ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 10 (425)

УДК 517.929

А.Г. БАСКАКОВ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ С СИЛЬНО НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть G — локально компактная абелева группа (с аддитивной формой записи алгебраической операции), $\widehat{G}$ — двойственная группа непрерывных унитарных характеров группы G (с мультипликативной формой записи алгебраической операции), X — комплексное банахово пространство и $\mathcal{F}(G,X)$ — банахово пространство измеримых функций, определенных на группе G со значениями в X (выбор пространства $\mathcal{F}(G,X)$ уточняется в § 1). Через $\operatorname{End} Y$ обозначим банахову алгебру линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве Y.

В данной статье изучаются спектральные свойства разностных операторов $\mathcal{D} \in \operatorname{End}\mathcal{F}(G,X)$ вида

$$(\mathcal{D}x)(g) = \sum_{n\geq 1} A_n(g)x(g+g_n), \quad x \in \mathcal{F}(G,X), \quad g, g_n \in G, \quad n \geq 1, \tag{1}$$

где функции A_n, $n \geq 1$ (называемые коэффициентами оператора $\mathcal{D}$), принадлежат банаховой алгебре $C_s(G, \operatorname{End} X)$ сильно непрерывных и ограниченных на G функций со значениями в $\operatorname{End} X$. При этом считается выполненным условие $\sum\limits_{n\geq 1} \|A_n\|_\infty < \infty$, где $\|B\|_\infty = \sup\limits_{g\in G} \|B(g)\|$ $\forall B \in C_s(G, \operatorname{End} X)$. Основные результаты статьи связаны с изучением структуры обратных операторов к разностным операторам и получены с использованием представлений абелевых групп. В теореме 1 доказано, что операторы вида (1) образуют наполненную подалгебру в банаховой алгебре $\operatorname{End}\mathcal{F}(G,X)$. Она служит основой для более глубокого исследования спектральных (структурных) свойств разностных операторов. Особое внимание уделяется изучению разностных операторов вида

$$(\mathcal{D}_0 x)(g) = x(g) - B(g)x(g-g_0), \quad x \in \mathcal{F}(G,X), \tag{2}$$

где $g_0 \in G$ и $B \in C_s(G, \operatorname{End} X)$. Это связано с тем, что абстрактные гиперболические операторы являются производящими операторами полугрупп операторов вида (2) (в этом случае $G = \mathbb{R}$; см. теоремы 4–6). Теорема 6 позволяет во многих вопросах свести изучение абстрактных гиперболических операторов к изучению соответствующих разностных операторов. По всей видимости, этот результат может оказаться полезным при исследовании задач управления. Спектральные свойства операторов вида (2) рассматриваются в теоремах 2 и 3.

1. Наполненность подалгебры разностных операторов

Символом $\mathcal{F}(G,X)$ обозначим одно из следующих банаховых пространств измеримых (по Бохнеру) функций, определенных на группе G со значениями в банаховом пространстве X; $L_p = L_p(G,X)$ — пространство суммируемых со степенью $p \in [1,\infty)$ (относительно меры Хаара μ на G) функций, $L_\infty = L_\infty(G,X)$ — пространство существенно ограниченных на G функций ($\|x\|_\infty =$

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов № NZA000 и NZA300 Международного Научного Фонда и Российского фонда фундаментальных исследований, проект 95-01-00032.

$\operatorname{vrai\,sup}_{g\in G} \|x(g)\|$, $x \in L_\infty$), $C = C(G, X)$ — подпространство непрерывных функций из $L_\infty(G, X)$, $C_0 = C_0(G, X)$ — подпространство функций из $C(G, X)$, сходящихся к нулю на бесконечности. Если $X = \mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, то введенные банаховы пространства обозначаются символами $L_p(G)$, $p \in [1, \infty)$, $C(G)$, $C_0(G)$. При этом $L_1(G)$ является коммутативной банаховой алгеброй со сверткой функций в качестве умножения.

Вместо символа $\mathcal{F}(G, X)$ часто будет использоваться символ $\mathcal{F}$. То же замечание относится и к конкретным функциональным пространствам.

В статье систематически используются следующие два изометрические представления $S : G \to \operatorname{End} \mathcal{F}$, $V : \widehat{G} \to \operatorname{End} \mathcal{F}$, определенные равенствами

$$(S(g)x)(u) = x(u + g), \quad (V(\gamma)x)(u) = \gamma(u)x(u), \quad u, g \in G, \quad \gamma \in \widehat{G}, \quad x \in \mathcal{F}.$$

Используемые далее понятия и результаты из теории векторных почти периодических функций можно найти в монографиях [1]–[3].

Определение 1. Линейный оператор $A \in \operatorname{End} \mathcal{F}$ назовем разностным, если функция $\widehat{A} : \widehat{G} \to \operatorname{End} \mathcal{F}$, определенная равенствами $\widehat{A}(\gamma) = V(\gamma^{-1})AV(\gamma)$, $\gamma \in \widehat{G}$, является непрерывной почти периодической (п. п.) функцией.

Если оператор $\mathcal{D} \in \operatorname{End} \mathcal{F}$ определен формулой (1), то функция $\widehat{D} : \widehat{G} \to \operatorname{End} \mathcal{F}$ имеет вид $\widehat{\mathcal{D}}(\gamma) = V(\gamma^{-1})\mathcal{D}V(\gamma) = \sum\limits_{n\geq 1} \widetilde{A}_n S(g_n)\gamma(g_n)$, где $\widetilde{A}_n$ — оператор умножения на функцию A_n. Из равенств $\|\widetilde{A}_n\| = \|A_n\|_\infty$, $n \geq 1$, следует, что $\widehat{\mathcal{D}}$ — п. п. функция. Таким образом, $\mathcal{D}$ — разностный оператор (в смысле определения 1).

В частности, если $G \in \mathbb{Z}$ — группа целых чисел и $l_p(\mathbb{Z}) = L_p(\mathbb{Z})$, $p \in [1, \infty)$, то каждый оператор $A \in \operatorname{End} l_p(\mathbb{Z})$, определяемый матрицей $(a_{ij};\ i, j \in \mathbb{Z})$ со свойством $\sum\limits_{n\geq 1} \sup\limits_{i-j=n} |a_{ij}| < \infty$, является разностным. Он представим в виде (1), где $g_n = n$, $n \in \mathbb{Z}$, и функции $A_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, определяются равенствами $A_n(k) = a_{k(k+n)}$, $k \in \mathbb{Z}$. Нетрудно доказать, что оператор $\mathcal{D} \in \operatorname{End} l_p(\mathbb{Z})$ является разностным тогда и только тогда, когда он является пределом в $\operatorname{End} l_p(\mathbb{Z})$ операторов с конечным числом диагоналей. Следовательно, $\operatorname{Diff} l_p(\mathbb{Z})$ содержит наиболее важные в приложениях операторы из $\operatorname{End} l_p(\mathbb{Z})$.

Определение 2. Пусть $A \in \operatorname{Diff} \mathcal{F}$ и п. п. функция $\widehat{A} : \widehat{G} \to \operatorname{End} \mathcal{F}$ имеет ряд Фурье вида $\widetilde{A}(\gamma) \sim \sum\limits_{n\geq 1} A_n \gamma(g_n)$. Ряд $\sum\limits_{n\geq 1} A_n$ назовем рядом Фурье разностного оператора A, а множество $\{g_1, g_2, \dots\} \subset G$ показателей Фурье функции $\widehat{A}$ обозначим символом $\Lambda(A)$.

Из определения коэффициентов Фурье п. п. функции следует, что операторы $A_n \in \operatorname{End} \mathcal{F}$, $n \geq 1$, могут быть вычислены по формуле

$$A_n = \int_{\overline{G}} \overline{A}(\tau)\tau(-g_n)\overline{\mu}(d\tau), \tag{3}$$

где $\overline{G}$ — боровская компактификация группы $\widehat{G}$ (т. е. $\overline{G} = \widehat{G}_d$ — двойственная к группе G_d, G_d — группа G, наделенная дискретной топологией), $\overline{\mu}$ — мера Хаара на компактной группе $\overline{G}$ и $\overline{A} : \overline{G} \to \operatorname{End} \mathcal{F}$ — непрерывное продолжение функции $\widehat{A}$ на $\overline{G}$. Отметим свойство $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n\| = 0$.

Символом $\operatorname{Diff}_V \mathcal{F}$ или $\operatorname{End}_V \mathcal{F}$ обозначим множество операторов из алгебры $\operatorname{End} \mathcal{F}$, перестановочных с операторами представления $V : \widehat{G} \to \operatorname{End} \mathcal{F}$. Ясно, что $\operatorname{Diff}_V \mathcal{F} \subset \operatorname{Diff} \mathcal{F}$ и $\operatorname{Diff}_V \mathcal{F}$ — замкнутая подалгебра из алгебры $\operatorname{End} \mathcal{F}$. Алгебра $\operatorname{Diff} \mathcal{F}$ содержит операторы умножения на функции из алгебры $C_s(G, \operatorname{End} X)$. Однако не всякий оператор из $\operatorname{Diff}_V \mathcal{F}$ является оператором умножения (см. [5], гл. II).

Подалгебра $\mathcal{A}$ из банаховой алгебры $\mathcal{B}$ называется наполненной [4], если каждый обратимый в $\mathcal{B}$ элемент из алгебры $\mathcal{A}$ обратим и в $\mathcal{A}$.

Лемма 1. *Множество разностных операторов* $\operatorname{Diff}\mathcal{F}$ *образует наполненную замкнутую подалгебру в банаховой алгебре* $\operatorname{End}\mathcal{F}$. *Если* $A \sim \sum\limits_{n\geq 1} A_n$ *— ряд Фурье оператора* $A \in \operatorname{Diff}\mathcal{F}$, *то операторы* A_n, $n \geq 1$, *являются разностными,* $\Lambda(A_n) = \{g_n\}$ *— одноточечное множество и они допускают представление вида*

$$A_n = A_n^0 S(g_n), \quad A_n^0 \in \operatorname{Diff}_V \mathcal{F}. \tag{4}$$

Доказательство. Непосредственно из свойств п. п. функций следует, что $\operatorname{Diff}\mathcal{F}$ — замкнутая наполненная подалгебра из $\operatorname{End}\mathcal{F}$. Например, если $A \in \operatorname{Diff}\mathcal{F}$ — обратимый в алгебре $\operatorname{End}\mathcal{F}$ оператор и $B = A^{-1}$, то функция $\widehat{B} : \widehat{G} \to \operatorname{End}\mathcal{F}$ может быть представлена в виде $\widehat{B}(\gamma) = (\widehat{A}(\gamma))^{-1}$, $\gamma \in \widehat{G}$, и поэтому является почти периодической. Таким образом, $A^{-1} \in \operatorname{Diff}\mathcal{F}$.

Непосредственно из формулы (3) следует, что имеют место равенства $V(\gamma^{-1})A_n V(\gamma) = \gamma(g_n)A_n$, $n \geq 1$. Поэтому $A_n \in \operatorname{Diff}\mathcal{F}$ и $\Lambda(A_n) = \{g_n\}$ $\forall n \geq 1$.

Положим $A_n^0 = A_n S(-g_n)$, $n \geq 1$. Из равенств $V(\gamma^{-1})S(g_n)V(\gamma) = \gamma(-g_n)S(-g_n)$, $\gamma \in \widehat{G}$, следует, что $V(\gamma^{-1})A_n^0 V(\gamma) = A_n^0$ $\forall \gamma \in \widehat{G}$, $\forall n \geq 1$. Следовательно, $A_n^0 \in \operatorname{Diff}_V \mathcal{F}$. $\square$

Следствие. $\operatorname{Diff}_V \mathcal{F}$ — замкнутая наполненная подалгебра из $\operatorname{End}\mathcal{F}$.

Операторы $A_n^0 \in \operatorname{Diff}_V \mathcal{F}$, $n \geq 1$, из представления (4) назовем коэффициентами разностного оператора A.

Ряд последующих утверждений (леммы 2–6) будет тесно связан со структурой операторов из алгебры $\operatorname{Diff}_V \mathcal{F}$ (коэффициентами разностных операторов).

Далее символом $C_{0,k}(G)$ обозначена подалгебра функций из алгебры $C_0(G) = C_0(G, \mathbb{C})$, имеющих компактный носитель. Через $V(f)$ обозначим оператор из $\operatorname{Diff}\mathcal{F}$ умножения на функцию $f \in C(G) = C(G, \mathbb{C})$. Последовательность функций (f_n) из алгебры $C_{0,k}(G)$ называется ограниченной аппроксимативной единицей (о. а. е.), если выполнены условия: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 1$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \|S(g)f_n - f_n\|_\infty = 0$ $\forall g \in G$.

Определение 3. Линейный оператор $A \in \operatorname{End}\mathcal{F}$ назовем c-непрерывным (ср.[6] и [7]), если для любой о. а. е. (f_n) выполнено соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \|V(f_n)A - AV(f_n)\| = 0$.

Множество всех c-непрерывных операторов из алгебры $\operatorname{End}\mathcal{F}$ обозначим символом $\operatorname{End}_c \mathcal{F}$. Ясно, что $\mathcal{D} \in \operatorname{End}_c \mathcal{F}$, если $\mathcal{D}$ определен формулой (1). Непосредственно из определения 3 следует, что $\operatorname{End}_c \mathcal{F}$ и $\operatorname{Diff}_c \mathcal{F} = \operatorname{End}_c \mathcal{F} \cap \operatorname{Diff}\mathcal{F}$ — замкнутые подалгебры из $\operatorname{End}\mathcal{F}$ и $\operatorname{Diff}\mathcal{F}$ соответственно.

Лемма 2. $\operatorname{End}_c \mathcal{F}$ *и* $\operatorname{Diff}_c \mathcal{F}$ *— наполненные подалгебры из* $\operatorname{End}\mathcal{F}$.

Доказательство. Если $A \in \operatorname{End}_c \mathcal{F}$ обратим в $\operatorname{End}\mathcal{F}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \|V(f_n)A^{-1} - A^{-1}V(f_n)\| = \lim_{n\to\infty} \|A^{-1}(AV(f_n) - V(f_n)A)A^{-1}\| = 0$$

для любой о. а. е. (f_n). Если $A \in \operatorname{Diff}_c \mathcal{F}$, то следует использовать лемму 1. $\square$

Через $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0(G, X)$ обозначим замыкание в $\mathcal{F}(G, X)$ функций из $\mathcal{F}(G, X)$, имеющих компактный носитель. Ясно, что $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$, если $\mathcal{F} = L_p$, $p \in [1, \infty)$, или $\mathcal{F} = C_0$. Отметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} V(f_n)x = x$ $\forall x \in \mathcal{F}_0$, $\forall$ о. а. е. (f).

Лемма 3. *Если* $A \in \operatorname{End}_V \mathcal{F} \cap \operatorname{End}_c \mathcal{F}$, *то* $\mathcal{F}_0$ *— инвариантное для* A *подпространство, и имеют место равенства*

$$AV(\varphi) = V(\varphi)A, \quad \varphi \in C_0(G). \tag{5}$$

Доказательство. Если $x_0 \in \mathcal{F}_0$, то $Ax_0 = \lim\limits_{n\to\infty} AV(f_n)x_0 = V(f_n)Ax_0 \in \mathcal{F}_0$.

Пусть функция $\varphi \in C_{0,k}(G)$ имеет преобразование Фурье $\widehat{\varphi}$, принадлежащее алгебре $L_1(\widehat{G})$. Если $x_0 \in \mathcal{F}_0$, то функции $\gamma \mapsto V(\gamma)x_0$, $\gamma \mapsto V(\gamma)Ax_0 : \widehat{G} \to \mathcal{F}$ непрерывны. Интегрируя равенства $\widehat{\varphi}(\gamma)V(\gamma)Ax_0 = \widehat{\varphi}(\gamma)AV(\gamma)x_0$, $\gamma \in \widehat{G}$, получаем

$$V(\varphi)Ax_0 = \int_{\widehat{G}} \widehat{\varphi}(\gamma)V(\gamma)Ax_0 d\gamma = \int_{\widehat{G}} A\widehat{\varphi}(\gamma)V(\gamma)x_0 d\gamma = AV(\varphi)x_0.$$

В силу плотности таких функций φ в $C_0(G)$ равенства (5) имеют место на $\mathcal{F}_0$. Если $x \in \mathcal{F}$, то для любой о. а. е. (f_n) выполняются равенства

$$V(\varphi)Ax - AV(\varphi)x = \lim_{n\to\infty}(V(f_n)V(\varphi)Ax - V(f_n)AV(\varphi)x) = V(\varphi)\lim_{n\to\infty}(V(f_n)Ax - AV(f_n)x) = 0. \quad \square$$

Следствие 1. Пусть $A \in \operatorname{End}_V \mathcal{F} \cap \operatorname{End}_c \mathcal{F}$. Тогда

1) $\operatorname{supp} Ax \subset \operatorname{supp} x$ $\forall x \in \mathcal{F}$;
2) $Ax = Ay$ на открытом множестве $U \subset G$, если $x = y$ на U;
3) $\|(Ax)(g)\| \le \|A\|\,\|x(g)\|$ $\forall x \in C_0$, $\forall g \in G$, если $\mathcal{F} = L_\infty$ и $AC_0 \subset C_0$;
4) $A\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_0$, если $\mathcal{F} = L_\infty$.

Следствие 2. Если $A, B \in \operatorname{End}_V \mathcal{F} \cap \operatorname{End}_c \mathcal{F}$ совпадают на $\mathcal{F}_0$, то $A = B$.

Лемма 4. *Если $A \in \operatorname{End} L_p$, $p \in [1,\infty)$, то $Ax \in L_\infty$ и $\|Ax\|_\infty \le \|A\|\,\|x\|_\infty$ $\forall x \in L_\infty$ с компактным носителем* $\operatorname{supp} x$.

Доказательство. Пусть $x \in L_\infty$, $\|x\|_\infty \le 1$ и $\operatorname{supp} x$ — компакт. Предположим, что $\|A\| < \|Ax\|_\infty = \alpha \le \infty$. Тогда существуют компакт $K \subset G$ и открытое множество $U \subset G$ такие, что 1) $K \subset G$, 2) $\operatorname*{vrai\,inf}\limits_{g\in K}\|y(g)\| > \|A\|$, где $y = Ax$, 3) $\mu(K) > \mu(U)\|A\|^p\alpha^{-p}$. Выберем функцию $\varphi \in C_0(G)$ такую, чтобы $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi \equiv 1$ на K и $\operatorname{supp}\varphi \subset U$. Тогда $\|\varphi x\|_p \le \mu(U)^{1/p}$ ($\|\cdot\|_p$ — норма в L_p).

Функция $\varphi y = \varphi Ax = A(\varphi x)$ допускает следующую оценку нормы $\|\varphi y\|_p \le \|A\|\mu(U)^{1/p}$. С другой стороны, $\|\varphi y\|_p > \alpha\mu(K)^{1/p} > \|A\|\mu(U)^{1/p}$. Получено противоречие. $\square$

Лемма 5. *Любой оператор $A \in \operatorname{End}_V \mathcal{F} \cap \operatorname{End}_c \mathcal{F}$ допускает единственное расширение $\overline{A}$ на L_∞, если $\mathcal{F} = L_p$, $p \in [1,\infty)$ (и на C, если $\mathcal{F} = C_0$), причем $\|\overline{A}\| \le \|A\|$ и $\overline{A} \in \operatorname{End}_V L_\infty \cap \operatorname{End}_c L_\infty$ ($\overline{A} \in \operatorname{End}_V C \cap \operatorname{End}_c C$, если $\mathcal{F} = C_0$).*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} = L_p$ (случай $\mathcal{F} = C_0$ рассматривается аналогично). Функция $\overline{A}x$, где $x \in L_\infty$, определяется на любом открытом множестве с компактным замыканием $\overline{U}$ следующим образом: $(\overline{A}x)(g) = (A\varphi x)(g)$, где φ — любая функция из $C_0(G)$ с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi$ и $\varphi = 1$ на $\overline{U}$. Непосредственно из леммы 3, ее следствий и леммы 4 следует корректность определения оператора $\overline{A} \in \operatorname{End} L_\infty$ и оценка $\|\overline{A}\| \le \|A\|$. Поскольку имеют место равенства $V(\gamma^{-1})\overline{A}V(\gamma) = \overline{A}$, $\gamma \in \widehat{G}$, $\overline{V(f)A} = V(f)\overline{A}$, $\overline{AV(f)} = \overline{A}V(f)$, $f \in C_{0,k}(G)$, то для любой о. а. е. (f_n) получаем $\|V(f_n)\overline{A} - \overline{A}V(f_n)\| \le \|V(f_n)A - AV(f_n)\| \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

Лемма 6. *Если $\mathcal{F} \ne L_\infty$ и для оператора $A \in \operatorname{End}_V \mathcal{F} \cap \operatorname{End}_c \mathcal{F}$ выполнено условие*

$$\lim_{h\to\infty}\|S(h)AS(-h)x - Ax\|_\infty = 0 \quad \forall x \in C_0(G,X), \tag{6}$$

то он представим в виде $(Ax)(g) = A_0(g)x(g)$, $x \in \mathcal{F}$, где $A_0 \in C_S(G, \operatorname{End} X)$.

Доказательство. Поскольку $S(h)V(\gamma) = \gamma(h)V(\gamma)S(h)$ $\forall h \in G$, $\forall \gamma \in \widehat{G}$, то $S(h)AS(-h) \in \operatorname{End}_V \mathcal{F} \cap \operatorname{End}_c \mathcal{F}$ и в силу леммы 4 $S(h)AS(-h)Ax - Ax \in L_\infty$ $\forall x \in C_0(G,X)$. Из леммы 5 получаем существование оператора $\overline{A} \in \operatorname{End} L_\infty$ (если $\mathcal{F} = L_p$, $p \in [1,\infty)$), принадлежащего алгебре $\operatorname{End}_V L_\infty \cap \operatorname{End}_c L_\infty$. Докажем, что $\overline{A}C_0 \subset C_0$ при $\mathcal{F} = L_p$ (случай $\mathcal{F} = C$ очевиден).

Для этого рассмотрим направленность $\mathfrak{A} = \{U\}$ компактных окрестностей нуля группы G (направленных по включению множеств) и направленность операторов $\{\overline{A}_U,\ U \in \mathfrak{A}\}$ из алгебры $\operatorname{End} C_0$, имеющих вид

$$\overline{A}_U x = \frac{1}{\mu(U)} \int_U S(h)\overline{A}S(-h)x\,dh, \quad x \in C_0. \tag{7}$$

Докажем, что $\overline{A}_U x \in C_0$ $\forall x \in C_0$. Пусть вначале функция $x \in C_0(G, X)$ имеет вид $x(g) = \varphi(g)x_0$, где $\varphi \in C_0(G)$, $x_0 \in X$. Тогда из (7) получаем $\overline{A}_U x = \varphi_0 \mu(U)^{-1} \int\limits_U S(h)\overline{A}\overline{x}_0 dh \in C_0(G, X)$, где $\overline{x}_0(g) = x_0$ $\forall g \in G$. В силу плотности таких функций x в $C_0(G, X)$ получаем включение $\overline{A}_U C_0 \subset C_0$.

Из условия (6) следует, что для любой функции $x \in C_0$

$$\lim_U \|\overline{A}x - \overline{A}_U x\|_\infty \le \lim_U \|\mu(U)^{-1}\| \int_U \|S(h)\overline{A}S(-h)x - Ax\|_\infty dh = 0.$$

Поэтому $\overline{A}x \in C_0$ $\forall x \in C_0$ и, следовательно, $\overline{A}C \subset C$, причем $\|\overline{A}\|_{\operatorname{End} C} \le \|A\|$ (см. леммы 4 и 5).

Введем в рассмотрение функцию $A_0 \in C_S(G, \operatorname{End} X)$, положив $A_0(g)x_0 = (\overline{A}\overline{x}_0)(g)$, где $\overline{x}_0(g) \equiv x_0 \in X$, и пусть $B \in \operatorname{End} \mathcal{F}$ — оператор умножения на A_0. Непосредственно из определения операторов $\overline{A}$, B и лемм 3, 5 получаем, что $(\overline{A}(\varphi_0 x_0))(g) = \varphi_0(g)\overline{A}(\overline{x}_0) = \varphi_0(g)A_0(g)x_0 = (B(\varphi_0 x_0))(g)$ $\forall g \in G$. Таким образом, $\overline{A} = B$ на C_0. Поскольку C_0 плотно в L_p ($p \in [1, \infty)$), то $A = B$ при $\mathcal{F} = L_p$. При $\mathcal{F} = C$ следует использовать лемму 5. $\square$

Пусть σ — счетная подгруппа из группы G и $\alpha : \sigma \to \mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \ge 0\}$ — весовая функция (т. е. $\alpha(g) \ge 1$, $\alpha(g_1 + g_2) \le \alpha(g_1)\alpha(g_2)$ $\forall g, g_1, g_2 \in G$), удовлетворяющая условию $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} \ln \alpha(ng) = 0$ $\forall g \in \sigma$. Символом $\operatorname{Diff}(\mathcal{F}, \alpha)$ обозначим подалгебру разностных операторов вида (1), для которых $\Lambda(\mathcal{D}) = \{g_1, g_2, \dots\} \subset \sigma$ и $\sum\limits_{n\ge1} \|A_n\|_\infty \alpha(g_n) < \infty$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{D} \in \operatorname{Diff}(\mathcal{F}, \alpha)$ — обратимый оператор. Тогда $\mathcal{D}^{-1} \in \operatorname{Diff}(\mathcal{F}, \alpha)$, т. е. он имеет вид*

$$(\mathcal{D}^{-1}x)(g) = \sum_{k\ge1} B_k(G)X(g + h_k),$$

где $B_k \in C_S(G, \operatorname{End} X)$, $k \ge 1$, $h_k \in \sigma$ $\forall k \ge 1$ и $\sum\limits_{k\ge1} \|B_k\|\alpha(h_k) < \infty$.

Доказательство. Функция $\widehat{\mathcal{D}}(\gamma) = V(\gamma^{-1})\mathcal{D}V(\gamma)$, $\gamma \in \widehat{G}$ ($\widehat{\mathcal{D}} : \widehat{G} \to \operatorname{End} \mathcal{F}$) — п. п. функция и поэтому будет п. п. функцией $\widehat{\mathcal{D}^{-1}}(\gamma) = V(\gamma^{-1})\mathcal{D}^{-1}V(\gamma)$, $\gamma \in \widehat{G}$, т. е. $\mathcal{D}^{-1}$ — разностный оператор. Из ([8], лемма 1) следует, что оператор $\mathcal{D}^{-1}$ допускает представление

$$\mathcal{D}^{-1} = \sum_{k\ge1} \widetilde{B}_k S(h_k), \quad h_k \le \sigma, \tag{8}$$

где $\widetilde{B}_k \in \operatorname{End}_V \mathcal{F}$ (см. лемму 1), $\sum\limits_{k\ge1} \|B_k\|\alpha(h_k) < \infty$. Поскольку $\widehat{\mathcal{D}^{-1}} : G \to \operatorname{End} \mathcal{F}$ — непрерывная п. п. функция, значениями которой в силу леммы 2 являются операторы из алгебры $\operatorname{End}_c \mathcal{F}$, то из формулы (3) для коэффициентов Фурье $\widetilde{B}_k S(h_k)$, $k \ge 1$, оператора $\mathcal{D}^{-1}$ следует, что $\widetilde{B}_k S(h_k) \in \operatorname{Diff}_C \mathcal{F}$ $\forall k \ge 1$. Следовательно, $\widetilde{B}_k \in \operatorname{End}_V \mathcal{F} \cap \operatorname{End}_c \mathcal{F}$, $k \ge 1$.

Вначале предположим, что $\mathcal{F} = L_p$, $p \in [1, \infty)$. Поскольку $\|\widetilde{B}_k S(h_k)\| = \|\widetilde{B}_k\|$, то из леммы 5 следует, что $\widetilde{B}_k$ допускает расширение на L_∞ с нормой, не превосходящей $\|\widetilde{B}_k\|$. Отсюда в силу абсолютной сходимости ряда Фурье для $\mathcal{D}^{-1}$ получаем, что $\mathcal{D}^{-1}$ определен и ограничен в

L_∞, причем из следствия леммы 3 и представления (8) следует включение $\mathcal{D}^{-1}((L_\infty)_0) \subset (L_\infty)_0$. Поэтому для любой функции $x \in C_{0,k}(G,X)$ получаем при $h \to 0$

$$\|(S(h)\mathcal{D}^{-1}S(-h) - \mathcal{D}^{-1})x\|_\infty = \|S(h)\mathcal{D}^{-1}S(-h)(\mathcal{D}x - S(h)\mathcal{D}S(-h))\mathcal{D}^{-1}x\|_\infty \leq$$
$$\leq \|\mathcal{D}^{-1}\|_{\mathrm{End}\, L_\infty}\|(\mathcal{D}x - S(h)\mathcal{D}S(-h))\mathcal{D}^{-1}x\|_\infty \to 0,$$

если учесть, что $\mathcal{D}^{-1}x \in (L_\infty)_0$. Такое же соотношение имеет место при $\mathcal{F} = C$.

Еще раз используя представление (3), получаем, что для операторов $\widetilde{B}_k$, $k \geq 1$, выполнено условие (6) леммы 6 и, следовательно, для них выполнены все условия этой леммы. Поэтому операторы $\widetilde{B}_k$, $k \geq 1$, являются операторами умножения на некоторые функции $B_k \in C_s(G, \mathrm{End}\, X)$ при $\mathcal{F} = L_p$, $p \in [1,\infty)$, $\mathcal{F} = C, C_0$.

Пусть $\mathcal{F} = L_\infty$. Поскольку $\widetilde{B}_k C_0 \subset C_0$ (см. доказательство леммы 6), то $\mathcal{D}^{-1}C_0 \subset C_0$ и поэтому сужение $\mathcal{D}_0$ оператора $\mathcal{D}$ на C_0 является обратимым оператором. Значит, $\widetilde{B}_k \in \mathrm{End}\, C_0$, $k \geq 1$, являются операторами умножения на некоторые функции $B_k \in C_S(G, \mathrm{End}\, X)$. В силу плотности C_0 в L_1 и из вида операторов $\mathcal{D}_0$ и $\mathcal{D}_0^{-1}$ следует, что они допускают ограниченное расширение на L_1, причем подпространство $L_1 \cap L_\infty$ переводят в себя. Поэтому $\mathcal{D}_0^{-1} = \mathcal{D}^{-1}$ и $(\widetilde{B}_k x)(g) = B_k(g)x(g)$, $k \geq 1$, на $L_1 \cap L_\infty$. В силу следствия 2 леммы 3 это представление операторов $\widetilde{B}_k$ имеет место и на L_∞. □

Следствие. Спектр разностного оператора $\mathcal{D}$ вида (1) не зависит от выбора пространства $\mathcal{F}(G,X)$.

Отметим, что утверждение теоремы 1 в случае $\alpha(g) \equiv 1$, X — конечномерное пространство и $A_n \in L_\infty(G,X)$, $n \geq 1$, приведено в работе ([5], гл. II). Там же излагается история вопроса.

2. Спектральные свойства оператора взвешенного сдвига

Пусть g_0 — такой элемент из группы G, что множество $\{\gamma(g_0),\ \gamma \in \widehat{G}\}$ плотно на окружности $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Рассмотрим разностный оператор (оператор взвешенного сдвига) $A \in \mathrm{End}\, \mathcal{F}(G,x)$ вида

$$(Ax)(g) = B(g)x(g - g_0), \quad x \in \mathcal{F} = \mathcal{F}(G,X),$$

где $B \in C_S(G, \mathrm{End}\, X)$ (подробные комментарии к истории исследования операторов взвешенного сдвига имеются в монографии [9]).

Предположим, что число 1 не принадлежит спектру $\sigma(A)$ оператора A. Следующие равенства

$$V(\gamma)AV(\gamma^{-1}) = \gamma(g_0)A, \quad \gamma \in \widehat{G}, \tag{9}$$

означают подобие оператора A операторам вида $\gamma(g_0)A$, $\gamma \in \widehat{G}$. Поскольку подобные операторы имеют одинаковые спектры, то из открытости резольвентного множества $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \alpha(A)$ и равенств (9) следует, что выполнено условие

$$\sigma(A) \cap \mathbb{T} = \emptyset. \tag{10}$$

Теорема 2. *Пусть разностный оператор $\mathcal{D} = I - A \in \mathrm{End}\, \mathcal{F}$ обратим. Тогда имеют место следующие свойства:*

1) $\sigma(A) = \sigma_- \cup \sigma_+$, $\sigma_- = \{\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| < 1\}$, $\sigma_+ = \{\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| > 1\}$;
2) *проектор Рисса $P_- = P(\sigma_-, A)$, построенный по спектральному множеству σ_-, является оператором умножения на проекторозначную функцию $P \in C_S(G, \mathrm{End}\, X)$;*

3) *оператор* $\mathcal{D}^{-1}$ *представим в виде* $\mathcal{D}^{-1} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} B_k$, *где* $(B_k x)(g) = \mathcal{D}_k(g)x(g - kg_0)$, $\mathcal{D}_k \in C_S(G, \operatorname{End} X)$, *причем операторы* $B_k \in \operatorname{End}\mathcal{F}$, $k \in \mathbb{Z}$, *являются голоморфными функциями от оператора* A *и определяются из соотношений*

$$B_k = A^{-k}P_-, \quad k \le 0; \quad B_k A^k = A^k B_k = -P_+; \quad B_k P_- = P_- B_k = 0, \quad k > 0, \tag{11}$$

где $P_+ = I - P_-$ *— дополнительный к* P_- *проектор;*

4) *для любых чисел* δ_-, δ_+ *из интервала* $(0,1)$, *удовлетворяющих условиям* $\delta_\pm\|\mathcal{D}^{-1}\| < 1$, *справедливы оценки*

$$\|P\|_\infty \le \|\mathcal{D}^{-1}\|, \quad \|B_k\| = \|\mathcal{D}_k\|_\infty \le \|\mathcal{D}^{-1}\|, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{12}$$

$$\|B_k\| \le \|\mathcal{D}^{-1}\|(1 - \delta_-\|\mathcal{D}^{-1}\|)^{-1}(1-\delta_-)^{-k}, \quad k \le -1, \tag{13}$$

$$\|B_k\| \le \|\mathcal{D}^{-1}\|(1 - \delta_+\|\mathcal{D}^{-1}\|)^{-1}(1+\delta_+)^{-k}, \quad k \ge -1, \tag{14}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|B_k\| \le \|\mathcal{D}^{-1}\|(1 + 8\|\mathcal{D}^{-1}\|).$$

Доказательство. Свойство 1) следует из условия (10). Имеет место равенство $\mathcal{F} = \mathcal{F}_- \oplus \mathcal{F}_+$, где $\mathcal{F}_\pm = \operatorname{Im} P_\pm$ — образы проекторов $P_\pm$, и оператор A имеет вид $A = A_- \oplus A_+$, где $A_\pm = A \mid \mathcal{F}_\pm$ — сужение A на $\mathcal{F}_\pm$. Тогда $\sigma(A_\pm) = \sigma_\pm$ и $\mathcal{D}^{-1} = (I_- - A_-)^{-1} \oplus (I_+ - A_+)^{-1}$, $I_\pm$ — тождественный оператор в $\mathcal{F}_\pm$. Поскольку спектральные радиусы $r(A_-)$ и $r(A_+^{-1})$ операторов A_- и A_+^{-1} меньше 1, то имеет место представление

$$\mathcal{D}^{-1} = \left(\sum_{k\ge 0} A_-^k\right) \oplus \left(\sum_{k\le -1} A_+^k\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} B_k, \tag{15}$$

где $B_k = A_-^k \oplus 0 = A^k P_-$, $k \ge 0$; $B_k = 0 \oplus A_+^k$, $k \le -1$. Используя простейшие свойства функционального исчисления (см. [3], гл. VII), операторы B_k, $k \in \mathbb{Z}$, можно представить формулами

$$B_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \lambda^{-k} R(\lambda, A)\, d\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{16}$$

из которых следуют соотношения (11). Из (16) получаются равенства

$$\widehat{B}_k(\gamma) = V(\gamma^{-1})B_k V(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \lambda^{-k} R(\lambda, \gamma(g_0)A)\, d\lambda =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \lambda^{-k}\gamma(-g_0) R(\lambda\gamma(-g_0), A)\, d\lambda = \gamma(-kg_0)B_k.$$

Таким образом, $\widehat{B}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, — п. п. функции и потому они являются разностными операторами с $\Lambda(B_k) = -\{kg_0\}$. Из теоремы 1 получаем (см. ее доказательство), что операторы B_k, $k \in \mathbb{Z}$, допускают представление вида $(B_k x)(g) = \mathcal{D}_k(g)x(g - kg_0)$, $k \in \mathbb{Z}$, где $\mathcal{D}_k \in C_S(G, \operatorname{End} X)$. Поскольку $B_0 = P_-$, то $(P_- x)(g) = P(g)x(g)$, $x \in \mathcal{F}$, где $P(g) = \mathcal{D}_0(g)$, $g \in G$, — проекторозначная функция из $C_S(G, \operatorname{End} X)$. Итак, доказаны свойства 1)–3). Оценки (12) следуют из оценок коэффициентов Фурье п. п. функции ($\|B_k\| \le \sup\limits_{\gamma\in\widehat{G}} \|\widehat{\mathcal{D}^{-1}}(\gamma)\| = \|\mathcal{D}^{-1}\|$).

Получим оценки (13). Если $\sigma_- = \emptyset$, то $P_- = 0$ и потому $B_k = 0\ \forall k \le 0$. Если $\sigma_- \ne 0$, то $P_- \ne 0$ и в этом случае рассмотрим число $r_- \in (0,1)$, удовлетворяющее условию $(1 - r_-)\|\mathcal{D}^{-1}\| < 1$. Пусть $\mathbb{T}(r_-) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_-\}$. Включение $\mathbb{T}(r_-) \subset \rho(A)$ следует из представления $\theta r_- I - A = (\theta I - A)[I - \theta(1 - r_-)R(\theta, A)]$, $\theta \in \mathbb{T}$, и равенств $\|R(\theta, A)\| = \|\mathcal{D}^{-1}\|$, $\theta \in \mathbb{T}$, вытекающих из (9).

При этом имеет место оценка $\|R(\lambda, A)\| \le \|\mathcal{D}^{-1}\|(1-\delta_-\|\mathcal{D}^{-1}\|)^{-1}$, где $\delta_- = 1 - r_-$ и $\lambda \in \mathbb{T}(r_-)$. Отсюда и из (16) следует представление

$$B_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}(r_-)} \lambda^{-k} R(\lambda, A)d\lambda, \quad k \le -1,$$

из которого вытекают оценки (13).

Аналогично устанавливаются оценки (14). В этом случае рассматривается число $r_+ > 1$, удовлетворяющее условию $\delta_+\|\mathcal{D}^{-1}\| < 1$, $\delta_+ = r_+ - 1$, и используется окружность $\mathbb{T}(r_+)$ для интегрального представления операторов B_k, $k \ge 1$. $\square$

В условиях следующей теоремы рассматривается последовательность функций $B_k(g) = B(g)B(g-g_0)\dots B(g-(k-1)g_0)$, $k \ge 1$, из пространства $C_S(G, \mathrm{End}\,X)$.

Теорема 3. *Для того чтобы оператор $\mathcal{D} = I - A$ был обратим, необходимо и достаточно, чтобы существовала проекторозначная функция $P : C_S(G, \mathrm{End}\,X)$ со следующими свойствами (в этом случае будем говорить, что последовательность функций обладает дискретной дихотомией; см.* ([14], *определение* 7.6.4)):

1) $B(g)P(g-g_0) = P(g)B(g)$ $\forall g \in G$;
2) *найдется число* $k \in \mathbb{N}$ *такое, что* $\sup\limits_{g\in G}\|P(g)B_k(g)\| < 1$;
3) *существуют числа* $m \in \mathbb{N}$ *и* $q > 1$, *для которых*

$$\|Q(g)B_m(g)x\| = \|B_m(g)Q(g-(m-1)g_0)x\| \ge q\|Q(g-(m-1)g_0)x\|$$

при всех $x \in X$, $g \in G$ *и* $B_m(g)$ *осуществляет изоморфизм образа* $\mathrm{Im}\,Q(g-(m-1)g_0)$ *проектора* $Q(g-(m-1)g_0)$ *и* $\mathrm{Im}\,Q(g)$ *при любом* $g \in G$ ($Q(g) = I - P(g)$, $g \in G$).

Доказательство. Необходимость условий непосредственно следует из теоремы 2. Существование функции P с указанными свойствами означает, что проектор $(P_-x)(g) = P(g)x(g)$, $g \in G$, $x \in \mathcal{F}$, перестановочен с оператором A (это следует из условия 1)), спектр сужения оператора A на подпространство $\mathcal{F}_- = \mathrm{Im}\,P_-$ лежит в круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ (что вытекает из условия 2)), оператор $A_+ = A \mid \mathrm{Im}\,P_+$, $P_+ = I - P_-$, обратим и $\sigma(A_+^{-1}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Поэтому $\sigma(A) \cap \mathbb{T} = \emptyset$, т. е. обратим оператор $\mathcal{D}$. $\square$

Следствие. Если оператор $\mathcal{D} = I - A \in \mathrm{End}\,\mathcal{F}$ обратим, то его обратный определяется формулой

$$(\mathcal{D}^{-1}x)(g) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_k(g)x(g-kg_0), \quad g \in G, \quad x \in \mathcal{F},$$

где $\mathcal{D}_k(g) = B_k(g)P(g-kg_0) = P(g)B_k(g)$, $g \in G$, $k \ge 1$, $\mathcal{D}_0(g) = P(g)$, $\mathcal{D}_k(g)x = 0$ $\forall x \in \mathrm{Im}\,Q(g-(k-1)g_0)$ и $\mathcal{D}_k(g) = (B_{-k}(g) \mid \mathrm{Im}\,Q(g-kg_0))^{-1}$ на $\mathrm{Im}\,Q(g-kg_0)$ при $k \le -1$.

Полученные в теоремах 1–3 результаты применим к исследованию линейного дифференциального оператора

$$\mathcal{L} = -\frac{d}{dt} + A(t) : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$$

в предположении, что семейство замкнутых линейных операторов $A(t) : D(A(t)) \subset X \to X$, $t \in \mathbb{R}$, порождает корректную задачу Коши для дифференциального уравнения $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x$ (см. [12]). Пусть $\{\mathcal{U}(t,s),\ s \le t\}$ — семейство эволюционных операторов для этого уравнения.

Будем считать функцию $x \in \mathcal{F}$ принадлежащей области определения $D(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$, если существует функция $f \in \mathcal{F}$ такая, что для почти всех $s \le t$ имеют место равенства

$$x(t) = \mathcal{U}(t,s)x(s) - \int_s^t \mathcal{U}(t,\tau)f(\tau)d\tau.$$

В этом случае полагаем $\mathcal{L}x = f$. При исследовании оператора $\mathcal{L}$ возникают проблемы, связанные, в первую очередь, с его неограниченностью. Чтобы их снять, семейству $\{\mathcal{U}(t,s),\ s \le t\}$ сопоставим полугруппу разностных операторов $\{T(t),\ t \ge 0\}$ из банаховой алгебры $\operatorname{End}\mathcal{F}$, имеющих вид

$$(T(t)x)(s) = \mathcal{U}(s, s-t)x(s-t), \quad s \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{F}, \quad t \ge 0.$$

Отметим два следующих утверждения из статьи [13].

Теорема 4. *Оператор $\mathcal{L}$ является производящим оператором полугруппы операторов $\{T(t),$ $t \ge 0\}$ в любом из банаховых пространств L_p, $p \in [1,\infty)$, C_0.*

Теорема 5. *Спектр $\sigma(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ не зависит от выбора пространства $\mathcal{F}$.*

Имеет место следующая теорема об отображении спектра, которая неверна для произвольной сильно непрерывной полугруппы линейных операторов (см. [10], гл. 16).

Теорема 6. *Для любого числа $t > 0$ справедливо равенство*

$$\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = \exp \sigma(\mathcal{L})t = \exp\{\lambda t : \lambda \in \sigma(\mathcal{L})\}.$$

Доказательство. Поскольку оператор $\mathcal{L} - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$, является производящим оператором полугруппы операторов $\{T(t)\exp\lambda t,\ t \ge 0\}$, то достаточно доказать, что оператор $\mathcal{L}$ обратим тогда и только тогда, когда $1 \notin \sigma(T(t))$.

Если оператор $\mathcal{L}$ обратим, то в силу теоремы 5 он обратим в банаховом пространстве C. В этом случае семейство эволюционных операторов $\{\mathcal{U}(s,\tau),\ \tau \le s\}$ допускает экспоненциальную дихотомию (см. [1], гл. X). Следовательно, семейство функций $B_k(s) = \mathcal{U}(s, s-kt)$, $k \ge 1$, допускает дискретную экспоненциальную дихотомию (см. формулировку теоремы 3). Поэтому из теоремы 3 следует обратимость оператора $I - T(t)$, т. е. $1 \notin \sigma(T(t))$. Из следствия теоремы 3 получаем формулу

$$((T(t) - I)^{-1}x)(s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} G(s, s+kt)x(s+kt), \quad x \in \mathcal{F},$$

где $G(s,\tau) = \{\mathcal{U}(s,\tau)p(\tau),\ \tau \le s;\ \mathcal{U}(s,\tau)Q(\tau),\ \tau > s\}$, $Q(\tau) = I - P(\tau)$ и проекторозначная функция $P : \mathbb{R} \to \operatorname{End} X$ взята из определения экспоненциальной дихотомии семейства эволюционных операторов (см. [1], гл. X).

Обратно, если $1 \notin \sigma(T(t))$, то из ([10], гл. XVI) следует, что $0 \notin \sigma(\mathcal{L})$, если полугруппа $\{T(t),\ t \ge 0\}$ сильно непрерывна (т. е. если $\mathcal{F} = L_p$, $p \in [1,\infty)$, или $\mathcal{F} = C_0$). Осталось еще раз воспользоваться теоремой 5. $\square$

Доказанная теорема позволяет свести изучение ряда спектральных свойств оператора $\mathcal{L}$ к изучению соответствующих свойств разностных операторов.

Литература

1. Левитан Б.М., Жиков В.В. *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения.* – М.: Изд-во МГУ, 1978. – 204 с.
2. Хьюитт Э., Росс К. *Абстрактный гармонический анализ.* – М.: Наука, Мир, 1975. – Т. 1, 2. – 657 с., 901 с.
3. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы.* – М.: Ин. лит., 1962. – Т. 1. – 895 с.
4. Бурбаки Н. *Спектральная теория.* – М.: Мир, 1972. – 183 с.
5. Курбатов В.Г. *Линейные дифференциально-разностные уравнения.* – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1990. – 164 с.
6. Мухамадиев Э. *Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций* // Матем. заметки. – 1972. – Т.11. – С.269–274.

7. Слюсчарчук В.Е. *Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов* // Матем. сб. – 1986. – Т.130. – № 1. – С.86–104.
8. Баскаков А.Г. *Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц* // Матем. заметки. – 1992. – Т.52. – № 2. – С.17–26.
9. Антоневич А.Б. *Линейные функциональные уравнения: операторный подход.* – Минск: 1988. – 232 с.
10. Хилле Э., Филлипс Р. *Функциональный анализ и полугруппы.* – М.: Ин. лит., 1962. – 829 с.
11. Забрейко П.П., Нгуен Вань Мин. *Экспоненциальная дихотомия и интегральные многообразия в теории потоков и их применения* // Докл. РАН. – 1992. – Т.324. – № 3. – С.515-518.
12. Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1967. – 464 с.
13. Баскаков А.Г. *Спектральный анализ линейных дифференциальных операторов и полугруппы разностных операторов* // Докл. РАН. – 1995. – Т.343. – № 3. – С.295–298.
14. Хенри Д. *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.* – М.: Мир, 1985. – 376 с.

Воронежский государственный университет

Поступила
07.02.1995