ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 12 (463)

УДК 517.977

Е.В. АКСЕНЮШКИНА

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ТЕРМИНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Линейные по фазовому состоянию задачи оптимизации динамических систем при наличии терминальных ограничений являются типичным объектом численного анализа в теории и приложениях оптимального управления [1]–[4]. Для решения этого класса задач предпочтение, как правило, отдается двойственным методам, которые сводят вариационную проблему к конечномерной задаче выпуклого программирования относительно множителей Лагранжа. Платой за столь элегантную редукцию является отсутствие свойства дифференцируемости целевой функции в двойственной задаче.

В данной работе линейная задача с ограничениями рассматривается в канонической форме (без фазовых переменных) с помощью набора интегральных функционалов, зависящих только от управления. На основе метода параметризации целевой функции [5] задача сводится к последовательности специальных задач оптимального управления (типа минимума нормы конечного состояния) без терминальных ограничений. Для решения квадратичной вспомогательной задачи разработан экономичный метод нелокального характера (каждое улучшение — одна задача Коши), порождающий минимизирующую последовательность управлений.

1. Постановка задачи. Подход к решению

Рассмотрим интегральную задачу с ограничениями

$$\begin{gathered}\int_T g_0(u(t),t)dt \to \min, \quad u \in V, \\ \int_T g_i(u(t),t)dt = a_i, \quad i=\overline{1,m},\end{gathered} \tag{1}$$

на множестве допустимых управлений

$$V = \{u \in L^r_\infty(T) : u(t) \in U,\ t \in T = [t_0, t_1]\}.$$

Здесь образующие функции $g_i(u,t)$, $i=\overline{0,m}$, непрерывны по $u \in U$, измеримы и ограничены по $t \in T$ и множество $U \subset R^r$ компактно.

В связи с данной постановкой следует отметить, что стандартная линейная по состоянию задача с терминальными ограничениями

$$\begin{gathered}\langle c^0, x(t_1)\rangle \to \min, \quad u \in V, \quad \langle c^i, x(t_1)\rangle = \alpha_i, \quad i=\overline{1,m}, \\ \dot{x} = A(t)x + b(u,t), \quad x(t_0) = x^0,\end{gathered}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99-01-400).

элементарно сводится к канонической форме (1) на основе интегрального представления скалярных произведений с помощью сопряженной системы

$$\langle c^i, x(t_1)\rangle = \int_T \langle \psi^i(t), b(u(t),t)\rangle dt + \langle c^i, x(t_0)\rangle,$$
$$\psi^i(t):\ \dot{\psi} = -A(t)^T\psi,\ \ \psi(t_1) = c^i,\ \ i = \overline{0,m}.$$

Представим задачу (1) в дифференциальной форме, используя фазовые переменные

$$y_i(t) = \int_{t_0}^{t} g_i(u(\tau),\tau)d\tau,\ \ i = \overline{0,m}.$$

В результате получаем динамический вариант задачи (1)

$$\dot{y_i}(t) = g_i(u,t),\ \ y_i(t_0) = 0,\ \ i = \overline{0,m},$$
$$y_0(t_1) \to \min,\ \ y_i(t_1) = a_i,\ \ i = \overline{1,m},$$
$$u \in V.$$

Пусть $D \subset R^{m+1}$ — множество достижимости y-системы в момент времени t_1 (выпуклый компакт). В пространстве R^{m+1} переменных $z = (z_0, z_1, \dots, z_m)$ задача представляется в конечномерной форме

$$z_0 \to \min,\ \ z_i = a_i,\ \ i = \overline{1,m},\ \ z \in D. \quad (2)$$

Для численного решения данной задачи возьмем за основу метод параметризации целевой функции ([5], с. 185). Приведем основные соотношения метода.

Пусть $z^* = (z_0^*, z_1^*, \dots, z_m^*)$ — решение задачи (2). Образуем функцию-свертку с параметром β

$$Q(z,\beta) = (z_0 - \beta)^2 + \sum_{i=1}^{m}(z_i - a_i)^2$$

и сформулируем вспомогательную задачу проектирования на множество D

$$Q(z,\beta) \to \min,\ \ z \in D. \quad (3)$$

Пусть $z(\beta) = (z_0(\beta), z_1(\beta), \dots, z_m(\beta))$ — решение этой задачи, β_* — минимальное β, при котором значение задачи (3) $Q(z(\beta),\beta)$ равно нулю.

Связь между задачами (2), (3) вполне очевидна: $z_i^* = z_i(\beta_*)$, $i = \overline{0,m}$. Для отыскания β_* строится последовательность β_l, $l = 0, 1, \dots$, с условиями

$$\beta_l \le \beta_{l+1} \le \beta_*,\ \ \beta_l \to \beta_*,\ \ l \to \infty.$$

Величина β_0 находится как значение простейшей задачи

$$z_0 \to \min,\ \ z \in D\ \ \left(\int_T g_0(u(t),t)dt \to \min,\ \ u \in V\right).$$

Далее действует итерационная формула

$$\beta_{l+1} = \beta_l + \sqrt{Q(z(\beta_l),\beta_l)},\ \ l = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Таким образом, исходная задача (2) сводится к последовательному решению задач (3) для $\beta = \beta_l$ в рамках формулы пересчета (4).

Понятно, что эффективность метода в целом связана с возможностью “быстрого” решения задачи (3). Построим специальный метод численного решения этой задачи, обладающий свойством нелокального улучшения по функционалу на каждой итерации.

2. Квадратичная задача. Процедура улучшения

Зафиксируем параметр β и представим задачу (3) в динамической постановке (с помощью фазовых переменных $y_i(t)$ и управления $u(t)$) с корректирующим множителем при функционале

$$S(u) = \frac{1}{2}\left[(y_0(t_1) - \beta)^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i(t_1) - a_i)^2\right] \to \min, \quad u \in V,$$

$$\dot{y}_i = g_i(u,t), \quad y_i(t_0) = 0, \quad i = \overline{0,m}.$$

Для удобства записи введем векторные объекты

$$y = (y_0, y_1, \ldots, y_m), \quad g = (g_0, g_1, \ldots, g_m), \quad a = (\beta, a_1, \ldots, a_m)$$

и сформулируем задачу в виде

$$S(u) = \frac{1}{2}\langle y(t_1) - a, y(t_1) - a\rangle \to \min, \quad u \in V, \qquad \dot{y} = g(u,t), \quad y(t_0) = 0. \tag{5}$$

На первом этапе получим конструктивное представление для приращения функционала $S(u)$. Для пары управлений $u, v \in V$ с соответствующими траекториями $y(t,u)$, $y(t,v)$ имеем

$$\Delta_v S(u) = \langle y(t_1,u) - a, \Delta y(t_1)\rangle + \frac{1}{2}\langle \Delta y(t_1), \Delta y(t_1)\rangle = S_1 + S_2.$$

Здесь приращение $\Delta y(t) = y(t,v) - y(t,u)$ определяется уравнением

$$\Delta\dot{y}(t) = \Delta_{v(t)} g(u(t),t), \quad \Delta y(t_0) = 0.$$

Следовательно,

$$S_1 = \int_T \langle y(t_1,u) - a, \Delta_{v(t)} g(u(t),t)\rangle dt.$$

Далее, рассмотрим тождество

$$\frac{d}{dt}\langle \Delta y(t), \Delta y(t)\rangle = 2\langle \Delta\dot{y}(t), \Delta y(t)\rangle.$$

После интегрирования получаем

$$S_2 = \int_T \langle \Delta y(t), \Delta_{v(t)} g(u(t),t)\rangle dt.$$

В результате требуемая формула имеет вид

$$\Delta_v S(u) = \int_T \langle p(t,u,y(t,v)), \Delta_{v(t)} g(u(t),t)\rangle dt, \tag{6}$$

где вспомогательная вектор-функция p определяется соотношением

$$p(t,u,y) = y(t_1,u) - a + y - y(t,u).$$

Формула (6) позволяет организовать процедуру нелокального улучшения управления $u \in V$ на основе минимизирующего управления

$$u^*(p,t) = \arg\min_{w \in U}\langle p, g(w,t)\rangle.$$

Процедура улучшения.

1) Сформируем управление $v^*(y,t) = u^*(p(t,u,y),t)$, $y \in R^{m+1}$, $t \in T$.

2) Найдем решение $y(t)$ фазовой системы

$$\dot{y} = g(v^*(y,t),t), \quad y(t_0) = 0,$$

вместе с управлением $v(t) = v^*(y(t),t)$, $t \in T$.

Выходное управление $v(t)$ характеризуется соотношением $(y(t) = y(t, v))$

$$v(t) = \arg\min_{w \in U} \langle p(t, u, y(t, v)), g(w, t) \rangle$$

и согласно формуле (6) обеспечивает свойство улучшения $\Delta_v S(u) \le 0$.

Подчеркнем экономичность процедуры: вычислительные затраты на одно улучшение — одно интегрирование y-системы.

3. Итерационный метод. Сходимость

Для построения метода последовательных приближений со свойством сходимости проведем итеративную регуляризацию целевого функционала в задаче (5).

Пусть $k = 0, 1, \ldots$ — номер итерации, $(u^k(t), y^k(t))$ — соответствующая допустимая пара. Введем вспомогательный функционал

$$S_\varepsilon(u, u^k) = S(u) + \varepsilon J(u, u^k)$$

с параметром регуляризации $\varepsilon \ge 0$ и интегральным стабилизатором

$$J(u, u^k) = \frac{1}{2} \int_T \|y(t, u) - y^k(t)\|^2 dt.$$

Найдем управление u^{k+1} из условия уменьшения функционала $S_\varepsilon(u, u^k) : \Delta S_\varepsilon(u^{k+1}, u^k) \le 0$. При этом получаем оценку улучшения по исходному функционалу

$$S(u^{k+1}) - S(u^k) \le -\varepsilon J(u^{k+1}, u^k). \tag{7}$$

Для построения очередного приближения $u^{k+1}(t)$ получим формулу приращения для функционала $S_\varepsilon(u, u^k)$ на паре u^k, u. Согласно определению

$$\Delta S_\varepsilon(u, u^k) = \Delta_u S(u^k) + \varepsilon J(u, u^k).$$

Формула приращения функционала S имеет вид (6). Найдем аналогичное представление для $J(u, u^k)$.

Положим $\Delta y^k(t) = y(t, u) - y^k(t)$, $t \in T$. Тогда выполняется уравнение

$$\Delta \dot{y}^k(t) = \Delta_{u(t)} g(u^k(t), t), \quad \Delta y^k(t_0) = 0.$$

Из тождества

$$\frac{d}{dt} \langle \Delta y^k(t), \Delta y^k(t) \rangle = 2 \langle \Delta \dot{y}^k(t), \Delta y^k(t) \rangle, \quad t \in T,$$

после интегрирования по $t \in [t_0, \tau]$, $\tau \in T$, получаем

$$\frac{1}{2} \langle \Delta y^k(\tau), \Delta y^k(\tau) \rangle = \int_{t_0}^{\tau} \langle \Delta y^k(t), \Delta_{u(t)} g(u^k(t), t) \rangle dt.$$

Отсюда

$$J(u, u^k) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{\tau} \langle \Delta y^k(t), \Delta_{u(t)} g(u^k(t), t) \rangle dt\, d\tau.$$

Изменяя порядок интегрирования, получаем итоговое представление

$$J(u, u^k) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t}^{t_1} d\tau \langle \Delta y^k(t), \Delta_{u(t)} g(u^k(t), t) \rangle dt = \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) \langle \Delta y^k(t), \Delta_{u(t)} g(u^k(t), t) \rangle dt.$$

Отсюда и из (6) получаем требуемое выражение

$$\Delta S_\varepsilon(u, u^k) = \int_T \langle p_\varepsilon(t, u^k, y(t, u)), \Delta_{u(t)} g(u^k(t), t) \rangle dt,$$

$$p_\varepsilon(t, u^k, y) = y^k(t_1) - a + (1 + \varepsilon(t_1 - t))(y - y^k(t)).$$

Данное представление сразу определяет процедуру итерационного улучшения управления u^k по функционалу S_ε:
1) сформируем управление $v^k(y,t) = u^*(p_\varepsilon(t,u^k,y),t)$, $y \in R^{m+1}$, $t \in T$;
2) найдем решение $y^{k+1}(t)$ фазовой системы

$$\dot{y} = g(v^k(y,t),t), \quad y(t_0) = 0,$$

вместе с управлением $u^{k+1}(t) = v^k(y^{k+1}(t),t)$, $t \in T$.

Трудоемкость итерации — одна задача Коши для y-системы с экстремальным управлением v^k. При этом имеет место оценка улучшения (7).

Рассмотрим вопрос о сходимости метода. Покажем, что последовательность $\{u^k\}$ является минимизирующей в задаче (5): $S(u^k) \to S(u^*)$, $k \to \infty$, где $u^* \in V$ — оптимальное управление.

Из доказательства формулы приращения (6) для функционала S следует, что

$$\Delta_v S(u) \geq S_1 = \int_T \langle y(t_1,u) - a, \Delta_{v(t)} g(u(t),t)\rangle dt.$$

Полагая здесь $u = u^k$, $v = u^*$, получаем оценку сверху

$$S(u^k) - S(u^*) \leq \int_T \langle a - y^k(t_1), \Delta_{u^*(t)} g(u^k(t),t)\rangle dt. \tag{8}$$

Согласно построению

$$u^{k+1}(t) = \arg\min_{u \in U} \langle p_\varepsilon(t,u^k,y^{k+1}(t)), g(u,t)\rangle, \quad t \in T,$$

т. е. выполняется неравенство

$$\int_T \langle p_\varepsilon(t,u^k,y^{k+1}(t)), \Delta_{v(t)} g(u^{k+1}(t),t)\rangle dt \geq 0, \quad v(t) \in U.$$

Воспользуемся очевидным представлением

$$\Delta_v g(u^{k+1},t) = \Delta_v g(u^k,t) + \Delta_{u^k} g(u^{k+1},t)$$

и положим $v = u^*$. Тогда с учетом формулы приращения для функционала S_ε предыдущее неравенство принимает вид

$$\int_T \langle p_\varepsilon(t,u^k,y^{k+1}(t)), \Delta_{u^*(t)} g(u^k(t),t)\rangle dt - \Delta S_\varepsilon(u^{k+1},u^k) \geq 0.$$

Отсюда, принимая во внимание выражения для p_ε, S_ε, получаем оценку сверху для правой части из (8)

$$\begin{aligned}\int_T \langle a - y^k(t_1), \Delta_{u^*(t)} g(u^k(t),t)\rangle dt &\leq \int_T (1+\varepsilon(t_1-t))\langle y^{k+1}(t) - y^k(t), \Delta_{u^*(t)} g(u^k(t),t)\rangle dt + \\ &+ S(u^k) - S(u^{k+1}) - \varepsilon J(u^{k+1},u^k) \leq \\ &\leq \int_T (1+\varepsilon(t_1-t))\|y^{k+1}(t) - y^k(t)\|\,\|\Delta_{u^*(t)} g(u^k(t),t)\| dt + S(u^k) - S(u^{k+1}).\end{aligned}$$

Далее, в силу непрерывности вектор-функции $g(u,t)$ по $u \in U$ и компактности множества U имеет место ограниченность приращения: для любой пары $u, v \in V$

$$\|\Delta_{v(t)} g(u(t),t)\| \leq C_1, \quad t \in T.$$

Следовательно, последний интеграл оценивается сверху величиной

$$C_1(1+\varepsilon(t_1-t_0)) \int_T \|y^{k+1}(t) - y^k(t)\| dt.$$

Кроме того, на основании известного неравенства для норм

$$\int_T \|y^{k+1}(t) - y^k(t)\| dt \le C_2 [J(u^{k+1}, u^k)]^{\frac{1}{2}}.$$

В совокупности, отправляясь от неравенства (8), получаем итоговую оценку вида

$$S(u^{k+1}) - S(u^*) \le C(1 + \varepsilon(t_1 - t_0))[J(u^{k+1}, u^k)]^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Остается заметить, что из (7)

$$J(u^{k+1}, u^k) \le \frac{1}{\varepsilon}[S(u^k) - S(u^{k+1})], \tag{10}$$

причем $S(u^k) - S(u^{k+1}) \to 0$, $k \to \infty$, вследствие монотонности последовательности $\{S(u^k)\}$.

Таким образом, последовательность $\{u^k\}$ является минимизирующей в задаче (5) для любого $\varepsilon > 0$.

Отметим, что при $\varepsilon = 0$ (без регуляризации) это утверждение, вообще говоря, не имеет места.

В заключение обсудим вопрос о выборе параметра регуляризации ε. С точки зрения неравенства (9) малые значения ε являются предпочтительными. С другой стороны, на основании оценки (10) малость ε приводит к замедлению сходимости $J(u^{k+1}, u^k) \to 0$, $k \to \infty$, что в свою очередь негативно влияет на скорость сходимости по функционалу S. Думается, что вопрос о рациональном выборе параметра ε следует решать в рамках вычислительного эксперимента.

Тем не менее, некоторое компромиссное значение параметра ε можно получить, если объединить оценки (9), (10),

$$\begin{gathered} S(u^{k+1}) - S(u^*) \le C\varphi(\varepsilon)[S(u^k) - S(u^{k+1})]^{\frac{1}{2}}, \\ \varphi(\varepsilon) = \frac{1 + \varepsilon(t_1 - t_0)}{\sqrt{\varepsilon}}. \end{gathered} \tag{11}$$

Следовательно, задача оптимизации оценки имеет вид

$$\varphi(\varepsilon) \to \min, \quad \varepsilon > 0.$$

Поскольку $\varphi(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon \to \infty$, то решением задачи является стационарная точка функции $\varphi(\varepsilon) : \bar{\varepsilon} = (t_1 - t_0)^{-1}$. Это значение можно считать теоретической рекомендацией для выбора ε. Ограниченность этого выбора связана с тем, что в оценке (11) величина приращения $S(u^k) - S(u^{k+1})$ зависит от ε, но не может быть учтена в ε-задаче.

Литература

1. Федоренко Р.П. *Приближенное решение задач оптимального управления.* – М.: Наука, 1978. – 408 с.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Конструктивные методы оптимизации.* Ч. 2. *Задачи управления.* – Минск: Изд-во "Университетское", 1984. – 207 с.
3. Сенявин М.М., Уланов Г.М. *Решение задачи накопления отклонений с терминальными фазовыми ограничениями* // Автоматика и телемеханика. – 1984. – № 7. – С. 36–44.
4. Срочко В.А. *Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления.* – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1989. – 160 с.
5. Евтушенко Ю.Г. *Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации.* – М.: Наука, 1982. – 432 с.

Иркутский государственный университет

Поступила
28.04.2000