ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 8 (531)

УДК 517.929

Б.А. КАЦ

ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА КОШИ ПО КРИВОЙ, ТЕРЯЮЩЕЙ СПРЯМЛЯЕМОСТЬ В ТОЧКЕ

1. Введение

В данной статье продолжается изучение условий, при которых интеграл Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \tag{1}$$

представляет функцию, имеющую в каждой точке t контура интегрирования Γ непрерывные граничные значения с обеих сторон. Здесь предполагается, что Γ есть простая замкнутая или разомкнутая кривая на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а f — заданная на этой кривой функция, удовлетворяющая условию Гёльдера

$$\sup\left\{\frac{|f(t') - f(t'')|}{|t' - t''|^\nu} : t', t'' \in \Gamma,\ t' \neq t''\right\} \equiv h_\nu(f, \Gamma) < \infty \tag{2}$$

с каким-либо показателем $\nu \in (0, 1]$. Ниже через $H_\nu(\Gamma)$ обозначаем пространство Гёльдера, т. е. множество всех заданных на Γ функций, удовлетворяющих условию (2).

Функция $\Phi(z)$ голоморфна в $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ во всех случаях, когда интеграл в (1) существует в каком-либо традиционном смысле (напр., если кривая Γ спрямляема, а $f \in L^1(ds)$, где ds — мера, порожденная длиной). Вопрос о существовании и свойствах граничных значений этой функции, т. е. пределов $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$, получающихся при приближении z к точке $t \in \Gamma$ слева и справа соответственно на протяжении значительного времени вызывает интерес в связи с применением интеграла Коши при решении краевых задач для голоморфных функций [1], [2]. Еще Сохоцкому, Гарнаку и Морере было известно, что интеграл (1) по замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ имеет непрерывные граничные значения на Γ, если его плотность $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с любым показателем из указанного выше промежутка [2]. При этом разность граничных значений равна плотности интеграла

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t) \tag{3}$$

(это равенство, называемое формулой Сохоцкого, и лежит в основе приложений интеграла (1) в краевых задачах).

Одним из наиболее важных достижений в этой области является результат, полученный независимо друг от друга в [3] и [4]. Это оценка модуля непрерывности интеграла (1) по спрямляемой (вообще говоря, негладкой) кривой Γ через модуль непрерывности его плотности f и некоторые величины, характеризующие метрические свойства Γ. В частности, выяснилось, что если $f \in H_\nu(\Gamma)$ при $\nu > 1/2$, то граничные значения $\Phi^\pm(t)$ существуют и непрерывны без каких-либо дополнительных ограничений на спрямляемую кривую Γ.

В [3] установлено, что эта оценка неулучшаема в терминах метрических характеристик кривой Γ. В частности, для произвольно фиксированного $\nu \in (0, 1/2]$ построены такая спрямляемая

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 06-01-81019-Бел_а.

кривая Γ_ν и такая заданная на ней функция $f_\nu(t) \in H_\nu(\Gamma_\nu)$, что интеграл (1) с $\Gamma = \Gamma_\nu$ и $f = f_\nu$ теряет непрерывность в одной из точек контура интегрирования.

Затем результаты [3] и [4] в какой-то мере были перенесены на неспрямляемые кривые [5]. А именно, было доказано, что для любой простой замкнутой кривой Γ и любой заданной на ней функции $f \in H_\nu(\Gamma)$ с

$$\nu > \frac{1}{2} \operatorname{dm} \Gamma \tag{4}$$

существует голоморфная в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функция $\Phi(z)$, граничные значения которой связаны равенством (3). Условие (4) неулучшаемо в том же смысле, что и условие Е.М.Дынькина [3]. Здесь $\operatorname{dm} \Gamma$ — хорошо известная в теории фракталов верхняя метрическая размерность Γ, т. е.

$$\operatorname{dm} \Gamma = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log N(\varepsilon; \Gamma)}{-\log \varepsilon},$$

где $N(\varepsilon; \Gamma)$ есть число неналегающих квадратов со стороной ε, пересекающихся с Γ. Если Γ — спрямляемая кривая, то $\operatorname{dm} \Gamma = 1$, так что этот результат можно рассматривать как содержащий в себе приведенное выше условие $\nu > 1/2$ для спрямляемых кривых. В дальнейшем было показано [6], [7], что при некоторых дополнительных ограничениях функция Φ представляется интегралом Коши (1), понимаемым в смысле Стилтьеса. Отметим, что в примере, доказывающем неулучшаемость условия (4), кривая Γ спрямляема вне любой окрестности начала координат, что позволяет трактовать интеграл типа Коши по ней как несобственный интеграл Римана. В дальнейшем в [8] были получены новые условия непрерывности интеграла Коши, позволяющие установить существование и непрерывность его граничных значений для многих кривых Γ и плотностей f, для которых этого сделать не удавалось. Однако при этом на функции f там налагались некоторые дополнительные условия, не сводящиеся к условию Гёльдера (условия дифференцируемости на части кривой, зависимость $f(t)$ лишь от вещественной части t и т. п.). Таким образом, результаты [8] фактически относятся не к классам $H_\nu(\Gamma)$, а к некоторым их подклассам. В данной работе получим новые условия такого рода, охватывающие классы Гёльдера целиком.

Именно, пусть кривая Γ теряет спрямляемость в одной своей точке a. Это означает следующее. Пусть Γ есть замкнутая жорданова кривая, $a \in \Gamma$. Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существуют две точки $a^\pm(\varepsilon) \in \Gamma$, разбивающие Γ на две дуги $\gamma(\varepsilon)$ и $\Gamma(\varepsilon)$ так, что $a \in \gamma(\varepsilon)$, при положительном обходе $a^-(\varepsilon)$ предшествует точке a, а $a^+(\varepsilon)$ следует за ней, $|a^+(\varepsilon) - a| = |a^-(\varepsilon) - a| = \varepsilon$, а для любой точки $t \in \gamma(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|t - a| \leq \varepsilon$. Фраза "кривая Γ теряет спрямляемость в точке a" означает, что при любом $\varepsilon > 0$ дуга $\Gamma(\varepsilon)$ спрямляема, а при $\varepsilon \to 0$ ее длина неограниченно возрастает. Для кривых этого класса интеграл Коши можно определить как несобственный:

$$\Phi(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varepsilon)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \tag{5}$$

Будем говорить, что для замкнутой кривой Γ справедлива теорема Гарнака–Морера–Сохоцкого (ГМС) с показателем ν, если для любой функции $f \in H_\nu(\Gamma)$ интеграл Коши (5) существует и в каждой точке этой кривой имеет граничные значения $\Phi^\pm(t)$, удовлетворяющие формуле Сохоцкого (3). Из вышеописанных результатов автора следует, что для кривой Γ, теряющей спрямляемость в одной своей точке, теорема ГМС справедлива с любым показателем, удовлетворяющим условию (4). В данной статье описываются кривые этого класса, для которых теорема ГМС выполняется и с меньшими показателями. Аналогичные вопросы исследуются для разомкнутых кривых.

2. Основные результаты

Пусть Γ — простая замкнутая кривая, теряющая спрямляемость в точке a. Она разбивает комплексную плоскость на конечную область D^+ и содержащую ∞ область D^-. Обозначим через $\chi(z)$ характеристическую функцию области D^+, равную 1 в этой области и 0 вне ее. Далее, пусть Γ_0 есть некоторая спрямляемая простая замкнутая кривая, проходящая через точку a. Обозначим через D_0^+ и D_0^- конечную и бесконечную области, на которые она разбивает плоскость, а через $\chi_0(z)$ – характеристическую функцию области D_0^+. Тогда разность $s(z) = \chi(z) - \chi_0(z)$ принимает значения 0 и ± 1, причем множество $\{z : s(z) \neq 0\}$ не содержит точки ∞. Обозначим связные компоненты этого множества через $d_1, d_2, \ldots$, а ограничивающие их замкнутые кривые — через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ Будем считать, что ни одна из границ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ не проходит через точку a. Тогда все области $d_1, d_2, \ldots$ имеют спрямляемые границы, причем это семейство областей бесконечно (в противном случае кривая Γ была бы спрямляема). В этой ситуации область D получается из области со спрямляемой границей D_0 путем присоединения к ней тех областей семейства $d = \{d_1, d_2, \ldots\}$, на которых $s(z)$ принимает значение -1, и удаления тех, где $s(z) = +1$. Будем говорить, что кривая Γ получена из спрямляемой кривой Γ_0 путем возмущения последней областями семейства d.

Ниже используются некоторые геометрические характеристики областей. Если B — односвязная конечная область со спрямляемой границей, то через $\lambda(B)$ будем обозначать ее периметр.

Определение 1. Максимальной вместимостью $q_*(B)$ области B будем называть сторону наибольшего открытого квадрата Q, помещающегося внутри этой области. Вместимость в направлении θ, обозначаемая $q_\theta(B)$, есть сторона наибольшего из тех квадратов $Q \subset B$, одна из сторон которых образует угол θ с действительной осью. Наконец, вместимость области B определяется равенством $q(B) = \inf\{q_\theta(B) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$.

Например, для квадрата Q со стороной 1 имеем $q_*(Q) = 1$, $q(Q) = \sqrt{2}/2$. Если стороны этого квадрата параллельны осям, то $q_\theta(Q) = (\cos\theta + \sin\theta)^{-1}$.

Пусть $f \in H_\nu(\Gamma)$. Применим к ней оператор продолжения Уитни. Этот оператор (напр., [9], гл. IV) любую заданную на Γ функцию $f(\zeta) \in H_\nu(\Gamma)$ продолжает до заданной на всей комплексной плоскости функции $u(z) \in H_\nu(\mathbb{C})$. Он действует таким образом, что продолженная функция u имеет в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ частные производные по x и y всех порядков (здесь $z = x + iy$), причем

$$|\nabla u(z)| \leq C h_\nu(f, \Gamma) \operatorname{dist}^{\nu-1}(z, \Gamma);$$

здесь и ниже C означает различные абсолютные постоянные. Теперь возьмем сужение u на $\Gamma \cap \Gamma_0$ и повторно применим продолжение Уитни к этому сужению. Полученную функцию обозначим $f^w(z)$. Она обладает всеми перечисленными выше свойствами. Кроме того, из конструкции оператора продолжения Уитни [9] следует, что внутри любой из областей $d_k \in d$ функцию f^w можно рассматривать как результат продолжения по Уитни сужения u на γ_k с этой кривой на всю плоскость. Поэтому при $z \in d_k$ справедлива оценка

$$|\nabla u(z)| \leq C h_\nu(f, \Gamma) \operatorname{dist}^{\nu-1}(z, \gamma_k),$$

а для продолжений Уитни со спрямляемых кривых имеет место

Лемма. *Пусть B — конечная область со спрямляемой границей γ, $f \in H_\nu(\gamma)$, а f^w — продолжение Уитни функции f с кривой γ в область B. Если $p < \frac{1}{1-\nu}$, то*

$$\iint_B |\nabla f^w|^p dx\, dy \leq C h_\nu^p(f, \gamma) \lambda(B) q^{1-p(1-\nu)}(B). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть θ есть угол, для которого выполняется равенство $q(B) = q_\theta(B)$. Построим на плоскости прямоугольную систему координат, одна из осей которой составляет этот угол с действительной осью. В этой системе координат построим разбиение Уитни (напр.,

[9]) области B, состоящее из диадических квадратов, сторона каждого из которых соизмерима с его расстоянием от γ. Обозначив через m_n количество квадратов со стороной 2^{-n}, входящих в это разбиение Уитни, в силу приведенной выше оценки для ∇f^w получаем

$$\iint_B |\nabla f^w|^p dx\, dy \le Ch_\nu^p(f,\gamma) \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n(2-p(1-\nu))} m_n.$$

Нетрудно убедиться, что $m_n \le C2^n \lambda(B)$ (напр., [5]). В то же время $m_n = 0$, если вместимость B меньше 2^{-n}. Отсюда

$$\iint_B |\nabla f^w|^p dx\, dy \le Ch_\nu^p(f,\gamma)\lambda(B) \sum_{2^{-n}\le q(B)} 2^{-n(1-p(1-\nu))}.$$

При условиях леммы последний ряд сходится и оценивается сверху величиной $Cq^{1-p(1-\nu)}(B)$. $\square$

Введем характеристику

$$\sigma_\mu(d) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(d_k) q^\mu(d_k) \tag{7}$$

системы возмущающих областей d.

Теорема 1. *Пусть замкнутая кривая Γ, теряющая спрямляемость в своей точке a, получена из спрямляемой кривой путем ее возмущения системой областей d. Если $\sigma_\nu(d) < \infty$, то для любой функции $f \in H_\nu(\Gamma)$ и любой точки $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ интеграл Коши (5) существует. Если при этом $\nu > 1/2$ и $\sigma_\mu(d) < \infty$ для некоторого $\mu \in (0, 2\nu - 1)$, то для кривой Γ справедлива теорема ГМС с показателем ν.*

Доказательство. Пусть $\psi(x)$ есть определенная на луче $[0, +\infty)$ действительной оси гладкая функция, равная 1 при $x \ge 1$ и 0 при $x \le 1/2$. Обозначим $\psi_\varepsilon(z) = \psi(|z-a|/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, и рассмотрим разность интегралов Коши

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)\psi_\varepsilon(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{f^w(\zeta)\psi_\varepsilon(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

Первый из них существует, поскольку лежащая в носителе ψ_ε часть Γ состоит из спрямляемых дуг. Далее, этот носитель пересекается лишь с конечным числом областей системы d. Поэтому для данной разности интегралов Коши, рассматриваемой как один интеграл Коши по надлежащим образом ориентированному сложному контуру $\Gamma \cup \Gamma_0$, справедлива формула Бореля–Помпейа (напр., [10], с. 29), которую можно записать в виде [5]

$$J = f^w(z)\psi_\varepsilon(z)s(z) - \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} s(\zeta)\frac{\partial(f^w\psi_\varepsilon)}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\zeta d\overline{\zeta}}{\zeta - z}, \tag{8}$$

где используются введенные выше обозначения. Перейдем в этом равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$. Очевидно, предел второго интеграла в левой части существует и равен $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} \frac{f^w(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$. Согласно лемме из конечности величины $\sigma_\nu(d)$ следует интегрируемость частных производных первого порядка функции f^w на множестве $D = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} d_k$. Действительно, при $p = 1$ оценка (6) приобретает вид $\iint\limits_D |\nabla f^w| dx\, dy \le Ch_\nu(f,\gamma)\sigma_\nu(d)$. Отсюда нетрудно вывести, что интегральный член правой части имеет предел, равный $\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{\mathbb{C}} s(\zeta)\frac{\partial f^w}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\zeta d\overline{\zeta}}{\zeta - z}$. Существование предела первого слагаемого правой части очевидно. Следовательно, при любом $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ существует предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)\psi_\varepsilon(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$.

Легко видеть, что он совпадает с (5). Таким образом, утверждение теоремы об условии существования интеграла Коши по теряющей спрямляемость кривой доказано. При этом получено представление для этого интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{f^w(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + f^w(z)s(z) - \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} s(\zeta)\frac{\partial f^w}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\zeta d\overline{\zeta}}{\zeta - z}. \tag{9}$$

Оно позволяет доказать второе утверждение теоремы. Действительно, первое слагаемое в правой части этого представления есть интеграл Коши по спрямляемой кривой и при $\nu > \frac{1}{2}$ он имеет непрерывные граничные значения в силу теоремы Дынькина–Салимова. Наличие граничных значений у второго члена очевидно. Наконец, последний член в правой части (9) есть интегральный опрератор

$$\varphi(\zeta) \mapsto \iint_D \frac{\varphi(\zeta)d\zeta d\overline{\zeta}}{\zeta - z}.$$

Хорошо известно (напр., [10], с. 39), что при $p > 2$ он действует из $L^p(D)$ в $H_{(p-2)/p}(\mathbb{C})$. Покажем, что производная $\frac{\partial f^w}{\partial\overline{\zeta}}$ интегрируема в D в некоторой степени, большей двух. По условию $\sigma_\mu(d) < \infty$ для некоторого $\mu \in (0, 2\nu - 1)$. Найдем p из равенства $\mu = 1 - p(1-\nu)$, т. е. $p = \frac{1-\mu}{1-\nu} > 2$, и из леммы следует $\frac{\partial f^w}{\partial\overline{\zeta}} \in L^p(D)$. Тем самым существование непрерывных граничных значений $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ доказано. Справедливость формулы Сохоцкого (3) вытекает из представления (9). $\square$

Теперь пусть Γ — дуга с началом в точке a_1 и концом a_2. Для конкретности будем считать, что она теряет спрямляемость в своей начальной точке a_1. Это означает следующее. Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует точка $a(\varepsilon) \in \Gamma$, разбивающая Γ на две дуги $\gamma(\varepsilon)$ и $\Gamma(\varepsilon)$, так что $a(\varepsilon)$ есть конец дуги $\gamma(\varepsilon)$ и начало $\Gamma(\varepsilon)$, $|a(\varepsilon) - a_1| = \varepsilon$, и для любой точки $t \in \gamma(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|t - a_1| \le \varepsilon$. Фраза “кривая Γ теряет спрямляемость в точке a” означает, что при любом $\varepsilon > 0$ дуга $\Gamma(\varepsilon)$ спрямляема, а при $\varepsilon \to 0$ ее длина неограниченно возрастает. Для кривых этого класса интеграл Коши можно определить как несобственный интеграл (5). В классическом случае кусочно-гладкой дуги Γ и удовлетворяющей условию Гёльдера плотности f ([1]; [2], гл. II) этот интеграл

(а) во всех внутренних точках дуги Γ имеет граничные значения с обеих сторон, связанные формулой Сохоцкого (3);

(б) на концах дуги Γ имеет особенности вида

$$\Phi(z) = \frac{(-1)^j f(a_j)}{2\pi i}\log|z - a_j| + c_j + o(1), \quad z \to a_j, \quad j = 1, 2, \tag{10}$$

где c_j — постоянные.

Будем говорить, что для Γ справедлива теорема ГМС для дуг с показателем ν, если интеграл Коши (5) по этой дуге с любой плотностью $f \in H_\nu(\Gamma)$ обладает свойствами (а) и (б).

Известно, что на негладких дугах оценка (10) может нарушаться [5]. Это происходит, если Γ скручивается в спираль.

Определение 2. Назовем дугу Γ имеющей гладкое замыкание, если существует гладкая дуга γ с теми же концами, не имеющая с Γ других общих точек.

Пусть Γ есть дуга, которая теряет спрямляемость в своей начальной точке a_1 и имеет гладкое замыкание γ. Пусть Γ_0 — спрямляемая дуга с теми же началом a_1 и концом a_2, имеющая то же самое гладкое замыкание γ. Тогда $\Gamma \cup \gamma$ и $\Gamma_0 \cup \gamma$ — замкнутые кривые, ограничивающие конечные области D^+ и D_0^+ соответственно. Обозначив через $\chi(z)$ и $\chi_0(z)$ характеристические функции этих областей, через $s(z)$ разность этих функций, а через $d = \{d_1, d_2, \dots\}$ систему связных компонент множества $\{z : s(z) \ne 0\}$, можем повторить все построения данного раздела, относившиеся к замкнутым кривым. Как и выше, предполагаем, что точка потери спрямляемости a_1 не лежит на границе ни одной из областей $d_1, d_2, \dots$, и говорим, что дуга Γ есть результат возмущения спрямляемой дуги Γ_0 системой областей d. Тогда справедлива

Теорема 2. *Пусть дуга Γ, теряющая спрямляемость в своей начальной точке a_1 и имеющая гладкое замыкание, получена из спрямляемой дуги с теми же началом и концом, имеющей то же самое гладкое замыкание, путем ее возмущения системой областей d. Если $\sigma_\nu(d) < \infty$, то для любой функции $f \in H_\nu(\Gamma)$ и любой точки $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ интеграл Коши (5) существует. Если при этом $\nu > \frac{1}{2}$ и $\sigma_\mu(d) < \infty$ для некоторого $\mu \in (0, 2\nu - 1)$, то для кривой Γ справедлива теорема ГМС для дуг с показателем ν.*

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство теоремы 1. В частности, при условиях данной теоремы интеграл Коши имеет представление (9), из которого вытекает справедливость оценки (10).

3. Примеры, следствия, обобщения

Вначале приведем пример, показывающий эффективность полученных результатов в случае, когда не выполнено условие (4).

Пример 1. Фиксируем число $\beta > 1$ и разделим отрезок действительной оси $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$ на $2^{[n\beta]}$ равных частей длины $\delta_n = 2^{-n-[n\beta]}$ каждая; здесь $[\,\cdot\,]$ означает целую часть. Обозначим через $x_{n,j}$ точки деления, т. е. $x_{n,j} = 2^{-n} + j\delta_n$, $j = 0, 1, \dots, 2^{[n\beta]} - 1$, и рассмотрим вертикальные отрезки $I_{n,j} = [x_{n,j}, x_{n,j} + i2^{-n}]$. Верхняя метрическая размерность объединения этих отрезков $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=0}^{2^{[n\beta]}-1} I_{n,j}$ вычислена в [5]. Оказалось, что $\operatorname{dm} A = \frac{2\beta}{\beta+1}$.

Теперь фиксируем последовательность положительных чисел ε_n так, что $\varepsilon_n < \delta_n$, $n = 1, 2, \dots$, и рассмотрим прямоугольники $R_{n,j} = \{z = x + iy : x_{n,j} < x < x_{n,j} + \varepsilon_n,\ 0 < y < 2^{-n}\}$. Пусть D_0^+ есть квадрат $\{z = x + iy : 0 < x < 1,\ -1 < y < 0\}$. Область D^+ определим равенством $D^+ = D_0^+ \cup \Bigl(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=0}^{2^{[n\beta]}-1} R_{n,j}\Bigr)$ и обозначим через Γ и Γ_0 границы областей D^+ и D_0^+ соответственно. Очевидно, Γ_0 спрямляема, а Γ теряет спрямляемость в точке 0. Отрезки $I_{n,j}$ являются левыми вертикальными сторонами прямоугольников $R_{n,j}$. Отсюда нетрудно вывести, что $\operatorname{dm}\Gamma = \operatorname{dm} A = \frac{2\beta}{\beta+1}$. Поэтому ранее известные результаты гарантируют существование граничных значений интеграла Коши (5) по этой кривой Γ с любой плотностью класса $H_\nu(\Gamma)$ при условии

$$\nu > \frac{\beta}{\beta + 1}. \tag{11}$$

Чтобы воспользоваться теоремой 1, нужно оценить характеристику (8) для системы прямоугольников $R = \{R_{n,j} : j = 0, 1, \dots, 2^{[n\beta]} - 1,\ n = 1, 2, \dots\}$. Очевидно, периметр $R_{n,j}$ эквивалентен 2^{-n}, а вместимость не превосходит ε_n. Поскольку в систему R входит по $2^{[n\beta]}$ одинаковых прямоугольников каждого размера, то

$$\sigma_\mu(R) \le C \sum_{n=1}^{\infty} 2^{[n\beta]-n} \varepsilon_n^{\mu}.$$

Положим $\varepsilon_n = \delta_n^m/2$, $m \ge 1$. Тогда ряд в правой части приобретает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{[n\beta]-n-m\mu([n\beta]+n)}$. Он сходится при $\mu > \frac{\beta-1}{m(\beta+1)}$. Отсюда $2\nu - 1 > \frac{\beta-1}{m(\beta+1)}$, т. е.

$$\nu > \max\left\{\frac{(m+1)\beta - (m-1)}{2m(\beta+1)}, \frac{1}{2}\right\}. \tag{12}$$

При $m > 1$ правая часть (12) меньше правой части (11), т.е. теорема 1 позволяет установить наличие граничных значений интеграла типа Коши в более широком диапазоне гельдеровских показателей, чем ранее известные условия.

При $m = 1$ оценки (11) и (12) совпадают между собой. Это объясняется тем, что в этом случае построенная нами кривая Γ с точностью до несущественных деталей совпадает с упоминавшимся выше примером из работы [5], доказывающим неулучшаемость условия (4) во всем классе кривых фиксированной верхней метрической размерности.

Пример 2. Рассмотрим дугу Γ, являющуюся графиком функции $Y(x) = x^n \sin \pi x^{-m}$, $n > 0$, $m > 0$, при $0 \le x \le 1$ (по определению полагаем $Y(0) = 0$). При $m \ge n$ эта дуга теряет спрямляемость в точке 0, и длина части Γ, лежащей в полуплоскости $x \ge \varepsilon > 0$, имеет порядок $O(\varepsilon^{n-m})$. Отсюда нетрудно вывести, что $\operatorname{dm}\Gamma \le m - n + 1$. Это довольно грубая оценка (так, она теряет смысл при $m - n > 1$), но более точные оценки этой размерности автору неизвестны. Поэтому результаты предшествующих работ гарантируют существование граничных значений интеграла Коши (5) по этой кривой Γ с любой плотностью класса $H_\nu(\Gamma)$ лишь при

$$\nu > \frac{m - n + 1}{2}, \tag{13}$$

причем при $m - n > 1$ это неравенство становится невозможным. Как увидим, теорема 2 дает здесь более содержательный результат. В качестве спрямляемой дуги Γ_0 возьмем отрезок действительной оси $[0, 1]$. Тогда возмущающие области d_k заключены между отрезками $[(k + 1)^{1/m}, k^{1/m}]$ и соединяющими концы этих отрезков частями графика. Несложный расчет показывает, что периметр и вместимость d_k есть $O(k^{-n/m})$ и $O(k^{-(m+1)/m})$ соответственно. Тогда $\sigma_\mu(d) \le C \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-(n+\mu(m+1))/m}$, и этот ряд сходится при $\mu > \frac{m-n}{m+1}$. Поскольку μ должно быть меньше $2\nu - 1$, то отсюда получаем

$$\nu > \frac{1}{2} + \frac{m - n}{2(m + 1)}. \tag{14}$$

Очевидно, при $m > n > 0$ правая часть оценки (14) находится в промежутке от $\frac{1}{2}$ до 1. Она всегда меньше правой части оценки (13).

Обсудим некоторые следствия из доказательств теорем 1 и 2.

Представление (9) позволяет дать оценку гельдеровского показателя граничных значений интеграла Коши. Действительно, первое слагаемое в правой части этого представления удовлетворяет условию Гёльдера с любым показателем, меньшим $2\nu - 1$ [3], второе с показателем ν и третье с показателем $\varkappa = (p - 2)/p$, где $p = \frac{1-\mu}{1-\nu} > 2$. Отсюда

$$\varkappa = \frac{2\nu - \mu + 1}{1 - \mu}, \tag{15}$$

и этот показатель наименьший из трех. Тем самым доказано

Следствие 1. Пусть выполнены предположения теоремы 1, т. е. $\sigma_\mu(d) < \infty$ при некотором $\mu \in (0, 2\nu - 1)$. Тогда граничные значения $\Phi^{\pm}(t)$ интеграла Коши удовлетворяют на кривой Γ условию Гёльдера с показателем $\varkappa$, определяемым равенством (15).

Аналогичный результат справедлив для незамкнутых дуг, но из-за особенностей (10) условие Гёльдера выполняется не на всей дуге Γ, а лишь вне произвольных окрестностей ее концов.

Далее, многие из приведенных выше формулировок становятся бессодержательными при $\nu = 1$. В то же время соответствующие доказательства в этом случае не усложняются, а упрощаются, поскольку продолжение Уитни функции $f \in H_1(\Gamma)$ имеет ограниченные первые производные ([9], гл. IV). Итак, справедливо

Следствие 2. Пусть замкнутая кривая Γ, теряющая спрямляемость в своей точке a, получена из спрямляемой кривой путем ее возмущения системой областей d. Тогда для любой функции $f \in H_1(\Gamma)$ и любой точки $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ интеграл Коши (5) существует и для кривой Γ справедлива теорема ГМС с показателем 1.

Аналогичный результат справедлив и для незамкнутых дуг.

Обсудим теперь некоторые обобщения. Очевидно, все результаты работы без труда переносятся на кривые, теряющие спрямляемость не в одной, а в нескольких точках. Но, может быть, более интересно следующее соображение. Из нашего определения кривой, теряющей спрямляемость в одной точке и полученной из спрямляемой кривой путем ее возмущения системой областей d, следует, что эти области сгущаются к одной точке (точке потери спрямляемости). Но доказательство в основной своей части не использует этот факт. Правая часть представления (9) существует и допускает все проведенные выше рассуждения и оценки, даже когда области системы d сгущаются к каждой точке кривой Γ. А в этом случае кривая может не содержать спрямляемых дуг. Правда, нужно еще выяснить, в каком смысле понимается интеграл по такой кривой в левой части (9). Но независимо от ответа на этот вопрос правая часть представления (9) дает голоморфную в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ функцию $\Phi(z)$, удовлетворяющую краевому условию (3).

Применим эти соображения к популярным в последние десятилетия фракталам (напр., [11]). В качестве примера рассмотрим область, ограниченную снежинкой Коха. Здесь к правильному треугольнику со стороной 1 присоединяются сначала три треугольника со стороной 1/3, затем еще двенадцать правильных треугольников со стороной 1/9 и так далее. На n-м шаге присоединяется $3 \cdot 4^{n-1}$ правильных треугольников со стороной 3^{-n}. Периметр такого треугольника равен 3^{-n+1}, а вместимость $3^{-n}Q$, где Q означает вместимость правильного треугольника со стороной единица[1]. Поэтому для системы T, состоящей из всех присоединяемых треугольников, имеем $\sigma_\mu(T) = \frac{9Q}{4} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{4}{3^{\mu+1}})^n$, и эта величина конечна при условии $1 + \mu > \frac{\log 4}{\log 3}$. Отсюда

$$\nu > \frac{1}{2} \frac{\log 4}{\log 3},$$

причем величина $\frac{\log 4}{\log 3}$ в правой части этого неравенства есть так называемая размерность подобия (напр., [11], с. 18) для снежинки Коха. Точно так же можно доказать, что краевая задача (3) на самодобной фрактальной кривой разрешима для любой функции $f \in H_\nu(\Gamma)$, если показатель ν превосходит половину размерности подобия этой кривой. Впрочем, размерность подобия самоподобного фрактала, по-видимому, совпадает с его верхней метрической размерностью, так что намечено другое доказательство условия (4).

Итак, в статье получены новые условия непрерывности интеграла Коши вплоть до контура интегрирования для случая, когда этот контур теряет спрямляемость из-за особенностей, сосредоточенных в одной точке. Полученные условия дополняют теорему Е.М. Дынькина о гладкости интеграла Коши по спрямляемой кривой и результаты автора относительно разрешимости задачи Римана на неспрямляемой кривой.

Литература

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – М.: Физматгиз, 1962. – 600 с.
3. Дынькин Е.М. *Гладкость интеграла типа Коши* // Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР. – 1979. – Т. 92. – С. 115–133.

[1]Нетрудно показать, что $Q = 1/2$, но для последующих построений точное значение этой величины несущественно.

4. Салимов Т.С. *Прямая оценка для сингулярного интеграла Коши по замкнутой кривой* // Научн. тр. МВ и ССО Азерб. ССР. – 1979. – № 5. – С. 59–75.
5. Кац Б.А. *Краевая задача Римана на негладких дугах и фрактальные размерности* // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6. – Вып. 1. – С. 147–171.
6. Kats B.A. *The Stieltjes integral along fractal curve* // Le Matem. – 1999. – V. LIV. – Fasc. 1. – P. 159–171.
7. Kats B.A. *The Cauchy integral along* Φ*-rectifiable curve* // Lobachevskii J. of Math. – 2000. – V. 7. – P.15–29.
8. Кац Б.А., Погодина А.Ю. *О граничных значениях интеграла типа Коши по негладкой кривой* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 3. – С. 15–21.
9. Стейн И. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* – М.: Мир, 1973. – 342 с.
10. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* – М.: Мир, 1988. – 509 с.
11. Федер Е. *Фракталы.* – М.: Мир, 1991. – 280 с.

Казанский государственный
архитектурно-строительный университет

Поступила
22.08.2004