Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета по предмету «Математика». Очный тур. 2014–15 учебный год

9 класс. Решения задач

Задача 1

Пусть D — дискриминант приведенного квадратного трехчлена x^2+px+q. Найдите корни трехчлена, если известно, что они различны и один из них равен D, а другой равен $2D$.

Ответ. 1 и 2.

Решение. По теореме Виета имеем $p = -(D + 2D) = -3D$, $q = D \cdot 2D = 2D^2$. Поэтому данный трехчлен имеет вид $x^2-3Dx+2D^2$, а его дискриминант $D = (-3D)^2-4\cdot 2D^2 = D^2$. Уравнение $D = D^2$ имеет решения $D = 0$ и $D = 1$. В первом случае оба корня равны нулю, что противоречит условию. Во втором случае корни — это числа 1 и 2.

Замечание. Можно также заметить, что если $x_1 < x_2$ — корни данного трехчлена, то $x_2 - x_1 = \sqrt{D}$. Из условия вытекает, что $D > 0$, так что $x_2 = 2D$ и $x_1 = D$, откуда $D = \sqrt{D}$.

Задача 2

Три положительных числа, взятые в определенном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Если среднее из этих чисел уменьшить в 3 раза, то получится убывающая геометрическая прогрессия. Найти ее знаменатель.

Ответ. $3 - 2\sqrt{2}$.

Решение. Из условия следует, что знаменатель геометрической прогрессии положителен и что третье число меньше первого. Таким образом, арифметическая прогрессия тоже убывающая. Обозначим ее члены за $a + d$, a и $a - d$ соответственно ($d > 0$). Поскольку числа $a + d$, $a/3$ и $a - d$ образуют геометрическую прогрессию, средний ее член равен среднему геометрическому двух крайних, откуда

$$\left(\frac{a}{3}\right)^2 = (a+d)(a-d) \;\Rightarrow\; \frac{a^2}{9} = a^2 - d^2 \;\Rightarrow\; 8a^2 = 9d^2 \;\Rightarrow\; \frac{d}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Чтобы найти знаменатель прогрессии, можно вычислить отношение третьего члена ко второму:

$$\frac{a-d}{a/3} = 3\left(1 - \frac{d}{a}\right) = 3\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = 3 - 2\sqrt{2}.$$

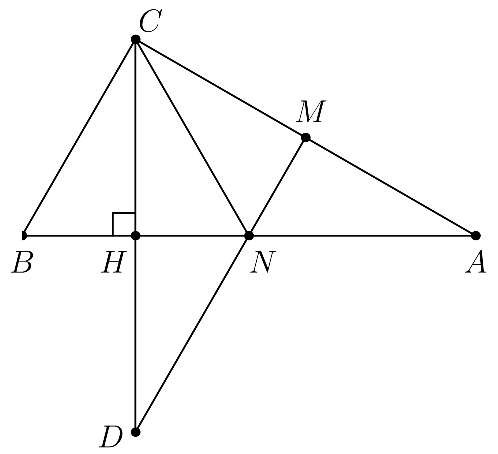
Примером такой прогрессии может служить последовательность $3 + 2\sqrt{2}$, 3, $3 - 2\sqrt{2}$. Если уменьшить средний член втрое, получится геометрическая прогрессия $3 + 2\sqrt{2}$, 1, $3 - 2\sqrt{2}$.

Задача 3

Найдите углы прямоугольного треугольника, если известно, что точка, симметричная вершине прямого угла относительно гипотенузы, лежит на прямой, проходящей через середины двух сторон треугольника.

Ответ. 30°, 60°, 90°.

Решение 1 (геометрическое). Применим стандартные обозначения: C — вершина прямого угла, A и B — вершины двух острых углов, $BC = a$, $AC = b$. Пусть CH — высота треугольника. Ясно, что точка D, симметричная вершине C относительно гипотенузы, лежит на прямой CH и $CH = DH$.



Сначала выясним, на какой из трех прямых, проходящих через середины сторон, может лежать точка D. Прямая, проходящая через середины катетов, делит отрезок CH пополам, а прямая, проходящая через середины ме́ньшего катета и гипотенузы, пересекает CH внутри треугольника. Следовательно, нужная прямая проходит через середины бо́льшего катета и гипотенузы. Обозначим эти точки буквами M и N соответственно. Имеем $MN \| BC$ как средняя линия, откуда $\angle CDM = \angle BCH$ как накрест лежащие. Отсюда следует, что прямоугольные треугольники BCH и DHN равны (по катету $CH = DH$ и острому углу). Поэтому $ND = BC = a$. Кроме того, ясно, что $CN = ND$ (NH — медиана и высота в $\triangle CDN$). Поскольку в прямоугольном треугольнике медиана равна половине гипотенузы, $CN = BN$. Таким образом, треугольник CBN — равносторонний, откуда $\angle B = 60^\circ$, $\angle A = 30^\circ$.

Решение 2 (алгебраическое). Будем использовать обозначения из первого решения. Дополнительно обозначим $AB = c$, $CH = h$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. По теореме Пифагора $c = \sqrt{a^2+b^2}$. Вычислив двумя способами удвоенную площадь треугольника ABC, получим $2S = ab = ch$, откуда $h = ab/\sqrt{a^2+b^2}$. Сравнивая углы в прямоугольных треугольниках, легко видеть, что $\angle BCH = \angle CDM = \alpha$, а $\angle DCM = \beta$. Поэтому треугольники ABC и CDM подобны. Из этого подобия получаем

$$\frac{BC}{AB} = \frac{CM}{CD} \iff \frac{a}{c} = \frac{b/2}{2h} \iff \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{4ab} \iff 4a^2 = a^2 + b^2.$$

Последнее равенство влечет $\operatorname{tg}\alpha = a/b = 1/\sqrt{3}$, откуда $\alpha = 30^\circ$.

Задача 4

Докажите, что если в числе 10011 между нулями вставить любое количество четверок, то получится число, делящееся на 47.

Первое решение. Имеем $10011 = 47 \cdot 213$, $104011 = 47 \cdot 2213$. Обозначим число, получающееся из 10011 вставлением k четверок между нулями символом a_k. Покажем, что если a_k делится на 47, то и a_{k+1} также делится на 47. Действительно, $a_{k+1} = 10a_k - 110 + 4011 = 10a_k + 3901 = 10a_k + 47 \cdot 83$ и оба слагаемых в правой части делятся на 47.

Второе решение. Имеем $10011 = 47 \cdot 213$, $104011 = 47 \cdot 2213$. Докажем, что

$$10\underbrace{44\ldots4}_{k\text{ раз}}011 = 47 \cdot \underbrace{22\ldots2}_{k+1\text{ раз}}13.$$

Имеем $22\ldots213 \cdot 47 = (22\ldots222 - 9) \cdot 47 = 11\ldots111 \cdot 94 - 423$. Начнем умножать число, записанное $k+3$ единицами на 94 столбиком (количество одинаковых цифр увеличилось засчет двух последних!). Мы получим

$$\begin{array}{r} \times\; 11\ldots1111 \\ 94 \\ \hline +\;\; 44\ldots4444 \\ 999\ldots999\; \\ \hline 1044\ldots4434 \end{array}$$

В числе $1044\ldots4434$ после нуля стоит $k+3$ цифры. Если мы вычтем из него 423, то получим число $1044\ldots4011$, в котором ровно k четверок.

Межрегиональная предметная олимпиада
Казанского федерального университета
по предмету «Математика»
Очный тур. 2014–15 учебный год

10 класс. Решения задач

Задача 1

На доске выписаны числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$. Разрешается дописать на доску сумму, разность или произведение любых двух различных чисел, уже написанных на доске. Докажите, что можно выписать число 1.

Решение. Выпишем на доску числа $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}+\sqrt{2}$. Затем выпишем их произведение, оно равно $5-2=3$. Затем выпишем числа $3-\sqrt{2}$ и $3+\sqrt{2}$. Их произведение будет равно $9-2=7$. Дальше получим $4=7-3$ и потом $1=4-3$. Ясно, что каждый раз мы использовали пару различных чисел. Существуют и другие способы. Например, получив число 3, можно затем выписать числа $3-\sqrt{5}$ и $3+\sqrt{5}$. Их произведение равно 4, а $4-3=1$. Еще можно получить число $\sqrt{10}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$, потом число $\sqrt{20}$, а потом число $10=\sqrt{100}$, а дальше три раза вычесть из него число 3.

Задача 2

На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют уравнению $y = x^2 + |y-x|$.

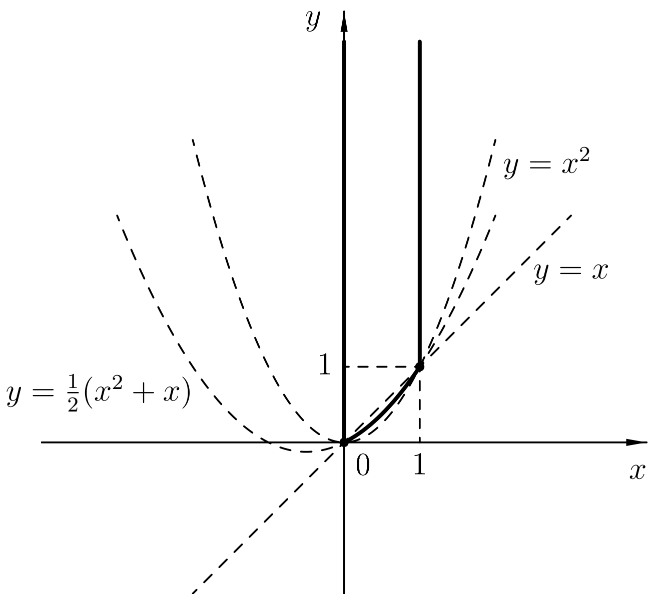
Решение. Обозначим требуемое множество точек буквой M. Запишем исходное уравнение в виде $y - x^2 = |y-x|$. Разберем два случая.

1) $y - x \geqslant 0$. Тогда модуль раскрывается со знаком «+», и исходное уравнение приобретает вид $x^2 - x = 0$. Его решением являются прямые $x = 0$ и $x = 1$. Условие $y \geqslant x$ оставляет от этих прямых два луча, направленных вверх и начинающихся в точках $(0, 0)$ и $(1, 1)$ соответственно. Оба этих луча лежат в M.

2) $y - x < 0$. Тогда модуль раскрывается со знаком «−», и исходное уравнение приобретает вид $y - x^2 = x - y$ или $y = \frac{1}{2}(x^2 + x)$. Графиком этой функции является парабола, проходящая через точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$. Условие $y < x$ означает, что $x^2 + x < 2x$ или $x^2 - x < 0$. Это неравенство выполнено при $x \in (0, 1)$. Следовательно, в множество M входит только дуга этой параболы, соединяющая точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

Из условия следует, что $y - x^2 \geqslant 0$, но проверять это неравенство нет необходимости, ибо правая часть после раскрытия модуля всегда неотрицательна.

Множество M изображено на рисунке.



Задача 3

Числовая арифметическая прогрессия состоит из четырех чисел, не равных нулю. После умножения ее третьего члена на некоторое отличное от единицы число она превратилась в геометрическую прогрессию. Найдите это число.

Ответ. $-4/5$.

Первое решение. Пусть члены исходной арифметической прогрессии равны $a-d$, a, $a+d$, $a+2d$ соответственно. После умножения ее третьего члена на некоторое ненулевое k получается геометрическая прогрессия $a-d$, a, $k(a+d)$, $a+2d$. Это равносильно тому, что второй и третий ее члены равны среднему геометрическому своих соседей. Отсюда следует система двух уравнений

$$a^2 = k(a-d)(a+d), \quad k^2(a+d)^2 = a(a+2d).$$

Разделим второе равенство на первое (все числа не равны нулю):

$$\frac{k^2(a+d)^2}{k(a-d)(a+d)} = \frac{a(a+2d)}{a^2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{(a+2d)(a-d)}{a(a+d)}.$$

Подставим это значение в первое уравнение:

$$a^2 = \frac{(a+2d)(a-d)}{a(a+d)} \cdot (a-d)(a+d) \quad \Rightarrow \quad a^3 = (a+2d)(a^2-2ad+d^2)$$

$$\Rightarrow \quad a^3 = a^3 - 3ad^2 + 2d^3 \quad \Rightarrow \quad 2d^3 = 3ad^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{a} = \frac{3}{2}.$$

Из первого уравнения системы следует, что

$$\frac{1}{k} = \frac{a^2-d^2}{a^2} = 1 - \frac{d^2}{a^2} = 1 - \frac{9}{4} = -\frac{5}{4}.$$

Отсюда $k = -4/5 = -0{,}8$.

Пример такой прогрессии можно получить, взяв $a = 2$, $d = 3$. Тогда арифметическая прогрессия примет вид -1, 2, 5, 8. А соответствующая геометрическая прогрессия будет -1, 2, -4, 8.

Второе решение. Заметим, что задачу можно переформулировать следующим образом: в геометрической прогрессии из четырех членов третий член умножили на некоторое ненулевое число m и получили арифметическую прогрессию. Найти $1/m$.

Пусть геометрическая прогрессия имеет вид b/q, b, bq, bq^2, а арифметическая, соответственно, b/q, b, bqm, bq^2. Это равносильно тому, что каждый из ее средних членов равен среднему арифметическому своих соседей. Это приводит к системе уравнений:

$$2b = \frac{b}{q} + bqm, \quad 2bqm = b + bq^2.$$

Разделим оба уравнения на $b \neq 0$, выразим mq из первого и подставим во второе уравнение:

$$mq = 2 - \frac{1}{q},\ 2mq = 1 + q^2 \ \Rightarrow\ 2\left(2 - \frac{1}{q}\right) = 1 + q^2 \ \Rightarrow\ 4q - 2 = q + q^3 \ \Rightarrow\ q^3 - 3q + 2 = 0.$$

Последнее уравнение, очевидно, имеет корень $q = 1$. Разделим $q^3 - 3q + 2$ на $q - 1$ и получим $q^2 + q - 2 = (q-1)(q+2)$. Следовательно,

$$q^3 - 3q + 2 = (q-1)^2(q+2) = 0,$$

откуда $q = -2$ или $q = 1$. Второй случай невозможен по условию. Значит, $q = -2$, а

$$m = \frac{2}{q} - \frac{1}{q^2} = -1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}.$$

Отсюда $1/m = -4/5$.

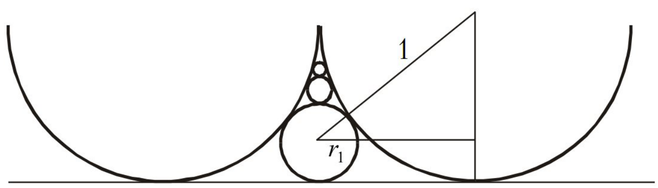
Разложение выражения $q^3 - 3q + 2$ на множители можно получить и группировкой:

$$q^3 - 3q + 2 = q^3 - q - 2q + 2 = q(q^2-1) - 2(q-1) = q(q-1)(q+1) - 2(q-1) = (q-1)(q(q+1)-2).$$

Дальше второй множитель раскладывается решением квадратного уравнения $q^2 + q - 2 = 0$.

Задача 4

На плоскости расположены две касающиеся друг друга внешним образом окружности радиуса 1. К ним проведена внешняя касательная. В фигуру, заключенную между окружностями и касательной, вписывается первый круг, затем в фигуру, образовавшуюся между двумя исходными окружностями и первым кругом, вписывается второй круг и т.д. (см. рис.) Для каждого n найдите суммарную длину диаметров вписанных кругов, полученных на n-ом шаге.



Ответ. $\dfrac{n}{n+1}$.

Решение. Обозначим радиус и диаметр k-го круга символами r_k и d_k соответственно. Покажем, что $d_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$. Из соображений симметрии ясно, что центры всех кругов лежат на прямой, касающейся обеих окружностей и перпендикулярной их общей внешней касательной.

Сначала найдем r_1. Из прямоугольного треугольника, изображенного на рисунке, получим по теореме Пифагора $(1+r_1)^2 = 1^2+(1-r_1)^2$. Отсюда $4r_1 = 1$, и $r_1 = 1/4$, $d_1 = 1/2$. Теперь найдем r_2. Из аналогичного прямоугольного треугольника с вершиной в центре второго круга получим $(1+r_2)^2 = 1^2+(1-d_1-r_2)^2$ или $(1+r_2)^2 = 1^2+(1/2-r_2)^2$. Раскрыв скобки, придем к уравнению $3r_2 = 1/4$, откуда $r_2 = 1/12$, $d_2 = 1/6$. Таким образом, утверждение $d_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$ верно для $k = 1$ и $k = 2$.

Имеет место следующая формула:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)} = 1-\frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}. \qquad (*)$$

Ее можно доказать по индукции, либо заметить, что

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

Тогда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1-\frac{1}{k+1}.$$

Воспользуемся этой формулой, чтобы доказать по индукции, что $d_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$ для всех натуральных k. База индукции уже проверена. Докажем переход. Предположим, что эта формула верна для всех $k = 1,\ldots,n$. Докажем, что она верна и при $k = n+1$. Из прямоугольного треугольника гипотенуза которого соединяет центр правой окружности и $(n+1)$-го круга получим

$$(1+r_{n+1})^2 = 1^2+(1-(d_1+d_2+\ldots+d_n)-r_{n+1})^2.$$

Из формулы $(*)$ следует, что $1-(d_1+d_2+\ldots+d_n) = \dfrac{1}{n+1}$. Следовательно, раскрыв скобки, получим относительно r_{n+1} уравнение

$$2r_{n+1} = -\frac{2}{n+1}r_{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Решив это уравнение, найдем

$$r_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

Таким образом, формула для нахождения d_k доказана. Сумма первых k диаметров равняется $1-\dfrac{1}{k+1}$ по той же формуле $(*)$.

Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета по предмету «Математика» Очный тур. 2014–15 учебный год

11 класс. Решения задач

Задача 1

Найдите
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin\alpha\right)^{-1}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\alpha\right)^{-1},$$
если $\sin\alpha+\cos\alpha=1/5$.

Ответ. 10.

Решение. Пусть $\sin\alpha+\cos\alpha=a$. Тогда $a^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$. Преобразуем данное выражение
$$\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin\alpha}+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin\alpha}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin\alpha\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\alpha\right)}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}+\sin\alpha+\cos\alpha}{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\alpha+\cos\alpha)+\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}+a}{\frac{1}{2}+\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{a^2-1}{2}}=\frac{2(\sqrt{2}+a)}{1+a\sqrt{2}+a^2-1}=$$
$$=\frac{2(\sqrt{2}+a)}{a\sqrt{2}+a^2}=\frac{2(\sqrt{2}+a)}{a(\sqrt{2}+a)}=\frac{2}{a}.$$

Задача 2

Решите систему уравнений $x^{x+y}=y^3$, $y^{x+y}=x^{12}$.

Ответ. $x=1$, $y=1$ и $x=2$, $y=4$.

Решение. ОДЗ: $x,y>0$. Если $x=1$, то ясно, что $y=1$ и наоборот. Пусть теперь $x,y\neq 1$. Прологарифмируем первое уравнение по основанию y, а второе — по основанию x. Получим $(x+y)\log_y x=3$, $(x+y)\log_x y=12$. Ни один из множителей не равен нулю ($x+y>0$), так что можно разделить одно уравнение на другое: $(\log_y x)^2=1/4$. Отсюда имеем $\log_y x=\pm1/2$. Если $\log_y x=1/2$, то $y=x^2$. Подставим это во второе уравнение исходной системы и получим $y^{x+y}=(x^2)^6=y^6$, откуда $x+y=6$. Следовательно, $x^2+x=6$, откуда $x=2$ (корень $x=-3$ не входит в ОДЗ), $y=x^2=4$. Если же $\log_y x=-1/2$, то $x=y^{-1/2}$. Подставим это во второе уравнение исходной системы и получим $x+y=-6$, что невозможно.

Задача 3

Имеется куб с ребром длины 1. На каждом из его ребер и на одной из главных диагоналей (длины $\sqrt{3}$) выбраны направления. Какую наименьшую длину может иметь сумма полученных 13 векторов?

Ответ. $\sqrt{3}$.

Решение. Выберем базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ из трех векторов, идущих по сторонам куба, так, чтобы вектор выбранной диагонали равнялся $\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$. Каждый из четырех векторов, параллельных $\vec{e}_1$, будет иметь вид $\pm\vec{e}_1$. Аналогично, еще четыре вектора будут иметь вид $\pm\vec{e}_2$, и еще четыре — $\pm\vec{e}_3$. Поэтому сумма всех 13 векторов будет иметь вид $k\vec{e}_1+m\vec{e}_2+n\vec{e}_3$, где числа k, m, n нечетны, как сумма пяти чисел вида ± 1. Следовательно, длина этой суммы будет равна $\sqrt{k^2+m^2+n^2} \geqslant \sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$, так как квадрат любого нечетного числа не меньше 1. Пример, когда эта сумма равна $\sqrt{3}$, может выглядеть, например, так: Разобьем ребра куба на пары параллельных и поставим в каждой паре стрелки в разные стороны. Тогда сумма всех векторов на ребрах будет равна $\vec{0}$.

Задача 4

Дана функция $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$. Функция $g(x)$ определяется равенством $g(x)=\underbrace{f(f\ldots(f(x))\ldots)}_{2015\text{ раз}}$ (здесь функция $f(x)$ последовательно применяется 2015 раз). Решите уравнение $g(x)=\pi$.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{1-2015\pi}$.

Решение. Вычислим

$$f(f(x))=\frac{\dfrac{x}{1+x}}{1+\dfrac{x}{1+x}}=\frac{x}{1+2x}, \qquad f(f(f(x)))=\frac{\dfrac{x}{1+2x}}{1+\dfrac{x}{1+2x}}=\frac{x}{1+3x}.$$

Возникает гипотеза, что $\underbrace{f(f\ldots(f(x))\ldots)}_{n\text{ раз}}=\dfrac{x}{1+nx}$. Она легко доказывается по индукции:

$$\underbrace{f(f\ldots(f(x))\ldots)}_{n+1\text{ раз}}=\frac{\dfrac{x}{1+nx}}{1+\dfrac{x}{1+nx}}=\frac{x}{1+(n+1)x}.$$

Следовательно, $g(x)=\dfrac{x}{1+2015x}$. Решая уравнение $\dfrac{x}{1+2015x}=\pi$, получаем $x=\dfrac{\pi}{1-2015\pi}$.