in Z, x \geq 0$. Тогда $\|x\| = \langle e, x\rangle$.*

Доказательство. Возьмем наименьший геометрический трипотент $v_x \in \mathcal{GT}$ такой, что $v_x(x) = \|x\|$. Согласно лемме 4 имеем $v_x \in \nabla$. Так как $v_x \leq e$, то $\langle v_x, x\rangle \leq \langle e, x\rangle$. Поэтому $\|x\| = \langle v_x, x\rangle \leq \langle e, x\rangle \leq \|x\|$, т. е. $\|x\| = \langle e, x\rangle$. $\square$

Банахова решетка X называется абстрактным L_1-пространством, если $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$ для всех $x, y \in Z$, $x, y \geq 0$, $x \wedge y = 0$ ([8], с. 14; [9]).

Лемма 10. *Z является абстрактным L_1-пространством.*

Доказательство. Сначала покажем, что $0 \leq x \leq y \Rightarrow \|x| \leq \|y\|$ и $\big|\|x\|\big| = \|x\|$. Пусть $0 \leq x \leq y$. Тогда $\|x\| = \langle e, x\rangle \leq \langle e, y\rangle = \|y\|$, т. е. $\|x\| \leq \|y\|$. Далее $\big|\|x\|\big| = \|x_+ + x_-\| = [x_+ \diamondsuit x_-] = \|x_+ - x_-\| = \|x\|$. Таким образом, Z — банахова решетка.

Пусть теперь $x, y \geq 0$. Используя лемму 9 имеем

$$\|x+y\| = \langle e, x+y\rangle = \langle e, x\rangle + \langle e, y\rangle = \|x\| + \|y\|.$$

Это означает, что Z является абстрактным L_1-пространством. $\square$

Теперь доказательство теоремы следует из леммы 10 и теоремы 1.b.2 из [8].

Литература

[1] Friedman Y., Russo B., *A geometric spectral theorem*, Quart. J. Math. Oxford **37** (2), 263–277 (1986).
[2] Friedman Y., Russo B., *Some affine geometric aspects of operator algebras*, Pacif. J. Math. **137** (1), 123–144 (1989).
[3] Friedman Y., Russo B., *Geometry of the dual ball of the spin factor*, Proc. Lon. Math. Soc., III Ser. **65** (1), 142–174 (1992).
[4] Friedman Y., Russo B., *Classification of atomic facially symmetric spaces*, Canad. J. Math. **45** (1), 33–87 (1993).
[5] Neal M., Russo B., *State space of JB^*-triples*, Math. Ann. **328** (4), 585–624 (2004).
[6] Ибрагимов М.М., Кудайбергенов К.К., Тлеумуратов С.Ж., Сейпуллаев Ж.Х. *Геометрическое описание предсопряженного пространства к атомической коммутативной алгебре фон Неймана*, Матем. заметки **93** (5), 726–733 (2013).
[7] Friedman Y., Russo B., *Affine structure of facially symmetric spaces*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **106** (1), 107–124 (1989).
[8] Lindenstrauss J., Tzafriri L. *Classical Banach spaces.* II. *Function spaces* (Springer, 1979).
[9] Kakutani S. *Concrete representation of abstract L-spaces and the mean ergodic theorem*, Ann. Math. **42** (2), 523–537 (1941).

М.М. Ибрагимов

проректор по учебной работе, кафедра функционального анализа,
Каракалпакский государственный университет им. Бердаха,
ул. Академика Ч. Абдирова, д. 1, г. Нукус, 230113, Республика Узбекистан,

`e-mail:` mukhtar_nukus@mail.ru

К.К. Кудайбергенов

заведующий кафедрой функционального анализа,
Каракалпакский государственный университет им. Бердаха,
ул. Академика Ч. Абдирова, д. 1, г. Нукус, 230113, Республика Узбекистан,

`e-mail:` karim2006@mail.ru

M.M. Ibragimov and K.K. Kudaibergenov

Geometric description of L_1-spaces

Abstract. We describe strongly facially symmetric spaces which are isometrically isomorphic to L_1-space.

Keywords: face, Boolean algebra, facially symmetric space.

M.M. Ibragimov

Vice-rector on School Work, Chair of Functional Analysis,
Karakalpakiya State University,
1 Akad. Ch. Abdirov str., Nukus, 230113 Republic of Uzbekistan,

`e-mail:` mukhtar_nukus@mail.ru

K.K.Kudaibergenov

Head of the Chair of Functional Analysis,
Karakalpakiya State University,
1 Akad. Ch. Abdirov str., Nukus, 230113 Republic of Uzbekistan,

`e-mail:` karim2006@mail.ru