ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 4 (503)

УДК 517.546

В.П. МИККА

О СТАЦИОНАРНЫХ ТОЧКАХ КОНФОРМНОГО РАДИУСА СПИРАЛЕОБРАЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

В работах [1], [2] с помощью подчинений

$$e^{i\gamma}\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \prec \frac{e^{i\gamma}+\delta e^{-i\gamma}\zeta}{1-\alpha\zeta} \equiv f_0(\alpha,\delta,\gamma;\zeta), \quad \gamma\in(-\pi/2,\pi/2), \tag{0.1}$$

для регулярных в $E=\{\zeta : |\zeta|<1\}$ функций $f(\zeta)=\zeta+a_3\zeta^3+a_4\zeta^4+\cdots$ при $\alpha+i\delta\in\Delta=\{(\alpha,\delta)\in[-1,1]\times[-1,1] : \alpha+\delta>0\}$ выделены подклассы звездообразных ($\gamma=0$) и спиралеобразных функций с единственной критической точкой $\zeta=0$ конформного радиуса $R(f(E),f(\zeta))=|f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2)$. Ниже эти результаты распространены на случай комплексного параметра $\delta=|\delta|e^{i\sigma}$, $|\delta|\in[0,1]$, $\sigma\in(-\pi,\pi]$, для регулярных функций

$$f(\zeta)=\zeta+a_{n+1}\zeta^{n+1}+a_{n+2}\zeta^{n+2}+\dots, \quad n\ge 2. \tag{0.2}$$

Теорема 1, являясь неулучшаемой при $n=2$, расширяет множество единственности на плоскости $\alpha+i\delta$ из [2]. Теоремы 1, 2 в случае $n>2$ не являются точными, однако так называемые экстремальные функции показывают, что множество функций, для которых конформный радиус области $f(E)$ имеет единственную стационарную точку $\zeta=0$, не совпадает со всем подклассом γ-спиралеобразных функций. В теореме 3 из [1] исключались функции $f(\zeta)$, определяемые из условия $\zeta f'(\zeta)/f(\zeta)=(1+\delta\zeta^2)/(1-\alpha\zeta^2)$, когда $\alpha+i\delta\in\partial G_{2/3}$. Примененный в данной работе метод оценок позволяет определить критические точки конформного радиуса для таких областей $f(E)$ (теорема 5), с помощью которых удается исследовать поведение решений внешней обратной краевой задачи в случае неединственности (теорема 6).

1. Достаточные условия единственности критических точек конформного радиуса в классе γ-спиралеобразных областей

Л.А. Аксентьев в [3] установил, что необходимое условие экстремума конформного радиуса $R(f(E),f(\zeta))$ в E, записанное в виде

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}=\frac{2\overline{\zeta}}{1-|\zeta|^2}, \tag{1.1}$$

является уравнением Гахова в теории обратных краевых задач для аналитических функций. При этом каждое решение $\zeta=\zeta_k$ этого уравнения входит как параметр в оператор

$$Af\equiv F_k(\zeta)=\int_0^\zeta f'(t)\left(\frac{1-\overline{\zeta}_k t}{t-\zeta_k}\right)^2 dt, \tag{1.2}$$

дающий интегральное представление решения внешней обратной краевой задачи в постановке Ф.Д. Гахова [4]. Здесь $\ln f'(\zeta)$ восстанавливается по краевым условиям и является функцией, регулярной в E.

Теорема 1. *Пусть регулярная функция* (0.2) *удовлетворяет условию* (0.1) *и выполнены ограничения*

$$|\alpha| + n|\delta|/(n+1) \le 1, \tag{1.3}$$

$$|\alpha + \delta e^{-i2\gamma}| \le n/(n+1). \tag{1.4}$$

Тогда конформный радиус $f(E)$ *имеет единственную критическую точку* $\zeta = 0$, *если при равенстве в* (1.4) *и* $n = 2$ *исключить экстремальные области* $f(E)$, *где функции* $f(\zeta)$ *определены соотношением*

$$\zeta f'(\zeta)/f(\zeta) = (1 + \delta e^{-i2\gamma}\zeta^2)/(1 - \alpha\zeta^2).$$

Доказательство. Для функций (0.2) с подчинением (0.1) (напр., [5], с. 357) существует регулярная в E функция $\varphi(\zeta) = b_n\zeta^n + b_{n+1}\zeta^{n+1} + \cdots$, удовлетворяющая условию

$$\zeta f'(\zeta)/f(\zeta) = [1 + \delta e^{-i2\gamma}\varphi(\zeta)]/[1 - \alpha\varphi(\zeta)], \quad |\varphi(\zeta)| < 1.$$

Тогда в силу теорем 4, 5 ([5], с. 323) получим следующую цепь неравенств:

$$\begin{aligned}
\left|\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| &= \left|\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} - 1 + \zeta\left[\frac{\delta e^{-i2\gamma}}{1+\delta e^{-i2\gamma}\varphi(\zeta)} + \frac{\alpha}{1-\alpha\varphi(\zeta)}\right]\varphi'(\zeta)\right| \le \\
&\le \left|\frac{(\alpha+\delta e^{-i2\gamma})\varphi(\zeta)}{1-\alpha\varphi(\zeta)}\right| + \frac{|(\alpha+\delta e^{-i2\gamma})\zeta\varphi'(\zeta)|}{|1+\delta e^{-i2\gamma}\varphi(\zeta)|\,|1-\alpha\varphi(\zeta)|} \le \\
&\le |\alpha+\delta e^{-i2\gamma}|\left[\frac{|\zeta|^n}{|1-\alpha\varphi(\zeta)|} + \frac{|\zeta|n|\zeta|^{n-1}(1-|\varphi(\zeta)|)(1+|\varphi(\zeta)|)}{(1-|\zeta|^{2n})|1+\delta e^{-i2\gamma}\varphi(\zeta)|\,|1-\alpha\varphi(\zeta)|}\right] \le \\
&\le \frac{2|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2}\frac{|\alpha+\delta e^{-i2\gamma}|}{2}\frac{|\zeta|^{n-2}(1-|\zeta|^2)}{1-|\zeta|^n}\left[\frac{1-|\zeta|^n}{|1-\alpha\varphi(\zeta)|} + \right. \\
&\left. + \frac{n(1-|\varphi|)}{|1+\delta e^{-i2\gamma}\varphi(\zeta)||1-\alpha\varphi(\zeta)|}\right] \le \frac{2|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2}\frac{|\alpha+\delta e^{-i2\gamma}|}{2} \times \\
&\times \max_{|\zeta|<1}\frac{|\zeta|^{n-2}+|\zeta|^{n-1}}{1+|\zeta|+\cdots+|\zeta|^{n-1}}\max_{|\varphi|<1}\left[\frac{1-|\varphi|}{|1-\alpha\varphi|} + \frac{n(1-|\varphi|)}{|1+\delta e^{-i2\gamma}\varphi|\,|1-\alpha\varphi|}\right] \equiv \\
&\equiv \frac{2|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2}\frac{|\alpha+\delta e^{-i2\gamma}|}{2}\max_{|\zeta|<1}\psi_n(|\zeta|)\max_{|\varphi|<1}\Omega_n(\varphi),
\end{aligned} \tag{1.5}$$

в итоге совпадающую при $n = 2$ с соответствующей оценкой из [2]. Теперь для обоснования теоремы 1 достаточно убедиться в справедливости следующих утверждений.

Лемма 1. *Функция*

$$\psi_n(t) = \frac{t^{n-2}+t^{n-1}}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} \in [0, 2/n)$$

является монотонной при $t \in [0,1)$ *и* $n > 2$.

Действительно, непосредственные вычисления показывают, что $\psi_n'(t) > 0$ при $n > 2$ для всех $t \in (0,1)$.

Лемма 2. *Пусть*

$$\overline{\Omega}_n(\rho) = \frac{1-\rho}{1-|\alpha|\rho} + \frac{n(1-\rho)}{(1-|\delta|\rho)(1-|\alpha|\rho)}$$

и параметры α, δ, n *связаны неравенством* (1.3). *Тогда*

$$\max_{\rho\in[0,1)}\overline{\Omega}_n(\rho) = \overline{\Omega}_n(0) = n+1. \tag{1.6}$$

Доказательство. Для вспомогательной функции

$$\omega_n(|\alpha|,|\delta|;\rho) = a_0(|\alpha|,|\delta|)\rho^2 + a_1(|\alpha|,|\delta|)\rho + a_2(|\alpha|,|\delta|),$$
$$a_0(|\alpha|,|\delta|) = |\delta|(|\delta|\,|\alpha| + n|\alpha| - |\delta|), \quad a_1(|\alpha|,|\delta|) = |\delta|[2-2(n+1)|\alpha|],$$
$$a_2(|\alpha|,|\delta|) = (n+1)|\alpha| + n|\delta| - n - 1,$$

определяемой соотношением

$$\overline{\Omega}'_n(\rho) = \frac{\omega_n(|\alpha|,|\delta|;\rho)}{(1-|\delta|\rho)^2(1-|\alpha|\rho)^2},$$

получим $\omega_n(|\alpha|,|\delta|;1) = (|\alpha|-1)(|\delta|-n-1)(|\delta|-1) \le 0$; $\omega_n(|\alpha|,|\delta|;0) = (n+1)|\alpha| + n|\delta| - n - 1$; $\omega'_n(|\alpha|,|\delta|;1) = 2|\delta|(|\alpha|-1)(|\delta|-1) \ge 0$; $\omega'_n(|\alpha|,|\delta|;0) = 2-2(n+1)|\alpha|$. Если $a_0(|\alpha|,|\delta|) \ge 0$, то при $\omega_n(|\alpha|,|\delta|;0) \le 0$ справедливо (1.6), т. к. $\omega_n(|\alpha|,|\delta|;1) \le 0$ при $(|\alpha|,|\delta|) \in [0,1]\times[0,1]$. Если $a_0(|\alpha|,|\delta|) < 0$, то условие (1.6) также будет выполнено, т. к. $\omega'_n(|\alpha|,|\delta|;1) \ge 0$ на $[0,1]\times[0,1]$, а $\omega'_n(|\alpha|,|\delta|;0) > 0$ в силу того, что $\omega''_n(|\alpha|,|\delta|;\rho) = 2a_0(|\alpha|,|\delta|) < 0$. Значит, функция $\omega_n(|\alpha|,|\delta|;\rho)$ является неубывающей по $\rho \in (0,1)$, поэтому из неравенства $\omega_n(|\alpha|,|\delta|;1) \le 0$ следует (1.6).

Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что $\Omega_n(\varphi) \le \overline{\Omega}_n(|\varphi|)$ и $\Omega_n(0) = \overline{\Omega}_n(0)$. Тогда оценка (1.5) при $n > 2$ примет вид

$$\left|\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| < \frac{2|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2}|\alpha + \delta e^{-i2\gamma}|(n+1)/n. \tag{1.7}$$

Значит, при $|\alpha+\delta e^{-i2\gamma}|(n+1)/n \le 1$ уравнение (1.1) имеет единственное решение $\zeta = 0$.

Отметим, что экстремальные функции, связанные с применением теорем 4, 5 (см. [5], с. 323), удовлетворяют соотношению

$$\zeta f'(\zeta)/f(\zeta) = (1+\delta e^{-i2\gamma}\zeta^n)/(1-\alpha\zeta^n). \tag{1.8}$$

Для этих функций уравнение (1.1) будет иметь единственное решение даже при равенстве в (1.4) и $n > 2$. Если $n = 2$, то в (1.7) будет нестрогое неравенство, поэтому при выполнении равенства в (1.4) нужно исключить экстремальные функции, определяемые (1.8).

Условие (0.1), вообще говоря, выводит $f(\zeta)$ из класса γ-спиралеобразных функций, т. к. $f_0(\alpha,\delta,\gamma;E) = \{w : |w-a| < R\}$, где $a = [e^{i\gamma} + \delta e^{-i\gamma}\alpha]/(1-\alpha^2)$, $R = |e^{i\gamma}\alpha + \delta e^{-i\gamma}|/(1-\alpha^2)$, принадлежат полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$ тогда и только тогда, когда

$$\cos\gamma + \alpha|\delta|\cos(\sigma-\gamma) - \sqrt{\alpha^2 + |\delta^2| + 2\alpha|\delta|\cos(\sigma - 2\gamma)} > 0. \tag{1.9}$$

Покажем, что при специальном выборе

$$\delta = (\beta\cos\gamma - i\alpha\sin\gamma)e^{i\gamma}, \quad \alpha + i\beta \in \Delta, \tag{1.10}$$

т. е. $\delta = ce^{i2\gamma}$ в обозначениях из [2], условие (1.9) будет выполнено для каждого γ. Действительно, в этом случае $a = (1+\alpha\beta)\cos\gamma/(1-\alpha^2) + i$, $R = (\alpha+\beta)\cos\gamma/(1-\alpha^2)$, поэтому $\operatorname{Re} a - R = (1-\beta)\cos\gamma/(1+\alpha) \ge 0$. В работе [2] при таких δ и $n = 2$ было получено достаточное условие единственности решения уравнения Гахова при более жестком ограничении $|\alpha| + |\delta| \le 1$, чем (1.3).

Взяв призму $\Pi = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in [-1,1]\times[-1,1]\times(-\pi/2,\pi/2) : \alpha+\beta > 0\}$, можно описать множества E^n_γ, T^n_γ, удовлетворяющие ограничениям (1.3), (1.4), когда параметр δ задан соотношением (1.10). Тогда неравенства (1.3), (1.4) примут вид $(n+1)|\alpha| + n|\beta\cos\gamma - i\alpha\sin\gamma| \le n+1$, $(\alpha+\beta)\cos\gamma \le n/(n+1)$. Множество $T^n_\gamma = \{(\alpha,\beta) \in [-1,1]\times[-1,1] : \alpha+\beta > 0, (\alpha+\beta)\cos\gamma \le n/(n+1)\}$ представляет трапецию в сечении Π плоскостью $\gamma = \mathrm{const}$, если $\gamma \in (-\nu,\nu)$, $\nu = \arccos[n/[2(n+1)]]$, и является треугольником Δ, если $\gamma \in (-\pi/2,-\nu] \cup [\nu,\pi/2)$. Граница множества $E^n_\gamma = \{(\alpha,\beta) \in [-1,1]\times[-1,1] : \alpha+\beta > 0, (n+1)|\alpha| + n|\beta\cos\gamma - i\alpha\sin\gamma| \le n+1\}$

содержит ветви гиперболы при фиксированных n, γ, ибо это ограничение равносильно неравенству

$$\left[|\alpha|-\frac{(n+1)^2}{1+2n+n^2\cos^2\gamma}\right]^2\frac{(1+2n+n^2\cos^2\gamma)^2}{(n+1)^2n^2\sin^2\gamma}-\frac{\beta^2\cos^2\gamma(1+2n+n^2\cos^2\gamma)}{(n+1)^2\sin^2\gamma}\geq 1$$

в треугольнике Δ. Обратим внимание на то, что соответствующие ветви гипербол при всех γ пересекают сторону $\alpha+\beta=0$ в точках $(n+1)(1-i)/(2n+1)$ и $(n+1)(-1+i)/(2n+1)$, а сечение E_0^n есть пятиугольник с вершинами в точках $(n+1)(1-i)/(2n+1)$, 1, $1/(1+n)+i$, $-1/(n+1)+i$, $(n+1)(-1+i)/(2n+1)$. Таким образом, в случае $\gamma=0$ и $n\geq 2$ теорема 1 не дает возможности описывать подкласс единственности решения уравнения Гахова, когда $\alpha+i\beta$ принадлежит либо треугольнику $\Delta_1^{(1)}$ с вершинами в точках $1-i$, 1, $(n+1)(1-i)/(2n+1)$, либо треугольнику $\Delta_3^{(2)}$ с вершинами в точках $-1+i$, $(n+1)(-1+i)/(2n+1)$, $-1/(n+1)+i$. Соответствующие исследования при $n=2$ проведены в [1], и эти результаты можно распространить на случай $n>2$.

Лемма 3. *Пусть $\alpha+i\beta\in\Delta$ и*

$$\Omega_n(\varphi)=\frac{1-|\varphi|}{|1-\alpha\varphi|}+\frac{n(1-|\varphi|)}{|1-\alpha\varphi|\,|1+\beta\varphi|}.$$

Тогда линиями уровня функции $(\alpha+\beta)\max\limits_{|\varphi|<1}\Omega_n(\varphi)/n=m$ являются прямые линии $(\alpha+\beta)(n+1)=mn$, $m\in(0,2(n+1)/n]$, если $\alpha+i\beta$ принадлежат пятиугольнику с вершинами в точках $(n+1)(1-i)/(2n+1)$, 1, $1+i$, $-1/(n+1)+i$, $(n+1)(-1+i)/(2n+1)$;

кривые L_m^n с уравнением

$$\alpha=-\beta\frac{(n+1+\beta)^2-2(1+\beta)nm+2n^2m+n^2m^2}{(n+1+\beta)^2-2(1+\beta)(n+1)nm-2\beta n^2m+n^2m^2},$$

$m\in(0,(n+1)/n)$, если $\alpha+i\beta\in\Delta_1^{(1)}\subset\Delta$;

кривые $\overline{L}_m^n$ с уравнением

$$\alpha=-\beta\frac{(n+1-\beta)^2+2n(1-\beta)m-2n^2m+n^2m^2}{(n+1-\beta)^2+2n(n+1)(1-\beta)m-2n^2\beta m+n^2m^2},$$

$m\in(0,1)$, если $\alpha+i\beta\in\Delta_3^{(2)}$.

Для доказательства достаточно воспользоваться тем, что множество точек $\{\varphi:|1-\alpha\varphi|\,|1+\beta\varphi|=a^2-\mathrm{const}\}$ является овалом Кассини [6] с фокусами в точках $\varphi=1/\alpha$, $\varphi=-1/\beta$, поэтому $\min\limits_{\theta\in(-\pi,\pi]}|1-\alpha\rho e^{i\theta}|\,|1+\beta\rho e^{i\theta}|=(1-\alpha\rho)(1+\beta\rho)$, если $\alpha+i\beta\in\Delta_1=\{(\alpha,\beta)\in\Delta:\alpha\geq 0,\ \beta<0\}$ или $\alpha+i\beta\in\Delta_2^{(1)}=\{(\alpha,\beta)\in\Delta:\alpha\geq 0,\ \beta\geq 0,\ \beta-\alpha\leq 0\}$. В случае, когда $\alpha+i\beta\in\Delta_3=\{(\alpha,\beta)\in\Delta:\alpha<0,\ \beta\geq 0\}$, справедливо равенство $\min\limits_{\theta\in(-\pi,\pi]}|1-\alpha\rho e^{i\theta}|\,|1+\beta\rho e^{i\theta}|=(1+\alpha\rho)(1-\beta\rho)$.

Таким образом,

$$\max_{\theta\in(-\pi,\pi]}\Omega_n(\rho e^{i\theta})=\frac{1-\rho}{1-\alpha\rho}+\frac{n(1-\rho)}{(1-\alpha\beta)(1+\beta\rho)}\equiv\Omega_n(\rho e^{i0}),$$

если $\alpha+i\beta\in\Delta_1\cup\Delta_2^{(1)}$, и

$$\max_{\theta\in(-\pi,\pi]}\Omega_n(\rho e^{i\theta})=\frac{1-\rho}{1+\alpha\rho}+\frac{n(1-\rho)}{(1+\alpha\rho)(1-\beta\rho)}\equiv\Omega_n(\rho e^{i\pi}),$$

если $\alpha+i\beta\in\Delta_3$, а при $\alpha+i\beta\in\Delta_2^{(2)}=\{(\alpha,\beta)\in\Delta:\alpha\geq 0,\ \beta>0,\ \beta-\alpha>0\}$ достаточно найти наибольшее значение мажоранты

$$\overline{\overline{\Omega}}_n(\mathrm{Re}\,\varphi)=\frac{1-|\mathrm{Re}\,\varphi|}{1-\alpha\,\mathrm{Re}\,\varphi}+\frac{n(1-|\mathrm{Re}\,\varphi|)}{(1-\alpha\,\mathrm{Re}\,\varphi)(1+\beta\,\mathrm{Re}\,\varphi)}\geq\Omega_n(\varphi),\quad |\varphi|<1.$$

Тогда, повторив обоснование теоремы 2 из [1], проведенное для $\overline{\overline{\Omega_2}}(\operatorname{Re}\varphi)$, получим требуемое. $\square$

Введем, как и в [1], множество G_m^n из Δ, ограниченное кривыми $\overline{L}_m^n$, L_m^n и прямыми $\alpha+\beta=0$, $(\alpha+\beta)(n+1)=mn$, если $m\in(0,1)$; прямыми $\alpha+\beta=0$, $\beta=1$, $(\alpha+\beta)(n+1)=mn$ и кривой L_m^n, если $m\in[1,(n+1)/n)$; прямыми $\alpha+\beta=0$, $\beta=1$, $(\alpha+\beta)(n+1)=mn$, $\alpha=1$, если $m\in[(n+1)/n,2(n+1)/n]$.

Теорема 2. *Для функций* (0.2), *удовлетворяющих подчинению*

$$\zeta f'(\zeta)/f(\zeta)\prec(1+\beta\zeta)/(1-\alpha\zeta) \tag{1.11}$$

при $\alpha+i\beta\in\overline{G}_1^n$, $n>2$, *уравнение* (1.1) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Действительно, в оценке (1.5) при $\alpha+i\beta\in\overline{G}_1^n$ и $n>2$ в силу лемм 1, 3 имеет место строгое неравенство

$$|\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)|<2|\zeta|^2/(1-|\zeta|^2),\quad \zeta\in E\setminus\{0\},$$

поэтому уравнение (1.1) имеет единственное решение $\zeta=0$.

2. О числе решений уравнения Гахова для экстремальных функций

Для функций

$$f_{\alpha,\delta,\gamma}(\zeta)=\zeta(1-\alpha\zeta^n)^\mu,\quad \mu=-(\delta e^{-i2\gamma}+\alpha)/(n\alpha), \tag{2.1}$$

определяемых из (1.8), уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{n\beta e^{-i\gamma}\zeta^n\cos\gamma}{1+\beta e^{-i\gamma}\zeta^n\cos\gamma}+\beta e^{-i\gamma}\zeta^n\cos\gamma=\frac{2|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2},$$

если δ задано равенством (1.10) и $\alpha\to0$. Поэтому решениями последнего уравнения могут быть либо $\zeta=\rho\exp i\frac{\gamma+2\pi k}{n}$, либо $\zeta=\rho\exp i\frac{\gamma+(2k+1)\pi}{n}$. Тогда для определения параметра ρ получим одно из соотношений:

$$\frac{\beta\rho^n\cos\gamma}{1+\beta\rho^n\cos\gamma}(n+1+\beta\rho^n\cos\gamma)=\frac{2\rho^2}{1-\rho^2}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\beta\rho^n\cos\gamma}{1-\beta\rho^n\cos\gamma}(\beta\rho^n\cos\gamma-n-1)=\frac{2\rho^2}{1-\rho^2}.$$

Последнее уравнение может иметь только одно решение $\rho=0$, т. к. его левая часть отрицательна в призме Π при $\rho^2\in(0,1)$ в силу условия $\beta>0$ при $\alpha=0$.

Покажем, что уравнение (2.2) имеет три решения при $n=2$ и условии $\gamma\in[-\arccos(2/3),\arccos(2/3)]$, равносильном принадлежности $\beta\in[2/(3\cos\gamma),1]$, и что $\rho=0$ является единственным корнем, если $n\geq3$ и $\gamma\in[-\arccos[n/(n+1)],\arccos[n/(n+1)]]$, т. е. $\beta\in[n/[(n+1)\cos\gamma],1]$.

Действительно, при $n=2$ уравнение (2.2) равносильно $\rho^2\omega_2(0,\beta;\gamma;\rho^2)=0$ с $\omega_2(0,\beta;\gamma;\rho^2)=-\beta^2\cos^2\gamma\rho^4+\beta\cos\gamma(\beta\cos\gamma-5)\rho^2+3\beta\cos\gamma-2$, а для функции $\omega_2(0,\beta;\gamma;t)$ справедливы неравенства $\omega_2(0,\beta;\gamma;0)=3\beta\cos\gamma-2\geq0$; $\omega_2(0,\beta;\gamma;1)=-2(\beta\cos\gamma+1)<0$. Поэтому уравнение $\omega_2(0,\beta;\gamma;t)=0$ имеет решение

$$t=(\beta\cos\gamma-5+\sqrt{(\beta\cos\gamma+1)^2+16})/(2\beta\cos\gamma)\in(0,1),$$

когда $\beta\in(2/(3\cos\gamma),1]$ и $\gamma\in[-\arccos(2/3),\arccos(2/3)]$.

Соотношение (2.2) при $n\geq3$ перепишем в виде $\rho^n\omega_n(0,\beta;\gamma;\rho)=0$, где $\omega_n(0,\beta;\gamma;\rho)=\beta^2\cos^2\gamma\rho^{2n-2}(1-\rho^2)+(n+1)\beta\rho^{n-2}(1-\rho^2)\cos\gamma-2-2\beta\rho^n\cos\gamma$.

Лемма 4. *Функция* $\omega_n(0,\beta;\gamma;\rho)$ *является отрицательной при всех* $\rho\in(0,1)$, $\beta\in(0,1)$ *и* $\gamma\in(-\pi/2,\pi/2)$.

Доказательство. Действительно, функции

$$\varphi_1(n) = \max_{\rho\in(0,1)}[\rho^{2n-2}(1-\rho^2)] = n^{-1}(1-1/n)^{n-1},$$
$$\varphi_2(n) = \max_{\rho\in(0,1)}[(n+1)\rho^{n-2}(1-\rho^2)] = 2(1+1/n)(1-2/n)^{(n-2)/2}$$

монотонно убывают при $n \geq 3$, ибо положительные множители $1/n$, $1+1/n$ монотонно убывают, а логарифмические производные вторых множителей будут иметь вид

$$[(n-1)\ln(1-1/n)]'_n = \ln(1-1/n) + 1/n < 0,$$
$$[(n/2-1)\ln(1-2/n)]'_n = (1/2)\ln(1-2/n) + 1/n < 0.$$

Таким образом, $\max\limits_{n\geq 3}\varphi_1(n) = \varphi_1(3)$, $\max\limits_{n\geq 3}\varphi_2(n) = \varphi_2(3)$. Тогда $\omega_n(0,\beta;\gamma;\rho) \leq \beta^2\varphi_1(n)\cos^2\gamma + \beta\varphi_2(n)\cos\gamma - 2 - 2\beta\rho^n\cos\gamma \leq \beta^2\cos^2\gamma\max\limits_{n\geq 3}\varphi_1(n) + \beta\cos\gamma\max\limits_{n\geq 3}\varphi_2(n) - 2 - 2\beta\cos\gamma\rho^n = \beta^2\varphi_1(3)\cos^2\gamma + \beta\varphi_2(3)\cos\gamma - 2 - 2\beta\rho^n\cos\gamma \leq -0{,}25 - 2\beta\cos\gamma\rho^n < 0$, когда $\rho\in(0,1)$. $\square$

Теперь ясно, что уравнение (2.2) при $n \geq 3$ имеет единственное решение $\rho = 0$. Сформулируем полученный результат.

Теорема 3. *Для функций*

$$f_{0,\beta,\gamma}(\zeta) = \zeta\exp\{\beta\cos\gamma e^{-i\gamma}\zeta^n/n\}$$

уравнение (1.1) *имеет три разных решения*:

$$\zeta_0 = 0, \quad \zeta_{1,2} = \pm\sqrt{(\beta\cos\gamma - 5 + \sqrt{(\beta\cos\gamma+1)^2+16})/(2\beta\cos\gamma)},$$

если $n = 2$, $\beta\in(2/(3\cos\gamma),1]$, $\gamma\in[-\arccos(2/3),\arccos(2/3)]$, *и* $\zeta = 0$ *является единственным решением* (1.1) *при* $n \geq 3$, $\beta\in(0,1)$, $\gamma\in(-\pi/2,\pi/2)$.

Теперь исследуем вопрос о числе корней уравнения (1.1) для функций (2.1) при $\gamma = 0$, $\alpha + i\beta\in\Delta$. Для определения решений (1.1) получим одно из соотношений:

$$\frac{n\beta\rho^n}{1+\beta\rho^n} + \frac{(\alpha+\beta+n\alpha)\rho^n}{1-\alpha\rho^n} = \frac{2\rho^2}{1-\rho^2}, \tag{2.3}$$
$$\frac{-n\beta\rho^n}{1-\beta\rho^n} - \frac{(\alpha+\beta+n\alpha)\rho^n}{1+\alpha\rho^n} = \frac{2\rho^2}{1-\rho^2}, \tag{2.4}$$

если

$$f_{\alpha,\beta,0}(\zeta) = \zeta(1-\alpha\zeta^n)^{-(\alpha+\beta)/(n\alpha)}. \tag{2.1$'$}$$

Левая часть уравнения (2.4) отрицательна при $\rho\in(0,1)$, поэтому $\rho = 0$ является единственным его корнем. Уравнение (2.3) преобразуем к виду $\omega_n(\alpha,\beta;0;\rho) = 0$, где $\omega_n(\alpha,\beta;0;\rho) = \beta(\alpha-\beta)\rho^{2n} + \beta(\alpha+\beta)\rho^{2n-2} - [(n-1)\alpha + (n+3)\beta]\rho^n + (n+1)(\alpha+\beta)\rho^{n-2} - 2$ удовлетворяет следующим двум условиям: $\omega_n(\alpha,\beta;0,0) = -2 < 0$; $\omega_n(\alpha,\beta;0;1) = 2(\beta+1)(\alpha-1) < 0$, поэтому вопрос о наличии корней уравнения $\omega_n(\alpha,\beta;0;\rho) = 0$ на интервале (0,1) остается открытым. Дополнительно предположим, что $\beta = 0$, и из уравнения $\omega'_n(\alpha,0;0;\rho) = 0$ найдем корни $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = \sqrt{1-2/[n(n-1)]}$. Значит,

$$\max_{\rho\in(0,1)}\omega_n(\alpha,0;0;\rho) = \omega_n(\alpha,0;0;\rho_2) = \frac{2\alpha(n-1)}{n-2}\left(1-\frac{2}{n(n-1)}\right)^{n/2} - 2.$$

Из условия $\omega_n(\alpha,0;0;\rho_2) = 0$ определим

$$\alpha_n = (1-1/(n-1))\{1-2/[n(n-1)]\}^{-n/2}\in(0,1), \tag{2.5}$$

поэтому при $\alpha \in (\alpha_n, 1)$ уравнение $\omega_n(\alpha, 0; 0; \rho) = 0$ имеет два разных решения на $(0,1)$; при $\alpha = \alpha_n$ имеет единственное решение и не имеет корней, когда $\alpha \in (0, \alpha_n)$.

Таким образом, доказана

Теорема 4. *Уравнение Гахова для функций $f_{\alpha,0,0}(\zeta)$ из $(2.1')$ имеет $n+1$ корней:*

$$\zeta_0 = 0, \quad \zeta_k = \sqrt{1 - 2/[n(n-1)]}e^{i2\pi k/n}, \quad k = \overline{0, n-1},$$

если $\alpha = \alpha_n$; $2n+1$ корней, если $\alpha \in (\alpha_n, 1)$; единственный корень $\zeta_0 = 0$, если $\alpha \in (0, \alpha_n)$, где α_n вычисляется по формуле (2.5).

Теорема 2 при $n = 2$ совпадает с основными утверждениями из [1], если при $\alpha + i\beta \in \partial G_1^2$ исключить экстремальные функции

$$f_{\alpha,\beta}(\zeta) = \zeta(1 - \alpha\zeta^2)^{-(\alpha+\beta)/(2\alpha)}, \tag{2.1''}$$

когда $\alpha + i\beta \in \Delta \setminus G_1^2$, где G_1^2 — открытая трапеция с одной криволинейной боковой стороной

$$L_1^2 = \left\{(\alpha, \beta) \in \Delta_1^{(1)} : \alpha = -\beta\frac{(\beta+1)^2 + 16}{(\beta-7)^2 - 48}, \ \ \beta \in (-1, -1/5)\right\}$$

и с вершинами в точках $-1 + i$, $-1/3 + i$, $13/15 - i/5$, $1 - i$.

Пусть $\alpha + i\beta \in (-1 + i, 1 + i]$. Тогда $f'_{\alpha,1}(\zeta) = (1 + \zeta^2)(1 - \alpha\zeta^2)^{-(1+3\alpha)/(2\alpha)}$ имеет нули первого порядка в точках $\zeta = \pm i$. Значит, образ единичной окружности в точках $f_{\alpha,1}(\pm i)$ имеет внутренние углы, равные 2π. Непосредственно можно показать, что образы дуг $(-i, i)$ и $(i, -i)$ единичной окружности переходят в выпуклые кривые, т. е. вариация угла наклона касательной к образу $\Gamma = f(\partial E)$ равняется 6π.

Решениями уравнения (1.1), эквивалентного уравнению

$$\frac{2\rho^2}{1+\rho^2} + \frac{(1+3\alpha)\rho^2}{1-\alpha\rho^2} = \frac{2\rho^2}{1-\rho^2},$$

являются $\zeta = 0$, когда $\alpha \in (-1, -1/3]$ и

$$\zeta_0 = 0, \quad \zeta_{1,2} = \pm\sqrt{(-2 + \sqrt{(1+\alpha)(5-3\alpha)})/(1-\alpha)}, \tag{2.6}$$

т. к. $(1+\alpha)(5-3\alpha) \in (4, 16/3]$ при $\alpha \in (-1/3, 1)$. Для функции $f_{1-0,1}(\zeta) = \zeta/(1-\zeta^2)$ уравнение (1.1) имеет единственное решение $\zeta = 0$.

При $\alpha + i\beta \in (-1/3 + i, 13/15 - i/5)$ для функции $f_{\alpha,2/3-\alpha}(\zeta) = \zeta(1-\alpha\zeta^2)^{-1/(3\alpha)}$ уравнение (1.1) будет равносильно соотношению $\rho^4[\rho^2(-2\alpha^2 + 2\alpha - 4/9) + (10/3)\alpha - (26/9)] = 0$, имеющему единственное решение $\rho = 0$, если $\alpha \in (-1/3, 13/15]$, и три решения:

$$\zeta_0 = \rho_0 = 0, \quad \zeta_{1,2} = \pm\rho_1 = \pm\sqrt{\frac{15\alpha - 13}{(3\alpha-1)(3\alpha-2)}} \in (-1, 1), \quad \alpha \in (13/15, 1). \tag{2.7}$$

Если $\alpha + i\beta \in \Delta' = \{(\alpha, \beta) \in \Delta : \alpha + \beta > 2/3\}$, то (1.1) для экстремальных функций $(2.1')$ при $n = 2$ будет равносильно уравнению $\rho^2\omega_2(\alpha, \beta; 0; \rho) = 0$, где $\omega_2(\alpha, \beta; 0; \rho) = \rho^4(\alpha\beta - \beta^2) + \rho^2(\alpha\beta + \beta^2 - \alpha - 5\beta) + 3(\alpha + \beta) - 2$ удовлетворяют неравенствам $\omega_2(\alpha, \beta; 0; 0) = 3(\alpha+\beta) - 2 > 0$; $\omega_2(\alpha, \beta; 0; 1) = 2(1+\beta)(\alpha - 1) \le 0$. Тогда уравнение (1.1) для функций $(2.1')$ при $\alpha + i\beta \in \Delta'$ и $n = 2$ имеет три разных решения:

$$\zeta_0 = 0, \quad \zeta_{1,2} = \pm\sqrt{(-(\alpha\beta + \beta^2 - \alpha - 5\beta) - \sqrt{\mathcal{D}})/(2\beta(\alpha - \beta))}, \tag{2.8}$$

где

$$\mathcal{D} = (\alpha+\beta)[\alpha(\beta^2 - 14\beta + 1) + \beta^3 + 2\beta^2 + 17\beta]. \tag{2.9}$$

Если теперь $\alpha+\beta < 2/3$, то для функции $\omega_2(\alpha,\beta;0;\rho)$ будут выполнены неравенства $\omega_2(\alpha,\beta;0;0) = 3(\alpha+\beta)-2 < 0$; $\omega_2(\alpha,\beta;0;1) = 2(1+\beta)(\alpha-1) < 0$ при $\alpha \neq 1$, поэтому вопрос о существовании и числе решений уравнения $\omega_2(\alpha,\beta;0;\rho)=0$ на интервале$(0,1)$ открыт.

Для производной $\omega_2'(\alpha,\beta;0;\rho)$ имеют место соотношения

$$\omega_2'(\alpha,\beta;0;0) = \alpha\beta+\beta^2-\alpha-5\beta > 0; \quad \omega_2'(\alpha,\beta;0;1) = 3\alpha\beta-\beta^2-\alpha-5\beta < 0.$$

Первое неравенство есть следствие того, что кривая с уравнением $\alpha\beta+\beta^2-\alpha-5\beta=0$ является дугой гиперболы, проходящей через точки $0+i0$, $13/15-i/5$, $1+(2-\sqrt{5})i$, поэтому при $\alpha \in (13/15,1)$ она принадлежит области Δ', т. е. сохраняется знак $\omega_2'(\alpha,\beta;0;0)$ в

$$G_1^{2-} = \left\{(\alpha,\beta) \in \Delta : \alpha+\beta < 2/3; \quad \alpha > -\beta\frac{(\beta+1)^2+16}{(\beta-7)^2-48}; \quad \alpha \neq 1\right\}. \tag{2.10}$$

Аналогично, кривая с уравнением $3\alpha\beta-\beta^2-\alpha-5\beta=0$, являясь дугой гиперболы, проходит через точки $0+i0$, $3/5-i/5$, $1-i$ и пересекает кривую L_1^2 в точках $0+i0$, $1-i$, $3+3i$, тем самым знак $\omega_2'(\alpha,\beta;0;1)$ в G_1^{2-} сохраняется.

Таким образом, кривая $\omega=\omega_2(\alpha,\beta;0;\rho)$ либо пересекает интервал $(0,1)$ в двух точках, либо касается этого интервала, либо не пересекает его.

Из (2.8) следует, что касание кривой $\omega=\omega_2(\alpha,\beta;0;\rho)$ равносильно условию $\mathcal{D}=0$, а это означает, что на кривой L_1^2 уравнение (1.1) для функций (2.1′) имеет три различных решения:

$$\zeta_0 = 0, \quad \zeta_{1,2} = \pm\sqrt{-(\alpha\beta+\beta^2-\alpha-5\beta)/(2\beta(\alpha-\beta))}. \tag{2.11}$$

Если $\alpha+i\beta \in G_1^{2-}$, то $\mathcal{D}>0$ и для этих функций получим пять разных корней:

$$\begin{aligned} \zeta_0 = 0, \quad \zeta_{1,2} &= \pm\sqrt{(-(\alpha\beta+\beta^2-\alpha-5\beta)-\sqrt{\mathcal{D}})/(2\beta(\alpha-\beta))}, \\ \zeta_{3,4} &= \pm\sqrt{(-(\alpha\beta+\beta^2-\alpha-5\beta)+\sqrt{\mathcal{D}})/(2\beta(\alpha-\beta))}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

где D задано соотношением (2.9).

Отдельно остановимся на случае $\alpha+i\beta \in (1-i,1+i]$. Тогда функции семейства (2.1′) при $n=2$ примут вид $f_\beta(\zeta) = \zeta(1-\zeta^2)^{-(1+\beta)/2}$, $\beta \in (-1,1]$.

Образом $f_\beta(E)$ является область, ограниченная двусимметричным контуром, имеющим в $f(\pm i)=\infty$ два равных угла с величиной $(1+\beta)\pi/2$, вогнутым, когда $\beta \in [2-\sqrt{5},1]$, с точками перегиба $f(e^{\pm i\theta_1})$, $f(e^{\pm i(\pi-\theta_1)})$, когда $\beta \in (-1,2-\sqrt{5})$, где $\theta_1 = 1/2\arccos[(1+2\beta-\beta^2)/(2\beta)]$.

Уравнение (1.1) будет равносильно соотношению $\rho^2[\rho^2(\beta^2-\beta)+1+3\beta]=0$, поэтому критическими точками конформного радиуса являются

$$\zeta_0 = 0, \quad \zeta_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1+3\beta}{\beta-\beta^2}} \ \text{ при } \ \beta \in (-1,-1/3), \tag{2.13}$$

и единственная точка $\zeta_0=0$, если $\beta \in [-1/3,1]$. Тем самым доказана

Теорема 5. *Для экстремальных функций* (2.1″) *конформный радиус имеет единственную стационарную точку* $\zeta_0=0$, *если*

$$\alpha+i\beta \in (-1+i,-1/3+i] \cup (-1/3+i,13/15-i/5] \cup [1-i/3,1+i];$$

стационарными будут
три точки (2.8), *если* $\alpha+i\beta \in \Delta'$;
три точки (2.7), *если* $\alpha+i\beta \in (13/15-i/5,1-i/3)$;
три точки (2.11), *если* $\alpha+i\beta \in L_1^2$;
три точки (2.13), *если* $\alpha+i\beta \in (1-i,1-i/3)$;
три точки (2.6), *если* $\alpha+i\beta \in (-1/3+i,1+i)$;
пять точек (2.12), *если* $\alpha+i\beta \in G_1^{2-}$.

Здесь $\Delta' = \{(\alpha,\beta)\in\Delta : \alpha+\beta > 2/3\}$.

В качестве следствия этого утверждения сформулируем уточнение теоремы 3 из [1].

Теорема $2'$. *Если в подчинении* (1.11) $\alpha+i\beta\in\overline{G}_1^2\setminus L_1^2$, *то конформный радиус областей* $f(E)$ *имеет единственную критическую точку* $\zeta=0$, *а при* $\alpha+i\beta\in L_1^2$ *для областей* $f_{\alpha,\beta}(E)$, *где* $f_{\alpha,\beta}(\zeta)$ *заданы соотношением* $(2.1'')$, *стационарные точки будут иметь вид* (2.11).

Отметим, что так же, как и в [7], [8], можно исследовать поведение конформного радиуса экстремальных областей в окрестности критических точек. Например, $\zeta=0$ является точкой максимума при $\alpha+i\beta\in(-1+i,-1/3+i]$, ζ_1 и ζ_2 из (2.6) есть точки максимума и $\zeta=0$ — седловая точка поверхности конформного радиуса $R(f_{\alpha,1}(E), f_{\alpha,1}(\zeta))$, если $\alpha+i\beta\in(-1/3+i,1+i)$.

3. Свойства решений обратной краевой задачи в случае неединственности

Теорема 6. *Пусть регулярные функции* $f_{\alpha,1}(\zeta)$, $\alpha\in[-1,1]$, *заданы соотношением* $(2.1'')$, *а параметры* $\zeta=\zeta_k$, $k=0,1,2$, *для* $z=F_k(\zeta)$, *имеющей вид* (1.2), *определены* (2.6) *при* $\alpha\in(-1/3,1)$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Контуры* $\Gamma_k^-=F_k(e^{i\theta})$, $\theta\in(-\pi,\pi]$, *конечной длины имеют две угловые точки на оси симметрии с внешними углами, равными* 2π.
2. *Двусимметричный, осесимметричный контур* Γ_0^- *является*
   а) *простым, если* $\alpha\in[-1,-1/3)$,
   б) *разрезом по отрезку* $[-2i,2i]$ *при* $\alpha=-1/3$,
   в) *самопересекающимся, если* $\alpha\in(-1/3,1)$,
   г) *имеет четыре точки перегиба* $z_j=F_0(e^{i\theta_j})$, *где* $\theta_j=\pm 0{,}5\arccos\alpha+\pi j\in(-\pi,\pi]$, *а вращение*
$$a(\Gamma_0^-)=4\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1+3\alpha}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right] \tag{3.1}$$
   стремится к 6π *при* $\alpha\to-1$.
3. *Контуры* Γ_0^- *и* Γ_1^- *будут существенно разными.*

Доказательство. 1. Свойство 1 есть следствие того, что функция
$$F_k'(\zeta)=(1+\zeta^2)(1-\alpha\zeta^2)^{-(1+3\alpha)/(2\alpha)}(1-\overline{\zeta}_k\zeta)^2/(\zeta-\zeta_k)^2,$$
отличная от нуля в E, имеет нули 1-го порядка в точках $\zeta=\pm i$ и
$$l(\Gamma_k^-)=\int_{-\pi}^{\pi}|1+e^{i2\theta}|\,|1-\alpha e^{i2\theta}|^{-(1+3\alpha)/(2\alpha)}\,d\theta<\infty,$$
т. к. подинтегральная функция принимает конечные значения при $\alpha\in(-1,1)$. Параметры функций $F_k'(\zeta)$ вещественные, поэтому контуры Γ_k^- осесимметричны, а
$$F_0'(\zeta)=\zeta^{-2}(1+\zeta^2)(1-\alpha\zeta^2)^{-(1+3\alpha)/(2\alpha)} \tag{3.2}$$
порождает двусимметричный контур Γ_0^-.

2. Угол наклона касательной к контуру Γ_0^-
$$\gamma_{\Gamma_0^-}=\begin{cases}\gamma(\theta)+\pi/2, & \theta\in(-\pi/2,\pi/2);\\ \gamma(\theta)+3\pi/2, & \theta\in(-\pi,-\pi/2)\cup(\pi/2,\pi),\end{cases}$$
где $\gamma(\theta)=\frac{1+3\alpha}{2\alpha}\operatorname{arctg}\frac{\alpha\sin 2\theta}{1-\alpha\cos 2\theta}$, и точки перегиба находятся из условия $\gamma'(\theta)=0$, т. е. $(1+3\alpha)(\cos 2\theta-\alpha)=0$, поэтому для $a(\Gamma_0^-)$ получим соотношение (3.1), т. е. утверждение 2г) доказано.

Для обоснования свойства 2а) используется

Лемма 5. *Пусть при $n = 2$ коэффициенты $c_{-1}, c_{n-1}, c_{2n-1}, \ldots$ функции*

$$F_0(\zeta) = c_{-1}/\zeta + c_{n-1}\zeta^{n-1} + c_{2n-1}\zeta^{2n-1} + \cdots, \tag{3.3}$$

регулярной в $E \setminus \{0\}$ и непрерывной вплоть до единичной окружности, вещественные, а $F_0(1) > 0$, $F_0(-1) < 0$ — угловые точки контура $\Gamma_0^- = F_0(e^{i\theta})$ с внешними углами $2\alpha\pi$, $\alpha \in [0,1]$.

Если $\operatorname{Im} F_0(e^{i\theta}) = 0$ только при $\theta = 0$, $\theta = \pi$ и

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\arg dF_0(e^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} d\gamma_{\Gamma_0^-} = -2\pi, \tag{3.4}$$

$$a(\Gamma_0^-) = \int_{-\pi}^{\pi} |d\arg dF_0(e^{i\theta})| \le \begin{cases} 2\pi(4\alpha - 1), & \alpha \in [1/2, 1]; \\ 2\pi(3 - 4\alpha), & \alpha \in [0, 1/2), \end{cases} \tag{3.5}$$

то $z = F_0(\zeta)$ будет однолистной в $\overline{E}$.

Действительно, если связные симметричные составляющие Γ', Γ'' контура Γ_0^- простые, то в силу теоремы 1 из [9], [10] функция $F_0(\zeta)$ будет однолистной в $\overline{E}$. Предположим, что Γ', Γ'' непростые. Тогда в силу (3.4) существуют "петли" $\overline{\Gamma}' \subset \Gamma'$, $\overline{\Gamma}'' \subset \Gamma''$ (напр., [11]), где

$$\text{изм}\,\gamma_{\overline{\Gamma}'}(\theta) = \text{изм}\,\gamma_{\overline{\Gamma}''}(\theta) < -\pi,$$

поэтому углы наклона касательной в начальной точке $z_0^+ = F(e^{i\theta'})$ и в конечной точке $z_0^- = F(e^{i\theta''})$ "петли" отличаются на величину, меньшую чем $-\pi$. Таким образом, функция $-\gamma_{\Gamma'}(\theta)$ удовлетворяет следующим условиям: $-\gamma_{\Gamma'}(0) = \pi/2$, $-\gamma_{\Gamma'}(+0) = \alpha\pi$, $-\gamma_{\Gamma'}(\theta') = \delta_1\pi$, $-\gamma_{\Gamma'}(\theta'') = \delta_2\pi > \delta_1\pi + \pi$, $-\gamma_{\Gamma'}(\pi - 0) = 2\pi - \alpha\pi$, $-\gamma_{\Gamma'}(\pi) = 3\pi/2$.

Пусть $\alpha \ge 1/2$ и $\delta_1\pi \ge \alpha\pi$. Тогда $\delta_2\pi > \delta_1\pi + \pi \ge 2\pi - \alpha\pi$ и

$$\frac{1}{2}a(\Gamma_0^-) = V_0^{\pi}[-\gamma_{\Gamma'}(\theta)] \ge \min_{\substack{\delta_1\pi \ge \alpha\pi \\ \delta_2\pi > \delta_1\pi + \pi}} \left[\left(\delta_2\pi - \frac{\pi}{2}\right) + (\delta_2\pi - 2\pi + \alpha\pi) + \frac{3}{2}\pi - 2\pi + \alpha\pi\right] >$$
$$> \min_{\delta_1\pi \ge \alpha\pi} [2\delta_1\pi + 2\alpha\pi - \pi] \ge 4\alpha\pi - \pi.$$

Если $\delta_1\pi < \alpha\pi$, $\delta_1\pi > \pi - \alpha\pi$, то $\delta_2\pi > 2\pi - \alpha\pi$ и

$$\frac{1}{2}a(\Gamma_0^-) = V_0^{\pi}[-\gamma_{\Gamma'}(\theta)] \ge \min_{\substack{\delta_1\pi > \pi - \alpha\pi \\ \delta_1\pi < \alpha\pi}} \left[\left(\alpha\pi - \frac{\pi}{2}\right) + (\alpha\pi - \delta_1\pi) + \right.$$
$$\left. + (\delta_2\pi - \delta_1\pi) + (\delta_2\pi - 2\pi + \alpha\pi) + \left(\frac{3}{2}\pi - 2\pi + \alpha\pi\right)\right] =$$
$$= \min_{\delta_2\pi > \delta_1\pi + \pi} [4\alpha\pi + 2(\delta_2\pi - \delta_1\pi) - 3\pi] > 4\alpha\pi - \pi.$$

В случае, когда $\delta_1\pi < \alpha\pi$, $\delta_2\pi \le 2\pi - \alpha\pi$, имеем

$$\frac{1}{2}a(\Gamma_0^-) = V_0^{\pi}[-\gamma_{\Gamma'}(\theta)] \ge \min_{\substack{\delta_1\pi < \alpha\pi \\ \delta_2\pi \le 2\pi - \alpha\pi}} \left[\left(\alpha\pi - \frac{\pi}{2}\right) + (\alpha\pi - \delta_1\pi) + \right.$$
$$\left. + (\delta_2\pi - \delta_1\pi) + (2\pi - \alpha\pi - \delta_2\pi) + \left(\frac{3}{2}\pi - 2\pi + \alpha\pi\right)\right] \ge \min_{\delta_1\pi < \pi - \alpha\pi} [2\alpha\pi - 2\delta_1\pi + \pi] > 4\alpha\pi - \pi.$$

Полученные неравенства противоречат первому ограничению из (3.5), значит, наше предположение было неверным. Аналогичные рассуждения позволяют доказать однолистность $F(\zeta)$ в $\overline{E}$ при выполнении второго ограничения в (3.5). □

Отметим, что данное утверждение является дополнением к исследованиям из [12], где однолистность функций (3.3) при $n \ge 3$ обеспечивается с помощью $a(\Gamma_0^-) \le 2\pi(n-1)$.

В лемме 5 условие $\operatorname{Im} F_0(e^{i\theta}) = 0$ только при $\theta = 0$, $\theta = \pi$ можно заменить на неравенство $\operatorname{Im} F_0(i) < 0$, если контур Γ_0^- имеет только четыре точки перегиба. Для функций (1.2), когда

$F_0'(\zeta)$ из (3.2), это ограничение примет вид $F_0(1) < 0$, а $F_0(1) = 0$ при $\alpha = -1/3$, поэтому свойства 2а) и 2б) будут выполнены.

Для обоснования утверждений 2в) и 3 необходима

Лемма 6. *Пусть $F_1(\zeta)$ задано соотношением* (1.2) *и*

$$F_1(\zeta(\omega)) = -1/\omega + a_1\omega + 2^{-1}a_2\omega^2 + \cdots ,$$

где $\zeta(\omega) = (\omega + \zeta_1)/(1 + \overline{\zeta}_1\omega)$, $\zeta = \zeta_1$ является решением уравнения Гахова для регулярной в E функции $f(\zeta)$. Тогда

$$a_1 = \frac{1}{2!}(1 - |\zeta_1|^2)\{f(\zeta_1), \zeta_1\}, \quad a_2 = \frac{(1 - |\zeta_1|^2)^2}{3!}\left[\{f,\zeta\}' - 2\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\{f,\zeta\}\right]\Big|_{\zeta=\zeta_1}. \tag{3.6}$$

Здесь

$$\{f(\zeta), \zeta\} = \frac{f'''(\zeta)}{f'(\zeta)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right)^2$$

— *производная Шварца функции $f(\zeta)$.*

Действительно, при замене $(\zeta - \zeta_1)/(1 - \overline{\zeta}_1\zeta) = \omega$ в (1.2) для соотношения

$$\frac{F_1'(\zeta(\omega))}{f'(\zeta_1)(1 - |\zeta_1|^2)} = \frac{1}{\omega^2} + a_1 + a_2\omega + \cdots$$

получим

$$a_1 = \frac{1}{2!}(1 - |\zeta_1|^2)\left[\frac{f'''(\zeta_1)}{f'(\zeta_1)} - \frac{6\overline{\zeta}_1 f''(\zeta_1)}{(1 - |\zeta_1|^2)f'(\zeta_1)} + \frac{6(\overline{\zeta}_1)^2}{(1 - |\zeta_1|^2)^2}\right] =$$
$$= \frac{1}{2!}(1 - |\zeta_1|^2)\left[\frac{f'''(\zeta_1)}{f'(\zeta_1)} - 3\left(\frac{f''(\zeta_1)}{f'(\zeta_1)}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{f''(\zeta_1)}{f'(\zeta_1)}\right)^2\right] = \frac{1}{2!}(1 - |\zeta_1|^2)\{f(\zeta_1), \zeta_1\},$$

если $\zeta = \zeta_1$ — корень уравнения (1.1).

Аналог данного соотношения впервые был получен в [13] и применен при обосновании гипотезы М.Т. Нужина о существовании неоднолистных решений в случае неединственности решения обратной краевой задачи ([14], с. 55).

Если ζ_1 является решением уравнения Гахова, то

$$a_2 = \frac{1}{3!(1 - |\zeta_1|^2)}\left[\frac{f^{(\mathrm{IV})}(\zeta_1)}{f'(\zeta_1)}(1 - |\zeta_1|^2)^3 - 12\frac{f'''(\zeta_1)}{f'(\zeta_1)}\overline{\zeta}_1(1 - |\zeta_1|^2)^2 + \right.$$
$$\left. + 36(\overline{\zeta}_1)^2\frac{f'''(\zeta_1)}{f'(\zeta_1)}(1 - |\zeta_1|^2) - 24\overline{\zeta}_1^3\right] = \frac{(1 - |\zeta_1|^2)^2}{3!}\left[\frac{f^{(\mathrm{IV})}(\zeta_1)}{f'(\zeta_1)} - 6\frac{f'''(\zeta_1)}{f'(\zeta_1)}\frac{f''(\zeta_1)}{f'(\zeta_1)} + \right.$$
$$\left. + 9\left(\frac{f''(\zeta_1)}{f'(\zeta_1)}\right)^2 - 3\left(\frac{f''(\zeta_1)}{f'(\zeta_1)}\right)^3\right].$$

Тогда, учитывая равенство

$$\{f,\zeta\}' = \frac{f^{\mathrm{IV}}(\zeta)}{f'(\zeta)} - 4\frac{f'''(\zeta)f''(\zeta)}{(f'(\zeta))^2} + 3\left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right)^3,$$

получим (3.6). $\square$

Непосредственный подсчет коэффициента a_1 для функции $F_0(\zeta)$ показывает, что $|a_1| > 1$ при $\alpha \in (-1/3, 1)$, поэтому имеет место 2в) в силу внешней теоремы площадей [5].

3. Осесимметричный контур Γ_1^- не является двусимметричным, ибо $a_2 \neq 0$ при $\zeta = \zeta_1$, определяемом соотношением (2.6), значит, контуры Γ_0^-, Γ_1^- существенно разные.

Автор искренне благодарит проф. Л.А. Аксентьева за постоянное внимание к исследованиям и проф. А.М. Елизарова за неоценимую помощь при оформлении результатов.

Литература

1. Аксентьев Л.А., Казанцев А.В., Попов Н.И. *О теоремах единственности для внешней обратной краевой задачи в подклассах однолистных функций*// Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 8. – С. 3–13.
2. Аксентьев Л.А., Микка В.П. *О поведении конформного радиуса в подклассах однолистных областей* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 8. – С. 20–28.
3. Аксентьев Л.А. *Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области* // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 2. – С. 3–11.
4. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – 3-е изд.– М.: Наука, 1977. – 640 с.
5. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
6. Савелов А.А. *Плоские кривые.* – М.: Физматгиз, 1960. – 293 с.
7. Krzyž J.G. *Some remarks on the maxima of inner conformal radius* // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A. – 1992. – V. 46. – P. 57–61.
8. Kühnau R. *Maxima beim konformen Radius einfach zusammenhängender Gebiete* // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A. – 1992. – V. 46. – P. 63-73.
9. Аксентьев Л.А. *Применение принципа аргумента к исследованию условий однолистности.* I // Изв. вузов. Математика. – 1968. – № 12. – С. 3–15.
10. Аксентьев Л.А. *Применение принципа аргумента к исследованию условий однолистности.* II // Изв. вузов. Математика. – 1969. – № 3. – С. 3–15.
11. Umezawa T. *On the theory of univalent functions*// Tôhoku Math. J. – 1955. – V. 5. – № 3. – P. 218–228.
12. Микка В.П. *Два достаточных условия однолистности аналитических функций* // Матем. заметки. – 1976. – Т.19. – № 3. – С. 331–346.
13. Киселев А.В. *Геометрические свойства решений внешней обратной краевой задачи* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 7. – С. 20–25.
14. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. *Обратные краевые задачи и их приложения.* – 2-е изд. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965. – 333 с.

Марийский государственный университет

Поступили
первый вариант 12.03.2002
окончательыний вариант 12.03.2004