ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 5 (444)

УДК 519.6

*В.Г. КОРНЕЕВ, С. ЕНСЕН*

# ЭФФЕКТИВНОЕ ПРЕДОБУСЛАВЛИВАНИЕ МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ ДЛЯ $p$-ВЕРСИИ С ИЕРАРХИЧЕСКИМ БАЗИСОМ. I

## Введение

В последнее время $p$-версия метода конечных элементов для эллиптических уравнений второго порядка интенсивно изучается как аналитически [1]–[22], так и численно [23]–[26] с целью исследования возможностей разработки более эффективной техники их решения. Указанные исследования убедительно демонстрируют многие из достоинств этих методов, а также содержат множество компьютерных программ, разработанных для различных сложных прикладных задач. Алгоритмы $p$-версии в действительности являются алгоритмами типа метода декомпозиции области (МДО), а каждый элемент высокого порядка или объединение таких элементов является единицей естественной декомпозиции. Таким образом, чтобы применить некоторую технику ДО к системе алгебраических уравнений, получаемых при помощи $p$-версии, приходится решать задачи для подобластей разбиения, содержащих один или несколько конечных элементов высокого порядка. Судя по самым последним численным экспериментам, это составляет основную часть от общего объема вычислительной работы. Задача сопряжения, возникающая в Дирихле-Дирихле варианте МДО, это система алгебраических уравнений, матрица которой есть соответствующее дополнение Шура. Решение указанной системы, если не применять специальных процедур, также требует значительного объема вычислительной работы. Таким образом, для получения быстрых алгоритмов МДО для $p$-версии, очевидно, необходима разработка эффективных предобуславливателей для матриц жесткости элементов высокого порядка и соответствующих дополнений Шура.

Известно (см., напр., оценки в [12]), что равномерное распределение узлов лагранжевых элементов приводит к экспоненциальному росту чисел обусловленности относительно $p$ и потому неприемлемо для больших $p$ (см. также численные результаты в [12], [24], [26]). Предлагались некоторые способы предобуславливания для квадратных лагранжевых элементов с неравномерным распределением узлов. В недавних работах [3], [8] предложено использовать элементы с узлами, совпадающими с узлами квадратурной формулы Гаусса–Лобатто–Лежандра. Показано, что пятиточечный (в двумерном случае) сеточный оператор Лапласа на прямоугольной сетке с такими узлами — хороший предобуславливатель, который обеспечивает оценку $\mathcal{O}(1)$ для обобщенного числа обусловленности. Ясно, что предобуславливание при помощи сеточного оператора Лапласа с сильно неравномерной сеткой требует, во-первых, быстрой процедуры решения уравнений с такими сеточными операторами и, во-вторых, эффективного предобуславливания дополнения Шура.

---

Первая часть работы включает §1–§4; §5–§7 содержатся во второй части работы, публикуемой отдельно.

Работа поддержана частично грантами International Science Foundation, US National Research Council (программа CAST), грантом Office of Naval Research N00014-90-J-1238.

Использование иерархических базисов в $p$-версии дает несколько очевидных преимуществ, особенно, если необходимо, а это часто приходится делать, решать задачу для нескольких значений $p$. Для квадратных элементов координатные функции выбираются чаще всего в виде интегрированных полиномов Лежандра. В настоящей работе исследуется именно этот вариант $p$-версии. Предобуславливание для данного вида $p$-версии ранее подробно не анализировалось. В предлагаемой работе показано, что для достаточно общих криволинейных элементов, ассоциированных с такими базисными элементами, в качестве спектрально эквивалентного предобуславливателя матрицы жесткости элемента можно использовать матрицу, аналогичную пятиточечной разностной. В отличие от упомянутого выше предобуславливателя для лагранжевых элементов эта матрица порождается сеточным аналогом дифференциального оператора второго порядка с переменными коэффициентами, неограниченными на границе единичного квадрата, построенным на равномерной сетке. Анализируются также некоторые способы предобуславливания дополнения Шура.

Предлагаемые предобуславливатели МДО разработаны для решения систем алгебраических уравнений $p$- и $h$-$p$-версий для эллиптических уравнений второго порядка в произвольной двумерной области с кусочно-гладкой границей при однородных граничных условиях Дирихле. Специальное разбиение области на четырехугольники, криволинейные вблизи границы, а также специальные отображения квадратных базисных элементов на эти четырехугольники позволяет получить метод конечных элементов, в котором точно воспроизводятся граница и однородные граничные условия Дирихле. Применяемые отображения удовлетворяют условиям, которые мы называем обобщенными условиями квазиравномерности. Этих условий достаточно, чтобы обеспечить те же порядки сходимости и те же числа обусловленности, что и в случае равномерной квадратной сетки конечных элементов. Таким же способом можно построить и $p$-версию метода конечных элементов с кусочно-полиномиальной аппроксимацией границы, для которой все результаты остаются справедливыми.

Особое внимание уделено двум хорошо известным [1], [27] квадратным базисным элементам. Базис одного из них есть $(\widehat{L}_{ij}(x) = \widehat{L}_i(x_1)\widehat{L}_j(x_2),\ 0 \le i, j \le p)$, где $L_0$, $L_1$ — обычные “узловые” линейные функции $\widehat{L}_k = \beta_k \widetilde{L}_k$ для $k \ge 2$, $\beta_k$ — нормирующие множители, а $\widetilde{L}_k$ — интеграл от полинома Лежандра $L_{k-1}$ степени $k-1$. Базис другого — $(\widehat{L}_{i,j}(x)$ для $2 \le i, j, (i+j) \le p$, для $i = 0, 1,\ j = 2, 3, \ldots, p$ для $i = 2, 3, \ldots, p,\ j = 0, 1$ для $i, j = 0, 1)$. Эти пространства часто используются в $p$-версии, как в приложениях, так и в теоретических исследованиях и называются обычно тензорным произведением и серендиповыми пространствами соответственно. Преимущества второго базисного элемента над первым и над базисными лагранжевыми элементами состоит в том, что при его использовании существенно снижается количество неизвестных в $p$-версии без уменьшения скорости сходимости. Обсудим вкратце результаты, полученные в данной работе для первого из этих базисных элементов. Результаты для второго элемента слабее, в аспекте, связанном со специальными операторами продолжения. Это влияет на эффективность предобуславливателя дополнения Шура и глобального предобуславливателя МДО.

Прежде всего показано, что число обусловленности матрицы масс, а при некоторых предположениях и число обусловленности матрицы жесткости этих элементов имеют порядки $p^4$ и $p^2$ соответственно.

Если энергия определена интегралом Дирихле, то матрица жесткости базисного элемента имеет простую форму. При граничных условиях Дирихле ее можно упростить до спектрально-эквивалентной матрицы $\widehat{A}_{1,0}$ с пятиточечным шаблоном. При выполнении условий обобщенной квазиоднородности эта матрица может служить в качестве спектрально-эквивалентного предобуславливателя внутренних матриц жесткости криволинейных элементов. Для простоты предполагаем, что в МДО типа Дирихле-Дирихле подобластями декомпозиции служат сами конечные элементы. В этом случае решение задач Дирихле на подобластях при помощи предобуславливателя $\widehat{A}_{1,0}$ не вызывает затруднений. Отметим, что специальное нормирование интегрированных полиномов Лагранжа применяется для обеспечения описанных выше свойств матрицы $\widehat{A}_{1,0}$.

Несмотря на то, что в наших рассмотрениях исключение внутренних неизвестных не предполагается ни на каком из этапов алгоритма, предобуславливание дополнения Шура — основной шаг при построении глобального предобуславливателя МДО. Предлагаются несколько способов предобуславливания дополнения Шура. Все они основаны на предобуславливании дополнения Шура базисного элемента и определяют предобуславливатели в факторизованном виде, которые легко реализуются численно и обеспечивают хорошее или оптимальное обобщенное число обусловленности. Точнее говоря, предложено три предобуславливателя, представленных в виде произведений, включающих диагональные и треугольные матрицы, или матрицы, предполагающие использование быстрого дискретного преобразования Фурье. Эти предобуславливатели обеспечивают изменение обобщенных чисел обусловленности дополнения Шура в пределах от $\mathcal{O}(\log^2 p)$ до $\mathcal{O}(1)$. Реализация $p$-версии при помощи метода декомпозиции области и метода сопряженных градиентов в худшем случае требует $\mathcal{O}((\log p)^{3/2} \log \epsilon)$ итераций. В случае гладких коэффициентов на каждой итерации при этом приходится решать глобальную систему относительно неизвестных в вершинах элементов, независимые системы уравнений относительно внутренних неизвестных для каждого элемента с одной и той же матрицей для всех систем и независимые задачи сопряжения для каждой пары соседних элементов с одной и той же матрицей для всех пар. Эта матрица определяется при помощи упомянутого выше предобуславливателя дополнения Шура для базисного элемента и специальных операторов продолжения.

Можно избежать появления $\log p$ в оценке числа итераций, если применить специальный способ предобуславливания задачи сопряжения. Это относится прежде всего к $p$-версии с базисным элементом, который мы называем здесь комбинированным. Его внутренние координатные функции совпадают с такими функциями для предыдущих базисных элементов, а координатные функции граничных точек и вершин узловые. Соответствующие узлы являются узлами квадратурной формулы Гаусса–Лобатто–Чебышева. При этом оказывается, что дополнение Шура для подматрицы, соответствующей внутренним неизвестным, спектрально-эквивалентно хорошо известному предобуславливателю типа Дрыи [28] на равномерной сетке. Этот подход позволяет получить оптимальный предобуславливатель для задачи сопряжения, удобный для параллельных вычислений. Кроме того, мы предлагаем и другой вариант предобуславливателя МДО для $p$-версии с иерархическим базисом, описанным выше. Он позволяет улучшить оценку обобщенного числа обусловленности за счет небольшого усложнения алгоритма, но без увеличения порядка числа операций на каждой итерации.

Подчеркнем специально некоторые особенности подхода, предлагаемого в данной работе. Нашей основной целью является построение предобуславливателей МДО для глобальных матриц жесткости метода конечных элементов без проведения каких-либо преобразований системы алгебраических уравнений, например, исключения внутренних неизвестных. Как только предобуславливатель определен, он может быть использован в некоторой итерационной процедуре, например, в предобусловленном методе сопряженных градиентов, предобусловленном методе простых итераций и др. (Данные в работе оценки обобщенных чисел обусловленности непосредственно приводят к оценкам их скорости сходимости.) Поскольку в каждой из этих итерационных процедур используются лишь операторы, обратные к предобуславливателям, мы определяем предобуславливатели МДО через обратные к ним. В свою очередь обратные к глобальным предобуславливателям метода декомпозиции области могут определяться как суммы трех или двух вспомогательных матриц, как, например, в (5.1) или (6.21). Вспомогательные матрицы соответствуют внутренним неизвестным, неизвестным сторон и неизвестным вершин или внутренним и остальным неизвестным сторон и вершин. Таким образом, мы последовательно определяем эти вспомогательные матрицы и показываем, что их использование обеспечивает оптимальные или почти оптимальные оценки обобщенных чисел обусловленности, упрощает вычисления и уменьшает их объем. Предлагаемые предобуславливатели просты в применении. Например, в §5 глобальный предобуславливатель метода декомпозиции области выражается через шесть основных стандартных матриц, определенных для базисного элемента. Кроме того, сборка предобуславливателя не нужна, и основная часть операций может быть выполнена по элементам и по их сторонам в параллельном режиме.

Структура статьи такова. В §1 приводятся необходимые оценки чисел обусловленности для одномерного случая. В §2 получены оценки чисел обусловленности для матриц жесткости и масс квадратных элементов, §3 посвящен предобуславливанию дополнения Шура для квадратных базисных элементов. Предложены предобуславливатели дополнения Шура для обоих типов базисных элементов (с иерархическими и комбинированными базисами, ср. §3 и §6), оцениваются также обобщенные числа обусловленности. В §4 описан метод конечных элементов для эллиптических уравнений второго порядка при граничных условиях Дирихле в произвольной области с кусочно-гладкой границей. Результаты, получаемые в оставшейся части работы, относятся именно к этой схеме метода конечных элементов. В §5 предлагается наиболее простой для использования предобуславливатель МДО. В §6 рассматриваются некоторые близкие предобуславливатели, позволяющие улучшить результаты. В §7 обсуждаются алгоритмы, основанные на применении предлагаемых предобуславливателей.

Некоторые из основных результатов данной статьи представлены в препринтах [13], [14] и сформулированы в [15].

Введем обозначения, используемые в работе, $I := (-1,1)$, $I^\star := (0,\pi)$, $\sqcap := I\times I$; кроме того, $I$ с различными индексами используется для обозначения единичных матриц. $\mathcal{P}_{p,x}$, $\mathcal{P}_x^{(p)}$ — пространства полиномов степени не выше $p$ по совокупности переменных или по каждой переменной соответственно, $\mathcal{P}_x^{[p]}$ — пространство, содержащее $\mathcal{P}_{p,x}$ и полиномы первой степени по одной переменной и степени $p$ — по другой. $\widehat{\mathcal{E}}$, $\widehat{\mathcal{E}}_0$ $\widehat{\mathcal{E}}_m$, $\widehat{\mathcal{E}}_{m,0}$ — базисные элементы, которые будут точно определены позднее (в §§ 2, 6); $\mathcal{E}_r$ — текущий конечный элемент $p$-версии; $H(\widehat{\mathcal{E}})$, $H(\widehat{\mathcal{E}}_0)$, $H(\mathcal{E}_r)$ — пространства, порождаемые соответствующими элементами. $D_x^q v := \partial^{|q|}v/\partial x_1^{q_1}\partial x_2^{q_2}$, $q=(q_1,q_2)$, $q_1,q_2\ge 0$, $|q|=q_1+q_2$, $(\cdot,\cdot)_\Omega$, $\|\cdot\|_\Omega=\|\cdot\|_{0,\Omega}$ — скалярные произведения и нормы в $L^2(\Omega)$, $|\cdot|_{k,\Omega}$, $\|\cdot\|_{k,\Omega}$ — полунорма и норма в пространстве Соболева $W_2^k(\Omega)$, т.е.

$$|v|^2_{k,\Omega}=\sum_{|q|=k}\int_\Omega (D_x^q v)^2dx,\quad \|v\|^2_{k,\Omega}=\|v\|^2_{0,\Omega}+\sum_{l=1}^k |v|^2_{l,\Omega}.$$

$\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$ — подпространство функций пространства $W_2^1(\Omega)$, имеющих нулевые следы на $\partial\Omega$; $\|\cdot\|_{1/2,I}$, ${}_0\|\cdot\|_{1/2,I}$ — нормы в пространстве $W_2^{1/2}(I)$ и подпространстве ${}_0W_2^{1/2}(I)\subset W_2^{1/2}(I)$ функций, имеющих нулевые значения при $x=\pm1$ (определения см., напр., в [29]). Эти нормы для $I_*=(a,b)$ даются выражениями

$$\begin{aligned}
\|v\|^2_{1/2,I_*} &:= \|v\|^2_{0,I_*}+|v|^2_{1/2,I_*},\\
|v|^2_{1/2,I_*} &:= \int_a^b\int_a^b\left(\frac{v(x)-v(y)}{x-y}\right)^2dx\,dy,\\
{}_0\|v\|^2_{1/2,I_*} &:= \|v\|^2_{1/2,I_*}+2\int_a^b\frac{v^2(x)}{x-a}dx+2\int_a^b\frac{v^2(x)}{b-x}dx.
\end{aligned}$$

Норма $\|\cdot\|_{1/2,\gamma_i}$, где $\gamma_i$ — сторона $\sqcap$ определяется аналогично $\|\cdot\|_{1/2,I}$. Например, когда $\gamma_i$ есть одна из линий $x_1=c$, $c=\pm1$,

$$\begin{aligned}
\|v\|^2_{1/2,\gamma_i} &:= \|v\|^2_{0,\gamma_i}+|v|^2_{1/2,\gamma_i},\\
|v|^2_{1/2,\gamma_i} &:= \int_{-1}^1\int_{-1}^1\left(\frac{v(c,t)-v(c,\tau)}{t-\tau}\right)^2dt\,d\tau.
\end{aligned}$$

Потребуется также норма

$$\|v\|^2_{1/2,\partial\sqcap}=\sum_{i=1}^4\|v\|^2_{1/2,\gamma_i}+\sum_{i=1}^4\int_0^1\frac{\left(v_{j(i)}(t)-v_{l(i)}(t)\right)^2}{|t|}dt,$$

где $u_{j(i)}$ означает сужение $u$ на $\gamma_{j(i)}$, $t$ — расстояние до $V_i$ угловой точки $\sqcap$, общей для $\gamma_{j(i)}$ и $\gamma_{l(i)}$. Каждую вершину $V_i$ ассоциируем с предшествующей стороной $j(i)$ и последующей стороной $l(i)$ при обходе границы области против часовой стрелки. Положим $|v|^2_{1/2,\partial\sqcap} := \|v\|^2_{1/2,\partial\sqcap} - \|v\|^2_{0,\partial\sqcap}$. Определенные таким образом норма и полунорма для пространства $W_2^{1/2}(\partial\sqcap)$ эквивалентны $\|v\|_{1/2,\partial\sqcap} := \inf\|w\|_{1,\sqcap}$ и $|v|_{1/2,\partial\sqcap} := \inf|w|_{1,\sqcap}$ соответственно, где инфимум берется по множеству функций $w \in W_2^1(\sqcap)$, удовлетворяющих условию $w = v$ на $\partial\sqcap$. $\mathcal{A}^+$ — псевдообратная матрица к матрице $\mathcal{A}$. $\lambda(\mathcal{A})$, $\lambda_{\min}(\mathcal{A})$, $\lambda_{\max}(\mathcal{A})$ — собственное число, минимальное ненулевое и максимальное собственные числа симметричной неотрицательной матрицы $\mathcal{A}$. Символы $\prec$, $\succ$, $\asymp$ означают односторонние или двусторонние неравенства, в которых опущены некоторые абсолютные постоянные.

## 1. Одномерный конечный элемент с интегрированными полиномами Лежандра в качестве координатных функций

В этом параграфе приводятся некоторые вспомогательные результаты для одномерного случая. Рассмотрим базис, представляющий собой упорядоченное множество $2N+1$ функций, определенных на $I$,

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \left(\widetilde{L}_i \mid \widetilde{L}_0 = L_0,\ \widetilde{L}_1 = L_1,\ \widetilde{L}_j = \int_{-1}^{x} L_{j-1}(s)ds,\ j = 2,3,\dots,2N\right),$$

и содержащий два первых полинома Лежандра, а именно, постоянную $L_0 \equiv 1$, линейную $L_1 = x$, функции и интегралы от полиномов Лежандра. Как известно,

$$\|L_i\|^2 = 2/(2i+1),\ i \geq 0;\ \ \widetilde{L}_j(x) = \frac{1}{2j-1}[L_j(x) - L_{j-2}(x)],\ j \geq 2. \tag{1.1}$$

Количество функций в множестве $\widetilde{\mathcal{M}}$ принято равным $2N+1$ только для удобства изложения. Если взять его равным $2N+2$, то результаты сохраняются. В дальнейшем удобно будет использовать другую нормировку и иногда делить $\widetilde{\mathcal{M}}$ на два подбазиса для нечетных и четных номеров соответственно, с соответствующим разбиением рассматриваемых далее квадратичных форм. Положим $\widehat{L}_i = \widetilde{L}_i/\|\widetilde{L}_i\|$ так, что $\|\widehat{L}_i\| = 1$,

$$\overline{L}_i = \begin{cases} \widehat{L}_{2i}, & i = 0,1,\dots,N; \\ \widehat{L}_{2(i-N)-1}, & i = N+1,\dots,2N, \end{cases}$$

и

$$\begin{gathered} \mathcal{M} = (\widehat{L}_i,\ i = 0,1,\dots,2N), \quad \overline{\mathcal{M}} = (\overline{L}_i,\ i = 0,1,\dots,2N), \\ \operatorname{span}\mathcal{M} = \operatorname{span}\overline{\mathcal{M}} = \operatorname{span}\overline{\mathcal{M}}_+ \oplus \operatorname{span}\overline{\mathcal{M}}_-,\ \text{где} \\ \overline{\mathcal{M}}_+ = (\overline{L}_i = \widehat{L}_{2i},\ \ i = 0,1,\dots,N),\ \text{и} \\ \overline{\mathcal{M}}_- = (\overline{L}_i = \widehat{L}_{2(i-N)-1},\ \ i = N+1,\dots,2N), \end{gathered} \tag{1.2}$$

причем $\widehat{L}_i$ задаются явными соотношениями

$$\begin{gathered} \widehat{L}_0 = \frac{L_0}{\sqrt{2}},\ \ \widehat{L}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}L_1,\ \ \widehat{L}_j = \beta_j\widetilde{L}_j = \gamma_j[L_j - L_{j-2}],\ j \geq 2, \\ \beta_j = \frac{1}{2}\sqrt{(2j-3)(2j-1)(2j+1)},\ \ \gamma_j = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(2j-3)(2j+1)}{2j-1}}. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Базисы $\mathcal{M}$, $\overline{\mathcal{M}}$ отличаются только порядком следования их элементов.

Выражение $f=\sum\limits_{i=0}^{2N}\overline{b}_i\overline{L}_i$ и квадратичные формы $(f,f)_I$, $(f',f')_I$ порождают матрицы $(f,f)_I=\langle\overline{K}_0\overline{b},\overline{b}\rangle$, $(f',f')_I=\langle\overline{K}_1\overline{b},\overline{b}\rangle$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $I\!R^{2N+1}$, $\overline{b}=(\overline{b}_i)$ — вектор коэффициентов $\overline{b}_i$. Нетрудно заметить, что

$$\overline{K}_0=\begin{pmatrix}\overline{K}_{0,+} & 0\\ 0 & \overline{K}_{0,-}\end{pmatrix},\quad \overline{K}_1=\begin{pmatrix}\overline{K}_{1,+} & 0\\ 0 & \overline{K}_{1,-}\end{pmatrix},$$

причем матрицы $\overline{K}_{1,+}$, $\overline{K}_{1,-}$ диагональны, матрицы $\overline{K}_{0,+}$, $\overline{K}_{0,-}$ трехдиагональны. Через $K_0$, $K_1$ обозначаем матрицы отличающиеся от матриц $\overline{K}_0$, $\overline{K}_1$ лишь перестановкой строк и столбцов, соответствующей представлению $f=\sum\limits_{i=0}^{2N}\widehat{b}_i\widehat{L}_i$. Для аналогичных матриц, порождаемых подмножеством внутренних координатных функций ($b_0=b_1=0$ или, что все равно, $\overline{b}_0=\overline{b}_{N+1}=0$), используем такие же обозначения, но с дополнительным нижним индексом "0". Например, $K_{0,0}$ ($\overline{K}_{0,0,+}$) получается из $K_0$ ($\overline{K}_{0,+}$) вычеркиванием двух (одной) первых строк и столбцов. Очевидно, эти матрицы соответствуют граничным условиям $f(-1)=f(1)=0$.

Вычисления показывают, что

$$K_{0,0}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -c_2 & & & & \\ & 1 & 0 & -c_3 & & 0 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & 1 & 0 & -c_i & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & 0 & -c_{2N-2} \\ & \mathrm{SYM} & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 1\end{pmatrix},$$

где

$$c_i=\frac{1}{2}\left(\frac{(2i-3)(2i+5)}{(2i+3)(2i-1)}\right)^{1/2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{12}{4i^2+4i-3}\right)^{1/2},\ i\geq 2. \tag{1.4}$$

Введем также матрицу

$$\widehat{\Lambda}=\widehat{\triangle}+\widehat{\mathcal{D}}, \tag{1.5}$$

где $\widehat{\mathcal{D}}$ — диагональная матрица

$$\widehat{\mathcal{D}}=\mathrm{diag}\left[\frac{1}{4},\frac{1}{9},\ldots,\frac{1}{(k+1)^2},\ldots,\frac{1}{4N^2}\right], \tag{1.6}$$

$$\widehat{\triangle}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & -1 & & & & \\ & 2 & 0 & -1 & & 0 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & 2 & 0 & -1 & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 2 & 0 & -1 \\ & \mathrm{SYM} & & & & 2 & 0 \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Согласно приводимой ниже лемме матрица $\widehat{\Lambda}$ может служить спектрально-эквивалентным предобуславливателем для матрицы масс $K_{0,0}$.

**Лемма 1.1.** *Ненулевые собственные числа матриц $K_0$, $K_1$ удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{gathered}\lambda_{\min}(K_1) = 3, \quad \lambda_{\max}(K_1) = (4N-3)(4N+1)/2, \\ \lambda_{\min}(K_{0,0}) \asymp 1/N^2, \quad \lambda_{\max}(K_0) \asymp 1.\end{gathered} \tag{1.8}$$

*Матрица масс $K_{0,0}$ имеет диагональное преобладание, что выражается соотношением*

$$1 - c_i - c_{i-2} \asymp 1/(i^2+1), \quad i = 2, 3, \ldots, 2N-2 \tag{1.9}$$

*(подразумевается, что $c_0 = c_1 = c_{2N-1} = c_{2N} = 0$), и спектрально эквивалентна матрице $\widehat{\Lambda}$, т.е.*

$$b^T \widehat{\Lambda} b \prec b^T K_{0.0} b \prec b^T \widehat{\Lambda} b. \tag{1.10}$$

**Доказательство.** Указанные оценки, кроме оценки для $\lambda_{\min}(K_{0,0})$ и (1.10), очевидны. Благодаря соотношениям (1.1)–(1.3) можно показать, что

$$K_1 = \operatorname{diag}\Big[0, 3, \ldots, \frac{(2i-3)(2i+1)}{2}, \ldots, \frac{(4N-3)(4N+1)}{2}\Big], \tag{1.11}$$

и потому соотношения (1.8) для $K_1$ справедливы. Неравенства (1.9) непосредственно следуют из (1.4).

Для доказательства (1.10) представим $K_{0,0}$ подобно (1.5) в форме

$$K_{0,0} = \triangle_0 + \mathcal{D}_0, \tag{1.12}$$

где $\mathcal{D}_0$ — диагональная матрица с элементами

$$d_0^{(k,k)} = \begin{cases} 1 - c_{k+1}, & k = 1, 2; \\ 1 - c_{k+1} - c_{k-1}, & k = 3, 4, \ldots, 2n-2; \\ 1 - c_{k-1}, & k = 2N-2, 2N-1, \end{cases} \tag{1.13}$$

каждый из которых есть величина диагонального преобладания соответствующей строки матрицы $K_{0,0}$. Спектральная эквивалентность матриц $\triangle_0$ и $\widehat{\triangle}$ следует из того факта, что числа $c_i$ в (1.13) равномерно ограничены некоторой положительной постоянной снизу и $1/2$ — сверху. Спектральная эквивалентность матриц $\mathcal{D}_0$ и $\widehat{\mathcal{D}}$ следует из (1.9). Матрица $\triangle_0$, очевидно, положительна. Оценка снизу для $\lambda_{\min}(K_{0,0})$ есть следствие (1.9), (1.12), (1.13), поскольку уже показано, что $\lambda_{\min}(\mathcal{D}_0) \asymp 1/N^2$.

Докажем также, что $\lambda_{\min}(\triangle_0) \asymp 1/N^2$. Поскольку $\triangle_0$ и $\widehat{\triangle}$ спектрально-эквивалентны, достаточно доказать $\lambda_{\min}(\widehat{\triangle}) = \lambda_{\min}(\overline{\triangle}) \asymp 1/N^2$, где $\overline{\triangle}$ совпадает с $\widehat{\triangle}$, но строки и столбцы упорядочены в соответствии с множеством $\overline{\mathcal{M}}$. Матрица $\overline{\triangle}$ имеет вид

$$\overline{\triangle} = \begin{pmatrix} \overline{\triangle}_+ & 0 \\ 0 & \overline{\triangle}_- \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

с трехдиагональными блоками, у которых элементы на главной диагонали равны 2, а на соседних диагоналях равны $-1$. Матрицы $\overline{\triangle}_+$ и $\overline{\triangle}_-$ отличаются лишь тем, что одна имеет размерность $N \times N$, а другая — $(N-1) \times (N-1)$. Таким образом, достаточно рассмотреть лишь $\overline{\triangle}_+$. Обратную к матрице $\overline{\triangle}_+$ можно записать в явном виде (см. [30]). А именно,

$$\overline{\triangle}_+^{-1} = (\kappa^{(i,j)}), \quad \kappa^{(i,j)} = K(x^{(i)}, x^{(j)}), \quad i, j = 1, \ldots, N,$$

где $K(x,t)$ — функция Грина для обыкновенного дифференциального оператора $d^2u/dx^2$ на $(0,b)$ с граничными условиями $u(0) = u(b) = 0$, т.е.

$$K(x,t) = x(b-t)/b \quad \text{для} \quad 0 \le x \le t \le b,$$

$K(t,x) = K(x,t)$, $x^{(i)}$ — внутренние точки сетки $x^{(i)}$, $i = 0, 1, \ldots, N+1$, $x^{(0)} = 0$, $x^{(N+1)} = b$.

Для $\lambda_{\max}(\overline{\triangle}_+^{-1})$ можно использовать оценку Фробениуса через максимум сумм модулей элементов каждой строки. Принимая во внимание то, что сумма от $K(x, x^{(j)})$ по $j = 1, \ldots, N$ совпадает с квадратурной формулой трапеций, которая при $x = x^{(i)}$ равна соответствующему интегралу, получаем

$$\lambda_{\max}(\overline{\triangle}_+^{-1}) \le \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} K(x^{(i)}, x^{(j)}) = \max_{1\le i\le N} \int_0^b K(x^{(i)}, t)dt = (N+1)^2/8. \tag{1.15}$$

Следовательно, оценки снизу для $\lambda_{\min}(\triangle_0)$ и $\lambda_{\min}(\mathcal{D}_0)$ имеют один и тот же порядок. Покажем, что оценка $\lambda_{\min}(K_{0,0})$ точна по порядку. Для вектора

$$b_+ = (0, 0, \ldots, b_l, b_{l+1}, \ldots, b_N)^T, \quad l = \lfloor \tfrac{N}{2} \rfloor, \quad b_+ \in I\!R^{N+1}, \tag{1.16}$$

и матрицы $\overline{D}_+$, которая является диагональным блоком $\widehat{D}$, соответствующим четным строкам и столбцам, имеем

$$b_+^T \overline{\mathcal{D}}_+ b_+ \le \frac{1}{(N+1)^2} b_+^T b_+. \tag{1.17}$$

Полагая в векторе $b_+$ из (1.16) $b_j = 1$, $j = l, l+1, \ldots, N$, и обращаясь вновь к явной форме $\triangle_{0,+}^{-1}$, получим

$$b_+^T \triangle_+^{-1} b_+ = \sum_{l\le i,j\le N} K(x^{(i)}, x^{(j)}) \ge \int_{b/2}^b \int_{b/2}^b K(x,t)dt\,dx = \frac{(N+1)^2}{48}$$

и, следовательно,

$$b_+^T \overline{\Delta}_+^{-1} b_+ \ge c N^2 b_+^T b_+,$$

где $c$ — абсолютная постоянная. Поэтому из (1.15) и последнего неравенства вытекает, что $\lambda_{\min}(\overline{\triangle}) = (\triangle_0) \asymp 1/N^2$. Поскольку уже показано, что $\lambda_{\min}(\mathcal{D}_0) \asymp 1/N^2$, то оценки (1.8) для $\lambda_{\min}(K_{0,0})$ выполнены. $\square$

В методе конечных элементов используем функции

$$\widehat{L}_0 = \frac{1}{2}(1+x), \quad \widehat{L}_1 = \frac{1}{2}(1-x) \tag{1.18}$$

вместо первых двух функций в (1.3). Заметим, что при этом $\|\widehat{L}_i\| \ne 1$ для $i = 0, 1$. В дальнейшем обозначим через $\mathcal{M}$, $\overline{\mathcal{M}}$ базисы, содержащие именно эти функции. Очевидно, что оценки для границ ненулевого спектра $\overline{K}_0$, $\overline{K}_1$ по порядку при этом сохраняются.

## 2. Квадратный элемент с иерархическими координатными функциями в виде произведений интегрированных полиномов Лежандра

Здесь описываются два базисных элемента, которые будут использованы в $h$-$p$-версии, излагаемой вкратце в §4. Получены оценки границ спектров для матриц жесткости и масс этих элементов, а также некоторые другие неравенства, на которых основаны результаты §§ 5, 6. Под базисным элементом $\widehat{\mathcal{E}} = \widehat{\mathcal{E}}\{\widehat{L}_{i,j},\ 0 \le i, j \le p\}$, $p = 2N$, будем понимать квадрат $\sqcap := I \times I$ в совокупности со специальным базисом функций $\mathcal{M}_\sqcap = (\widehat{L}_{i,j},\ 0 \le i, j \le p)$, определенных на $\sqcap$

$$\widehat{L}_{i,j}(x) = \widehat{L}_i(x_1)\widehat{L}_j(x_2). \tag{2.1}$$

Пространство, натянутое на эти функции, есть пространство $H(\widehat{\mathcal{E}}) = \mathcal{P}_x^{(p)}$ полиномов

$$\widehat{u}(x) = \sum u_{i,j} \widehat{L}_{i,j}(x), \quad 0 \le i, j \le p, \tag{2.2}$$

содержащее все полиномы степени не выше $p$ по каждой переменной $x_1$, $x_2$ в отдельности. Пусть $A_0$, $A_1$ — матрицы билинейных форм

$$(\widehat{u},\widehat{v})_\sqcap = u_p^T A_0 v_p, \quad a_\sqcap(\widehat{u},\widehat{u}) = \int_\sqcap \nabla\widehat{u}\cdot\nabla\widehat{v}\,dx = u_p^T A_1 v_p, \quad u_p, v_p \leftrightarrow \widehat{u},\widehat{v}, \tag{2.3}$$

соответствующих данному базису, где соотношения $u_p \leftrightarrow \widehat{u}, v_p \leftrightarrow \widehat{v},\ldots$ понимаются как изоморфизм между полиномами $\widehat{u},\widehat{v} \in \mathcal{P}_x^{(p)}$ и векторами $u_p = (u_{i,j}), v_p = (v_{i,j})\ldots$ из $I\!R^{(p+1)^2}$ коэффициентов их представлений в базисе $(\widehat{L}_{i,j})$. Матрицы $A_0$, $A_1$ — матрица масс и матрица жесткости базисного элемента, соответствующая заданию энергии интегралом Дирихле.

В дальнейшем удобно разбить базис $\mathcal{M}_\sqcap$ на подбазисы $\mathcal{M}_I$, $\mathcal{M}_{II}$, $\mathcal{M}_{III}$, содержащие соответственно так называемые внутренние координатные функции, координатные функции сторон и координатные функции вершин,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_I &= (\widehat{L}_{i,j},\ 2 \le i,j \le p),\\ \mathcal{M}_{II} &= (\widehat{L}_{i,j},\ i = 0,1,\ j = 2,3,\ldots,p \text{ или } i = 2,3,\ldots,p,\ j = 0,1),\\ \mathcal{M}_{III} &= (\widehat{L}_{i,j},\ i = 0,1 \text{ и } j = 0,1). \end{aligned}$$

Обозначим через $A_{0,0}$, $A_{1,0}$ внутренние матрицы масс, порождаемые множеством $\mathcal{M}_I$. Очевидно, они соответствуют однородным граничным условиям Дирихле на $\partial\sqcap$, поскольку функции из $\mathcal{M}_I$ — это функции из $\mathcal{M}_\sqcap$, равные нулю на $\partial\sqcap$.

**Лемма 2.1.** *Справедливы следующие оценки:*

$$\lambda_{\min}(A_0) \asymp N^{-4}, \quad \lambda_{\max}(A_0) \asymp 1, \quad \lambda_{\min}(A_{1,0}) \asymp 1, \quad \lambda_{\max}(A_{1,0}) \asymp N^2. \tag{2.4}$$

**Доказательство.** (Эта лемма доказана в [13], лемма 2.1.) Матрицы $A_0$, $A_{1,0}$ представляются в виде произведений Кронекера (или прямых произведений)

$$A_0 = K_0 \otimes K_0,\ A_{1,0} = K_{1,0} \otimes K_{0,0} + K_{0,0} \otimes K_{1,0},$$

где $K_{1,0}$, $K_{0,0}$ — матрицы, получаемые из $K_0$, $K_1$ вычеркиванием первых двух строк и столбцов. В соответствии со свойствами произведения Кронекера $\{\lambda_{m,n}(A\otimes B)\} = \{\lambda_m(A)\} \times \{\lambda_n(B)\}$ и, следовательно, оценки снизу для $\lambda_{\min}$ и сверху для $\lambda_{\max}$ вытекают непосредственно из (1.8). Однако оценка $\lambda_{\min}(A_{1,0}) \succ N^{-2}$, получаемая этим способом, слишком груба, и для доказательства оценки (2.4) необходимо действовать иначе. Используем представление $K_{0,0} = \triangle_0 + \mathcal{D}_0$ (см. (1.12)). Тогда

$$\lambda_{\min}(A_{1,0}) = \lambda_{\min}(K_{1,0}\otimes(\triangle_0 + \mathcal{D}_0) + (\triangle_0 + \mathcal{D}_0)\otimes K_{1,0}) \ge \lambda_{\min}(K_{1,0}\otimes\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_0\otimes K_{1,0}).$$

Матрицы $K_{1,0}$ и $\mathcal{D}_0$ диагональны, и их элементы в строке с номером $i$ имеют порядки $i^2$, $(i^2+1)^{-1}$. Следовательно,

$$\lambda_{\min}(A_{1,0}) \succ \inf_{i,j}\left(\frac{i^2}{j^2+1} + \frac{j^2}{i^2+1}\right) \succ 1, \quad 2 \le i,j \le 2N, \tag{2.5}$$

где $i$ и $j$ соответствуют номерам координатных функций в множестве $\mathcal{M}$. Отсюда можно заключить, что оценка для $\lambda_{\min}(A_{1,0})$, сформулированная в лемме, справедлива. Для получения оценки сверху рассмотрим вектор $w_p$ в $I\!R^{(2N-1)^2}$ вида $w_p = a\otimes b$, где $a = (a_i) \in I\!R^{(2N-1)}$ и $b = (b_i) \in I\!R^{(2N-1)}$. Можно написать

$$\begin{aligned} \inf_{u_p\in I\!R^{(2N-1)^2}} \frac{u_p^T A_{1,0} u_p}{u_p^T u_p} \le \inf_{w_p} \frac{w_p^T A_{1,0} w_p}{w_p^T w_p} = \inf_{a,b}\left(\frac{a^T K_{1,0} a}{a^T a}\,\frac{b^T K_{0,0} b}{b^T b} + \frac{a^T K_{0,0} a}{a^T a}\,\frac{b^T K_{1,0} b}{b^T b}\right) \le \\ \le 2\inf_a \frac{a^T K_{1,0} a}{a^T a}\sup_b \frac{b^T K_{0,0} b}{b^T b}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Отсюда и из леммы 1.1 вытекает оценка сверху для $\lambda_{\min}(A_{1,0})$. Диагональ матрицы $K_{0,0}$ состоит из единиц, матрица $K_{1,0}$ имеет диагональные элементы порядка $N^2$, что обеспечивает справедливость оценки $\lambda_{\max}$ снизу. В соответствии с упомянутым свойством произведения Кронекера $\lambda_{\min}(A_{0,0}) = (\lambda_{\min}(K_{0,0}))^2$, а оценки для $\lambda_{\min}(K_{0,0})$ известны. $\square$

**Замечание 2.1.** Численные эксперименты с некоторыми координатными функциями (см., напр., [1], [2]) показали, что число обусловленности локальной матрицы жесткости растет как $\mathcal{O}(p^3)$ или $\mathcal{O}(p^4)$. Для координатных функций, предлагаемых здесь, в соответствии с приведенной выше леммой, это число обусловленности есть $\mathcal{O}(p^2)$. Числа обусловленности для матриц жесткости и матриц масс квадратных элементов, порожденных теми же (с точностью до скалярных множителей) координатными функциями, были недавно исследованы в [31] при граничных условиях Дирихле (аналогичные исследования предприняты в лемме 2.1). После предобуславливания при помощи диагональной матрицы были получены те же по порядку границы спектра, что и (2.4). Из леммы 2.1 вытекает, что это предобуславливание не является необходимым. Следует также отметить, что введение использованных здесь базисов имело целью и, как оказалось, действительно позволяет предобуславливание при помощи простейших сеточных операторов, аналогичных разностным (см. (5.4)).

Приведем некоторые дополнительные неравенства, относящиеся к предобуславливанию матрицы жесткости $A_1$, а также, как это будет показано в §5, и к предобуславливанию МДО глобальной матрицы жесткости.

**Лемма 2.2.** *Пусть $\widehat{u} \in H(\widehat{\mathcal{E}})$ представлена в виде $\widehat{u} = \widehat{u}_I + \widehat{u}_{II} + \widehat{u}_{III}$, где $\widehat{u}_L \in \operatorname{span} \mathcal{M}_L$, $L = I, II, III$ и*

$$a(v,w) = \int_{\sqcap} \nabla v \cdot \nabla w \, dx.$$

*Тогда*

$$\frac{c_1}{1+\log p}[a(\widehat{u}_I + \widehat{u}_{II}, \widehat{u}_I + \widehat{u}_{II}) + a(\widehat{u}_{III}, \widehat{u}_{III})] \le a(\widehat{u}, \widehat{u}) = \\ = a(\widehat{u}, \widehat{u}) \le 2[a(\widehat{u}_I + \widehat{u}_{II}, \widehat{u}_I + \widehat{u}_{II}) + a(\widehat{u}_{III}, \widehat{u}_{III})] \quad (2.7)$$

*с абсолютной постоянной $c_1$.*

**Доказательство.** Правое неравенство — неравенство типа Коши. Левое неравенство (2.7) почти непосредственно вытекает из следующей теоремы.

**Теорема 2.1** ([1]). *Для любого полинома $u(x) \in \mathcal{P}_{p,x}$ и $x \in I$*

$$|u(x)| \le C(1 + \log^{\frac{1}{2}} p)\|u\|_{\frac{1}{2},I} \quad (2.8)$$

*с абсолютной постоянной $C$. Эта оценка асимптотически неулучшаема, т.е. существует такая постоянная $\overline{c}$, и для любого $p \ge 2$ существует такой полином $v_p \in \mathcal{P}_{p,x}$, что $\|v_p\|_{\frac{1}{2},I} \le \overline{c}$, а $|v_p(-1)| \ge \log^{\frac{1}{2}} p$.*

Продолжим теперь доказательство леммы 2.2. Имеем

$$a(\widehat{u}_I + \widehat{u}_{II}, \widehat{u}_I + \widehat{u}_{II}) = a(\widehat{u} - \widehat{u}_{III}, \widehat{u} - \widehat{u}_{III}) \le 2(a(\widehat{u},\widehat{u}) + a(\widehat{u}_{III}, \widehat{u}_{III})), \text{ поэтому} \\ a(\widehat{u}_I + \widehat{u}_{II}, \widehat{u}_I + \widehat{u}_{II}) + a(\widehat{u}_{III}, \widehat{u}_{III}) \le 2a(\widehat{u},\widehat{u}) + 3a(\widehat{u}_{III}, \widehat{u}_{III}). \quad (2.9)$$

Поскольку $\widehat{u}_{III}$ билинейна, ее максимум достигается в одной из вершин $x = (\pm 1, \pm 1)$ квадрата $\sqcap$, и в этих точках $\widehat{u}_{III} = \widehat{u}(x)$. Следовательно, $a(\widehat{u}_{III}, \widehat{u}_{III}) \le c_2 \max |u(x)|^2$, где максимум берется по $x = (\pm 1, \pm 1)$, откуда, применяя (2.8) и теорему о следах из [1], получим

$$a(\widehat{u}_{III}, \widehat{u}_{III}) \le c_2 c_3 (1 + \log p)\|\widehat{u}\|^2_{\frac{1}{2},\gamma_i} \le c_4 c_2 c_3 (1 + \log p)\|\widehat{u}\|^2_{1,\sqcap},$$

где $\gamma_j$, $j = 1, \dots, 4$, — стороны $\sqcap$, а $\gamma_i$ — сторона, прилегающая к той вершине, где $\widehat{u}_{III}$ достигает своего максимума. Используя теперь рассуждения типа леммы Брамбла–Гильберта, можем написать

$$a(\widehat{u}_{III}, \widehat{u}_{III}) \le c(1 + \log p)|\widehat{u}|^2_{1,\sqcap} \le c(1 + \log p)a(\widehat{u}, \widehat{u}), \tag{2.10}$$

где $c$ — абсолютная постоянная. Комбинируя эту оценку с (2.9), получим левую часть (2.7). $\square$

**Замечание 2.2.** Лемма 2.2 остается справедливой, если билинейная форма $a(u, v)$ содержит интеграл от $uv$.

**Замечание 2.3.** В $p$-версии иногда более эффективным является использование базисного элемента с пространствами полиномов, которые являются минимальными пространствами полиномов, содержащих для данного $p$ пространство $\mathcal{P}_{p,x}$, и в то же время допускающими координатные функции, необходимые для удовлетворения условиям совместности. Для выбранного типа координатных функций это предполагает использование базисного элемента $\widehat{\mathcal{E}}_0 = \widehat{\mathcal{E}}_0\{\sqcap, \widehat{L}_{i,j} \in \mathcal{M}_p\}$, где

$$\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_{I,p} \cup \mathcal{M}_{II} \cup \mathcal{M}_{III}, \quad \mathcal{M}_{I,p} := (\widehat{L}_{i,j},\ 2 \le i, j;\ (i + j) \le p).$$

Таким образом, для заданного $p$ базис $\mathcal{M}_p$ отличается от базиса $\mathcal{M}_\sqcap$ только подмножеством $\mathcal{M}_{I,p} \ne \mathcal{M}_I$ внутренних функций, а подмножества координатных функций сторон и вершин совпадают. Пространство полиномов $H(\widehat{\mathcal{E}}_0) = \operatorname{span} \mathcal{M}_p$, которое будем обозначать $\mathcal{P}^{[p]}_x$, порождает элемент $\widehat{\mathcal{E}}_0$. Для этого элемента полученные выше результаты также справедливы. В частности, благодаря включениям

$$\mathcal{M}^{(\lfloor p/2 \rfloor)}_\sqcap \subset \mathcal{M}_p \subset \mathcal{M}^{(p)}_\sqcap,$$

где для заданного $p$ используется обозначение $\mathcal{M}^{(p)}_\sqcap$ вместо $\mathcal{M}_\sqcap$, сохраняется лемма 2.1. Лемма 2.2 также справедлива для соответствующих матриц, порожденных базисным элементом $\widehat{\mathcal{E}}_0$, т.к. в ее доказательстве конкретная форма внутренних функций и натянутого на них пространства не важна.

Пусть $\mathcal{M}_{(II)}$, $\mathcal{M}_{(II,p)}$ — множества функций, получаемые ортогонализацией координатных функций сторон из $\mathcal{M}_{II}$ множеству $\mathcal{M}_I$ или $\mathcal{M}_{I,p}$ внутренних функций соответственно. Обозначим через $\mathcal{P}_{p,L}$, $L = I, II, III$ подпространства пространств $\mathcal{P}^{(p)}_x$ или $\mathcal{P}^{[p]}_x$, натянутые на базисы $\mathcal{M}_I$, $\mathcal{M}_{II}$, $\mathcal{M}_{III}$ или $\mathcal{M}_{I,p}$, $\mathcal{M}_{II}$, $\mathcal{M}_{III}$, а через $\mathcal{P}^{II} = \mathcal{P}_{(II)}, \mathcal{P}_{(II,p)}$ — подпространства, натянутые на $\mathcal{M}_{(II)}$, $\mathcal{M}_{(II,p)}$.

**Замечание 2.4.** Предположим, что вместо $\mathcal{M}_{II}$ используются множества $\mathcal{M}_{(II)}$, $\mathcal{M}_{(II,p)}$. Тогда для любого $\widehat{u}_{II} \in \mathcal{P}^{II}$

$$a(\widehat{u}_{II}, \widehat{u}_{II}) \le c(1 + \log p)a(\widehat{u}, \widehat{u}).$$

Действительно, принимая во внимание (2.10), можно написать

$$|\widehat{u}_{II}|^2_{1,\sqcap} \le |\widehat{u}_{II} + \widehat{u}_I|^2_{1,\sqcap} = |\widehat{u} - \widehat{u}_{III}|^2_{1,\sqcap} \le 2(|\widehat{u}|^2_{1,\sqcap} + |\widehat{u}_{III}|^2_{1,\sqcap}) \le c(1 + \log p)|\widehat{u}|^2_{1,\sqcap},$$

и, следовательно,

$$\frac{c}{1 + \log p} \sum_{L=I,II,III} a(\widehat{u}_L, \widehat{u}_L) \le a(\widehat{u}, \widehat{u}) \le 3 \sum_{L=I,II,III} a(\widehat{u}_L, \widehat{u}_L).$$

## 3. Предобуславливание дополнения Шура для квадратного базисного элемента

Обратные к предлагаемым глобальным предобуславливателям МДО определяются посредством небольшого количества стандартных матриц, связанных с введенным базисным элементом. Одна из таких матриц будет определена в данном параграфе. Для матрицы жесткости, определенной базисным элементом, рассматривается дополнение Шура, порожденное координатными функциями сторон, после их ортогонализации к внутренним координатным функциям. Предлагается эффективный предобуславливатель для этого дополнения Шура, который непосредственно входит в выражение из §5, определяющее глобальный предобуславливатель МДО.

Предполагается, что матрица жесткости базисного элемента, обозначаемая здесь через $A$, есть $A = A_1$ или $A = A_1 + A_0$. Пусть матрица $A$ представлена в форме

$$A = \begin{pmatrix} A^{(1)} & A^{(1)}_{III} \\ (A^{(1)}_{III})^T & A_{III} \end{pmatrix}, \qquad A^{(1)} = \begin{pmatrix} A_I & A_{I,II} \\ A_{II,I} & A_{II} \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где блоки $A_I$, $A_{II}$, $A_{III}$ соответствуют внутренним координатным функциям, координатным функциям сторон и координатным функциям вершин. Вводя матрицу

$$A_d = \begin{pmatrix} A^{(1)} & 0 \\ 0 & A_{III} \end{pmatrix},$$

перепишем (2.7) в форме

$$\frac{c}{1+\log p} A_d \le A_1 \le 2A_d. \tag{3.2}$$

Таким образом, мы получим хороший предобуславливатель, если сумеем получить хороший предобуславливатель для дополнения Шура, возникающего в результате факторизации

$$\begin{gathered} A^{(1)} = \begin{pmatrix} I_I & 0 \\ A_{II,I}A_I^{-1} & I_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_I & 0 \\ 0 & S_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_I & A_I^{-1}A_{I,II} \\ 0 & I_{II} \end{pmatrix}, \\ S_{II} = A_{II} - A_{II,I}A_I^{-1}A_{I,II}. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Будем разыскивать предобуславливатель в виде

$$\widehat{S}_{II} = \begin{pmatrix} S^{(1)} & & & 0 \\ & S^{(2)} & & \\ & & S^{(3)} & \\ 0 & & & S^{(4)} \end{pmatrix},$$

где каждый блок соответствует одной из сторон $\gamma_i$. Поскольку эти блоки идентичны (при подходящем упорядочении неизвестных), достаточно определить один из них. С этой целью рассмотрим полином $u \in \mathcal{P}_{p,x}$ на $I$ и его представления

$$u(x) = \sum_{i=0}^{p} a_i \widehat{L}_i, \quad u(x) = \sum_{i=0}^{p} b_i x^i, \quad u(\cos\phi) = \sum_{i=0}^{p} c_i \cos i\phi, \tag{3.4}$$

а также соответствующие векторы коэффициентов $\overline{a} = \{a_i\}$, $\overline{b} = \{b_i\}$, $\overline{c} = \{c_i\}$ и преобразования, связывающие их,

$$B\overline{a} = \overline{b}, \quad C\overline{b} = \overline{c}. \tag{3.5}$$

Через $\Lambda$ обозначим матрицу $\Lambda = \mathrm{diag}\,[1, 2, \ldots, p+1]$. Записывая далее матрицу

$$\widehat{S} = B^T C^T \Lambda C B \tag{3.6}$$

и удаляя две строки и два столбца, соответствующие $a_0$, $a_1$ в (3.4), определим матрицы $S^{(i)}$ равенством $\widehat{S}_0 = S^{(i)}$. Заметим, что матрица $\widehat{S}_{II}$ определяется единообразно, как для матрицы $A^{(1)}$, соответствующей базисному элементу $\widehat{\mathcal{E}}$, так и для матрицы $A^{(1)}$, соответствующей базисному элементу $\widehat{\mathcal{E}}_0$. Необходимо также отметить, что $B$, $C$ — верхние треугольные матрицы.

**Теорема 3.1.** *Пусть $S_{II}$ — дополнение Шура, соответствующее базисному элементу $\widehat{\mathcal{E}}$, $\widehat{S}_{II}$ определено выше. Тогда*

$$\widehat{S}_{II} \prec S_{II} \prec (1+\log p)^k \widehat{S}_{II},$$

*где $k = 2$, если $A = A_1 + A_0$, $k = 3$, если $A = A_1$.*

**Доказательство.** Прежде всего приведем некоторые результаты из [1], необходимые в дальнейшем. Пусть функция $\psi$ определена и непрерывна на $\partial\sqcap$ и является полиномом степени не выше $p$ на каждой из сторон $\partial\sqcap$. В соответствии с теоремами 7.5, 7.6 из [1] существуют такие продолжения $u \in \mathcal{P}_x^{(p)}$ и $u \in \mathcal{P}_x^{[p]}$ на $\sqcap$, что $u|_{\partial\sqcap} = \psi$ и

$$\|u\|_{1,\sqcap} \prec \|\psi\|_{1/2,\partial\sqcap}, \quad u \in \mathcal{P}_x^{(p)}, \quad \|u\|_{1,\sqcap} \prec p\|\psi\|_{1/2,\partial\sqcap}, \quad u \in \mathcal{P}_x^{[p]}. \tag{3.7}$$

Это вместе с рассуждениями типа леммы Брамбла–Гильберта дает

$$|u|_{1,\sqcap} \prec |\psi|_{1/2,\partial\sqcap}, \quad u \in \mathcal{P}_x^{(p)}, \quad |u|_{1,\sqcap} \prec p|\psi|_{1/2,\partial\sqcap}, \quad u \in \mathcal{P}_x^{[p]}. \tag{3.8}$$

Вследствие леммы 6.1 [1] для всех $\psi \in \mathcal{P}_{p,x}$, $x \in I$ имеем

$$\|\psi(x)\|_{1/2,I} \asymp \|\psi(\cos\phi)\|_{1/2,I^*}. \tag{3.9}$$

Для подпространства полиномов $\psi \in \mathcal{P}_{p,x}$, $x \in I$, обращающихся в нуль в точках $x = \pm 1$, справедливо неравенство

$$_0\|\psi\|_{1/2,I} \le c(1+\log p)\|\psi\|_{1/2,I}. \tag{3.10}$$

(ср. с [1], теорема 6.5). Каждому $\widehat{u}_{II} \in \mathcal{P}_{p,II}$ соответствует единственный вектор коэффициентов $u_{i,j}$ (см. (2.2)), а $\widehat{\widehat{u}}_{II} \in \mathcal{P}^{II}$ получается при ортогонализации $\widehat{u}_{II}$ к пространству $\mathcal{P}_{p,I}$. Далее, по определению дополнения Шура

$$\overline{u}_{II}^T S_{II} \overline{u}_{II} = \begin{cases} |\widehat{\widehat{u}}_{II}|^2_{1,\sqcap}, & \text{если } A = A_1; \\ \|\widehat{\widehat{u}}_{II}\|^2_{1,\sqcap}, & \text{если } A = A_1 + A_0, \end{cases} \tag{3.11}$$

и для элемента $\widehat{\mathcal{E}}$ в силу (3.7), (3.8) и теоремы о следах

$$\overline{u}_{II}^T S_{II} \overline{u}_{II} \asymp \begin{cases} |\widehat{u}_{II}|^2_{1/2,\partial\sqcap}, & \text{если } A = A_1; \\ \|\widehat{u}_{II}\|^2_{1/2,\partial\sqcap}, & \text{если } A = A_1 + A_0. \end{cases} \tag{3.12}$$

В случае $A = A_0 + A_1$ достаточно показать, что

$$(1+\log p)^{-2}\|\widehat{u}_{II}\|^2_{1/2,\partial\sqcap} \prec \overline{u}_{II}^T \widehat{S}_{II} \overline{u}_{II} \prec \|\widehat{u}_{II}\|^2_{1/2,\partial\sqcap}. \tag{3.13}$$

С этой целью заметим, что, используя определение норм $\|\cdot\|_{1/2,I}$, $_0\|\cdot\|_{1/2,I}$, определение $\widehat{S}_{II}$, интерполирование между $\|\cdot\|_{0,I^*}$ и $\|\cdot\|_{1,I^*}$, а также (3.9), (3.10) для $u \in \mathcal{P}_{p,x}$, $x \in I$, получим

$$\begin{gathered} \|\widehat{u}_{II}\|^2_{1/2,\partial\sqcap} \prec \sum_{i=1}^4 {}_0\|\widehat{u}\|^2_{1/2,\gamma_i}, \\ \overline{a}^T \widehat{S} \overline{a} = \overline{c}^T \Lambda \overline{c} \asymp \|u(\cos\phi)\|^2_{1/2,I^*} \asymp \|u\|^2_{1/2,I}, \\ (1+\log p)^{-1}{}_0\|u\|_{1/2,I} \prec \|u\|_{1/2,I} \prec {}_0\|u\|_{1/2,I} \end{gathered} \tag{3.14}$$

с $\overline{a}$, $\overline{c}$, соответствующими (3.4). Из (3.14) вытекает

$$\|\widehat{u}_{II}\|^2_{1/2,\partial\sqcap} \prec \sum_{i=1}^{4} {}_0\|\widehat{u}_{II}\|^2_{1/2,\gamma_i} \prec (1+\log p)^2 \sum_{i=1}^{4} \|\widehat{u}_{II}\|^2_{1/2,\gamma_i} \asymp \overline{u}_{II}^T \widehat{S}_{II} \overline{u}_{II},$$

$$\|\widehat{u}_{II}\|^2_{1/2,\partial\sqcap} \succ \sum_{i=1}^{4} \|\widehat{u}_{II}\|^2_{1/2,\gamma_i} \asymp \overline{u}_{II}^T \widehat{S}_{II} \overline{u}_{II}.$$

Отсюда и из (3.12) получается (3.13). Используя (2.8), можно доказать также, что

$$\|\widehat{u}\|_{1,\sqcap} \prec (1+\log^{\frac{1}{2}} p)|\widehat{u}|_{1,\sqcap}, \quad \text{для любого} \quad \widehat{u} \in \mathcal{P}_{p,I} \cup \mathcal{P}_{p,II}, \tag{3.15}$$

что позволяет получить оценки теоремы 3.1 для $A = A_1 + A_0$. $\square$

Если под $A$ понимается матрица жесткости базисного элемента $\widehat{\mathcal{E}}_0$, то при $k$ таких же, как и в теореме 3.1,

$$\widehat{S}_{II} \prec S_{II} \prec (1+\log p)^k p^2 \widehat{S}_{II},$$

т. к. эта оценка — не что иное, как применение вторых неравенств в (3.7), (3.8) к оператору продолжения для базисного элемента $\widehat{\mathcal{E}}_0$. Однако оптимальность этих неравенств не доказана.

**Замечание 3.1.** Для решения системы $\widehat{S}_{II}\overline{u}_{II} = \overline{f}_{II}$ необходимо выполнить не более $\mathcal{O}(p^2)$ арифметических операций. В МДО асимптотическая оценка вычислительной работы не ухудшается, т.к. решение системы $A_{1,0}\overline{u}_{1,0} = \overline{f}_{1,0}$, вообще, требует не меньше $\mathcal{O}(p^2)$ операций.

**Замечание 3.2.** Появление множителя $(1+\log p)^2$ в оценке теоремы 3.1 объясняется, очевидно, следующим. Дополнение Шура $S_{II}$ — матрица квадратичной формы, которая, например, в случае $A = A_1 + A_0$ эквивалентна $\|\cdot\|^2_{1/2,\partial\sqcap}$. С другой стороны, предобуславливатель для $S_{II}$ получен как блочно диагональная матрица, в которой каждый блок $S^{(k)}$ — матрица квадратичной формы, эквивалентной $\|\cdot\|^2_{1/2,\gamma_k}$. Сумма этих квадратов норм не эквивалентна $\|\cdot\|^2_{1/2,\partial\sqcap}$. В §6 мы рассмотрим другой вариант декомпозиции и предобуславливания, который позволит удалить $\log p$ из оценок.

**Замечание 3.3.** Вместо использования выражения (3.6) можно использовать далее непосредственно матрицу $W := CB$ и положить $\widehat{S} = W^T \Lambda W$. Матрица $W$ верхняя треугольная, и ее элементы могут быть выписаны явно. Выражения для них получаются при помощи простых соотношений (1.1) между интегрированными полиномами Лежандра $\widetilde{L}_i$ и полиномами Лежандра $L_i$, $L_{i-2}$, а также явных выражений для $L_i(\cos\varphi)$ через тригонометрические функции $\cos k\varphi$ при $k = 0, 2, \ldots, i$ для четных $i$ и $k = 1, 3, \ldots, i$ для нечетных $i$ (см. [32], с.1025).

**Замечание 3.4.** Предобуславливатель $\widehat{S}_{II}$ для дополнения Шура $S_{II}$ был предложен и исследован в [14] (см. также [15]). Основанные на такой же идее, но алгоритмически другие подходы к предобуславливанию дополнения Шура, были намечены независимо в [33]. В частности, мы получаем представление нашего предобуславливателя в виде произведения явно заданных треугольной и диагональной матриц, что обеспечивает простое и экономичное вычисление обратного к нему. Имеются и другие отличия. Наш "наихудший" предобуславливатель МДО для p-версии обеспечивает оценку $\mathcal{O}((1+\log p)^3)$ для обобщенного числа обусловленности (см. теорему 5.1), тогда как оценка [33] есть $\mathcal{O}((1+\log^2 p)^2)$. Алгоритм МДО, представленный в этой статье, не использует, как в [33], дискретных гармонических функций, что, как показано, например, в [34], может быть слишком неэкономично. Мы рассматриваем также предобуславливатели МДО, включающие оптимальное по порядку экономичное предобуславливание дополнения Шура: обобщенное число обусловленности есть $\mathcal{O}(1)$, (см. теорему 6.1).

## 4. $p$-версия с криволинейными конечными элементами

В этом параграфе рассматривается $p$-версия с криволинейными, вообще говоря, конечными элементами для эллиптического уравнения второго порядка на произвольной области с достаточно гладкой границей. В качестве базисных используются квадратные элементы $\widehat{\mathcal{E}}_0$, $\widehat{\mathcal{E}}$, описанные в §2. Именно для $p$-версии, описанной в данном параграфе, в §§ 5, 6 будут построены предобуславливатели МДО и сформулированы основные результаты данной работы. Для того, чтобы не затрагивать хорошо исследованные вопросы аппроксимации криволинейных границ и граничных условий, а также их влияния на погрешность (см. [35], [36]), будем использовать МКЭ с точным воспроизведением границы. Такие МКЭ получаются при помощи техники, предложенной в [35]. Однако, следуя [35], все результаты можно легко распространить и на случай, когда граница аппроксимирована с достаточной точностью кусочно-полиномиальной кривой. Кроме того, в этом параграфе приведены некоторые вспомогательные неравенства, отражающие спектральную эквивалентность конечноэлементной матрицы значительно более простой матрице. Эти неравенства применяются в §5 как вспомогательные при получении границ обобщенного спектра для предобуславливателя МДО.

Рассмотрим задачу Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в произвольной области с достаточно гладкой границей. Используется обобщенная формулировка этой задачи: найти такую функцию $u \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$, что

$$a_\Omega(u,v) - (f,v) = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega), \tag{4.1}$$

где для простоты предполагается, что билинейная форма симметрична и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &a_\Omega(w,v) \le \mu_2 \|w\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}, \\ &a_\Omega(v,v) \ge \mu_1 \|v\|_{1,\Omega}^2 \quad \text{для всех} \quad w,v \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega) \end{aligned} \tag{4.2}$$

с некоторыми положительными постоянными $\mu_1$, $\mu_2$. Пусть $x = \overline{x}^{(r)}(y) : \overline{\sqcap} \mapsto \overline{\sqcap}_r$ — невырожденное отображение $\overline{\sqcap}$ на некоторый, вообще говоря, криволинейный четырехугольник $\overline{\sqcap}_r$, а $y = \overline{y}^{(r)}(x) : \overline{\sqcap}_r \mapsto \overline{\sqcap}$ — обратное отображение. Эти отображения характеризуются коэффициентами Ламе

$$H_k^{(r)}(y) = \left( \sum_{l=1,2} \left( \frac{\partial \overline{x}_l^{(r)}}{\partial y_k} \right)^2 \right)^{1/2}$$

и $\theta^{(r)}$ — углом между линиями $\overline{y}_k^{(r)}(x) = \mathrm{const}$, $k = 1,2$, на плоскости переменных $x$. Под вершинами и сторонами $\sqcap_r$ будем понимать образы вершин и сторон $\sqcap$.

Прежде всего сформулируем результаты, из которых следует, что для любого достаточно малого параметра сетки $h \le h_0$ область $\Omega$ можно разбить на $\mathcal{O}(h^{-2})$ криволинейных четырехугольников, удовлетворяющих определенным условиям регулярности.

Обозначим через $C^{(t)}$ класс границ, состоящих из конечного числа $t$ раз непрерывно дифференцируемых кривых, углы пересечения которых на $\partial\Omega$ отделены от 0 и $2\pi$.

**Лемма 4.1.** *Пусть $\partial\Omega \in C^{(t)}$, $t \ge 2$ и $h > 0$ достаточно мало. Тогда область $\Omega$ может быть так представлена в виде объединения $S_h$, криволинейных, вообще говоря, четырехугольников $\sqcap_r$, что*

$$\overline{\Omega} = \cup_r \overline{\sqcap}_r, \quad r = 1,2,\dots,\mathcal{R}, \quad \mathcal{R} = \mathcal{O}(h^{-2}),$$

*и*

a) $\overline{\sqcap}_{r_1} \cap \overline{\sqcap}_{r_2}$ *для любых $r_1 \ne r_2$ пусто или совпадает с вершиной или стороной, общей для $\overline{\sqcap}_{r_1}$ и $\overline{\sqcap}_{r_2}$,*

b) *точки, разделяющие $t$ раз непрерывно дифференцируемые части $\partial\Omega$, содержатся в множестве вершин четырехугольников,*

c) *существуют невырожденные $(t-1)$ раз непрерывно дифференцируемые совместные отображения $x = \overline{x}^{(r)}(y) : \overline{\sqcap} \mapsto \overline{\sqcap_r}$, для которых*

$$\begin{aligned} &\alpha^{(1)} h \le H_k^{(r)} \le h, \quad \theta \le \theta^{(r)} \le \pi - \theta, \quad 0 < \alpha^{(1)}, \theta = \text{const}, \\ &|D_y^q \overline{x}^{(r)}(y)| \le c h^{|q|}, \quad 2 \le |q| \le \overline{t}, \quad \textit{для любого} \ \ y \in \sqcap \end{aligned} \tag{4.3}$$

*с положительными постоянными $\alpha^{(1)}$, $\theta$, с зависящими только от $\partial\Omega$, $\overline{t} := t-1$.*

**Доказательство.** В сущности, эта лемма — следствие результатов [35] (см. также [36]), и потому доказательство дается кратко. В соответствии с результатами [35], [36] (см. также лемму 1 и построение конечноэлементных пространств $H_{h,p}(\Omega)$ в ([37], с. 1216–1217)) существует разбиение $\Omega$ на треугольники $\delta_r$, $r = 1, 2, \ldots, R$, $R = \mathcal{O}(h^{-2})$, криволинейные вблизи границы и удовлетворяющее условиям, аналогичным a)–c). В частности, отображения $x = \widetilde{x}^{(r)}(\xi) : \overline{\Delta} \mapsto \overline{\delta}_r$, где $\Delta = \{\xi \mid 0 < \xi_1, \xi_2, \xi_1 + \xi_2 < 1\}$ — базисный треугольник, определены явно. Эти отображения имеют простой вид (см. [37], с. 1216) и удовлетворяют условиям, аналогичным (4.3). Каждый треугольник $\delta_r$ делится на три четырехугольника $\delta_r^k$, $k = 1, 2, 3$. С этой целью поделим $\Delta$ на три четырехугольника $\Delta^{(k)}$ прямыми, соединяющими центр тяжести $\Delta$ с серединами его сторон, и положим $\delta_r^k = \widetilde{x}^{(r)}(\Delta^{(k)})$. Переобозначая четырехугольники $\delta_r^k$, $r = 1, 2, \ldots, R$, $k = 1, 2, 3$, через $\sqcap_r$, $r = 1, 2, \ldots, \mathcal{R}$, $\mathcal{R} = 3R$, получим разбиение $S_h$. Теперь определим отображения $x = \overline{x}^{(r)}(y) : \overline{\sqcap} \mapsto \overline{\sqcap}_r$. Предположим, что $\xi = \overline{\xi}^{(k)}(y) : \overline{\sqcap} \mapsto \overline{\delta}^{(k)}$ — билинейное отображение. Тогда, для таких $r$, $\overline{r}$, $k$, что $\sqcap_r = \delta_{\overline{r}}^{(k)}$, примем $\overline{x}^{(r)}(y) = \widetilde{x}^{(\overline{r})}(\overline{\xi}^{(k)}(y))$. При этом c) выполнено, т.к. оно выполнено в несколько усиленном виде для $\widetilde{x}^{(r)}(y)$ (см. (7.37), (7.38) в [36]), а отображения $\xi = \overline{\xi}^{(k)}(y)$ билинейные, т.е. фиксированные и гладкие. $\square$

**Замечание 4.1.** Условия (4.3), которые называем обобщенными условиями квазиравномерности, имеют простой смысл (см. [36], 7.2). При $h \to 0$, $\overline{t} \ge 2$ условие во второй строке (4.3) выражает тот факт, что отображение $x = \overline{x}^{(r)}(y)$ приближается к линейному [36]. Условие в первой строке с точностью до величин высокого порядка совпадает с условием на стороны и углы четырехугольников. Эти условия при достаточно малом $h$ могут быть также выражены в терминах вписанных и описанных окружностей в предположении, что другие условия выполняются по крайней мере для $\overline{t} = 2$. Подчеркнем, что в дальнейшем потребуются неравенства только из первой строки (4.3), которые часто можно удовлетворить и в случае, когда $\partial\Omega \in C^{(1)}$.

**Замечание 4.2.** Для наших целей достаточно доказать существование разбиения $S_h$, и мы выбрали здесь самый простой путь. На практике для построения $S_h$ часто можно применять более прямые способы, приводящие к квазиравномерным разбиениям лучшей структуры. Иногда эти способы позволяют заменить условие $2 \le |q| < \overline{t}$ во второй строке (4.3) на $2 \le |q| \le t$. Однако эти рассмотрения не являются целью данной работы.

**Замечание 4.3.** Не определяем строго, что понимается под совместностью отображений $x = \overline{x}^{(r)}(y) : \overline{\sqcap} \mapsto \overline{\sqcap}_r$, поскольку это представляется достаточно очевидным. Вкратце, совместные отображения — это такие отображения, которые определяют совместные конечные элементы, если базисные элементы совместны.

На каждом четырехугольнике $\sqcap_r$ определим конечный элемент $\mathcal{E}_r$, ассоциированный при помощи отображения $x = \overline{x}^{(r)}(y) : \overline{\sqcap} \mapsto \overline{\sqcap}_r$ с базисным элементом $\widehat{\mathcal{E}}_0$ или $\widehat{\mathcal{E}}$. Таким образом, определяются два конечноэлементных пространства

$$H(\Omega) = \{\widetilde{u} \mid \widetilde{u} \in C(\overline{\Omega}),\ \widetilde{u}(\overline{x}^{(r)}(y)) \in \mathcal{P}_y^{[p]},\ y \in \sqcap,\ r = 1, 2, \ldots, \mathcal{R}\}$$

или

$$H(\Omega) = \{\widetilde{u} \mid \widetilde{u} \in C(\overline{\Omega}),\ \widetilde{u}(\overline{x}^{(r)}(y)) \in \mathcal{P}_y^{(p)},\ y \in \sqcap,\ r = 1, 2, \ldots, \mathcal{R}\}.$$

Введем также подпространства

$$H^0(\Omega) = H(\Omega) \cap \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega). \tag{4.4}$$

Матрица $\overline{K}$ и вектор $\overline{f}$ конечноэлементной системы алгебраических уравнений

$$\overline{K}\overline{u} = \overline{f} \tag{4.5}$$

для задачи (4.1) определяются соотношениями

$$\begin{aligned} (\overline{v}, \overline{K}\overline{w}) &= a_\Omega(\widetilde{v}, \widetilde{w}), \\ (\overline{f}, \overline{w}) &= (f, \widetilde{w})_\Omega \quad \text{для любых} \ \ \widetilde{v}, \widetilde{w} \in H^0(\Omega), \end{aligned} \tag{4.6}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение $I\!R^{\mathcal{N}}$. Здесь и в дальнейшем изоморфизм $\overline{v} \leftrightarrow \widetilde{v}$, $\overline{w} \leftrightarrow \widetilde{w}$ устанавливается введением базиса в $H(\Omega)$, который будем обозначать через $(\phi^{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots, \mathcal{N}$, где $\mathcal{R}(p-1)^2 \le \mathcal{N} \le \mathcal{R}(p+1)^2$. Как обычно, определим его выбором базисного элемента, т.е. $\phi^{(i)}$ такова, что для любого $r$ функция $\phi^{(i)}(\overline{x}^{(r)}(y))$ на $\sqcap$ равна нулю или одной из функций базиса $\mathcal{M}_p$ или $\mathcal{M}_\sqcap$ в зависимости от выбора базисного элемента. Базис $\Phi := (\phi^{(i)})$ вновь можем разбить на три подмножества $\Phi_I$, $\Phi_{II}$, $\Phi_{III}$, состоящих из внутренних функций (каждая отлична от нуля на одном элементе), координатных функций сторон (каждая отличается от нуля самое большее на объединении пары смежных элементов) и координатных функций вершин или узловых функций соответственно. Узловая функция может отличаться от нуля самое большее на звезде элементов, имеющих общую вершину. Упорядочим неизвестные и галёркинские координатные функции метода конечных элементов, и пусть $\omega_0 = \{i = 1, 2, \ldots, \mathcal{N}\}$ — множество соответствующих номеров. Для каждого элемента $\mathcal{E}_r$ можно ввести подмножества $\omega_{I,r}$, $\omega_{II,r}$, $\omega_{III,r}$ множества $\omega_0$, соответствующие внутренним, граничным и угловым неизвестным, и наряду с ними объединения

$$\omega_L = \bigcup_r \omega_{L,r}, \quad L = I, II, III,$$

где $\mathcal{N}_L := \operatorname{card} \omega_L$, $L = I, II, III$.

Сформулируем вспомогательный результат, на котором базируется анализ предобуславливателя МДО для матрицы $\overline{K}$, построенной в §5. Введем матрицу $\Lambda_{p,h}$, намного более простую, чем матрица $\overline{K}$, но спектрально эквивалентную $\overline{K}$. Будем использовать эту матрицу как промежуточную для сравнения спектров матрицы $\overline{K}$ и ее предобуславливателя МДО. Предположим, что для любого конечного элемента введена дополнительно матрица жесткости $A_{(r)}$, которая при локальной нумерации неизвестных совпадает с матрицей жесткости базисного элемента, т.е. $A_{(r)} = A = A_1 + h^2 A_0$ для всех $r = 1, 2, \ldots, \mathcal{R}$. Здесь $A_0$, $A_1$ — матрицы, определенные в §2. Через $\Lambda_{p,h}$ обозначим матрицу, получаемую из матриц “жесткости” $A_{(r)} = A$ , $r = 1, 2, \ldots, \mathcal{R}$, в результате процедуры сборки, соответствующей конфигурации разбиения $S_h$, обычной для метода конечных элементов. Подчеркнем, что матрица $\Lambda_{p,h}$ зависит только от стандартной матрицы $A$ и разбиения $S_h$ области $\Omega$. Будем сохранять обозначение $\Lambda_{p,h}$ и в тех случаях, когда используется $A = A_1$.

Представляя $\Lambda_{p,h}$ в блочном виде

$$\Lambda_{p,h} = \begin{pmatrix} \Lambda_I & \Lambda_{I,II} & \Lambda_{I,III} \\ \Lambda_{II,I} & \Lambda_{II} & \Lambda_{II,III} \\ \Lambda_{III,I} & \Lambda_{III,II} & \Lambda_{III} \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

с диагональными блоками, соответствующими внутренним переменным, переменным сторон и переменным вершин, определим матрицу

$$\widetilde{\Lambda}_{p,h} := \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_I & \Lambda_{I,II} \\ \Lambda_{II,I} & \Lambda_{II} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \Lambda_{III} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \Lambda^{(I)} & 0 \\ 0 & \Lambda_{III} \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

**Лемма 4.2.** *Пусть выполнены* (4.2) *и условия леммы* 4.1, *а* $\overline{K}$ — *матрица жесткости метода конечных элементов для случая граничных условий Дирихле* (*или Неймана*). *Тогда*

$$\begin{gathered} c_1\mu_1\Lambda_{p,h} \leq \overline{K} \leq c_2\mu_2\Lambda_{p,h}, \\ \frac{\widehat{c}_1\mu_1}{1+\log p}\widetilde{\Lambda}_{p,h} \leq \overline{K} \leq \widehat{c}_2\mu_2\widetilde{\Lambda}_{p,h} \end{gathered} \tag{4.9}$$

*с положительными постоянными* $c_k$, $\widehat{c}_k$, *зависящими только от* $\alpha^{(1)}$, $\theta$.

Заметим, что $\mu_2$ в (4.9), в случае, когда $A = A_1$, соответствует неравенству $a_\Omega(v,w) \leq \mu_2|v|_{1,\Omega}|w|_{1,\Omega}$ $\forall v,w \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$, эквивалентному первому неравенству в (4.2).

**Доказательство.** Прежде всего отметим, что в лемме 4.2 используется то же обозначение $\overline{K}$ для конечноэлементной матрицы, полученной при граничных условиях Неймана, что и для матрицы, определенной соотношением (4.6) при граничных условиях Дирихле. Доказательство обычно для неравенств энергетической эквивалентности, основанных на неравенствах энергетической эквивалентности для базисной конфигурации, условиях эллиптичности и непрерывности билинейной формы $a_\Omega(w,v)$, а также на условиях обобщенной квазиравномерности. Первое выражено в неравенствах (2.7), (3.2), второе — в неравенстве (4.2) , третье — в неравенстве (4.3). Доказательство сходно, например, с доказательством теоремы 5.1 из [12]. Если предположить для простоты, что билинейная форма в (4.1) содержит только главные слагаемые, $A = A_1$, а под $\mu_2$ понимается то же, что и выше, то $c_k$, $\widehat{c}_k$ — абсолютные постоянные, равные $(\alpha^{(1)}\sin\theta)^{3-2k}$. $\square$

## Литература


1. Babuška I., Craig A., Mandel J., Pitkäranta J. *Efficient preconditioning for the p-version finite element method in two dimensions* // SIAM J. Numer. Anal. – 1991. – V. 28. – № 3. – P. 624–661.
2. Babuška I., Griebel M., Pitkäranta J. *The problem of selecting the shape functions for a p-type finite element* // J. Numer. Meth. Engrg. – 1989. – V. 28. - P. 1891–1908.
3. Bernardi C., Maday Y. *Polynomial interpolation results in Sobolev spaces* // J. Comput. and Appl. Math. – 1992. – V. 43. – P. 53–80.
4. Bramble J., Pasciak J., Schatz A. *The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring.* I // Math. Comp. – 1986. – V. 47. – P. 1–16.
5. Bramble J., Pasciak J., Schatz A. *The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring.* II // Math. Comp. – 1987. – V. 49. – P. 415–430.
6. Bramble J., Pasciak J., Schatz A. *The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring.* III // Math. Comp. – 1988. – V. 51. - P. 1–24.
7. Bramble J., Pasciak J, Schatz A. *The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring.* IV // Math. Comp. – 1989. – V. 53. – P. 103–134.
8. Canuto C. *Stabilization of spectral methods by finite element bubble functions* // Comput. Meth. Appl. Mech. and Engrg. – 1994. – V. 116. – P. 13–26.
9. Deville M.O., Mund E.H. *Finite element preconditioning for pseudospectral solutions of elliptic problems* // SIAM J. Sci. Stat. Comput. – 1990 – V. 11. – № 2. – P. 311–342.
10. Deville M.O., Mund E.H., Van Keminade V. *Preconditioned Chebyshev collocation methods and triangular finite elements* // Comput. Meth. Appl. Mech. and Engrg. –1994. – V. 116. – P. 193–200.
11. Han W., Jensen S. *On the sharpness of $L^2$-error estimates of $H_0^1$-projections onto subspaces of piecewise, high order polynomials* // Math. Comput. – 1995. – V. 64. – P. 51–70.
12. Иванов С.А., Корнеев В.Г. *Построение координатных функций высокого порядка и предобуславливание в рамках метода декомпозиции области* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 4. – C. 62–81.
13. Ivanov S.A., Korneev V.G. *On the preconditioning in the domain decomposition technique for the p-version finite element method.* Part I // Technische Universität Chemnitz-Zwickau. Preprint SPC 95-35. – 1995. – № 12. – P. 1–15.

14. Ivanov S.A., Korneev V.G. *On the preconditioning in the domain decomposition technique for the p-version finite element method.* Part II // Technische Universität Chemnitz-Zwickau. Preprint SPC 95-36. – 1995. – № 12. – P. 1–14.
15. Ivanov S.A., Korneev V.G. *Preconditioning in the domain decomposition methods for the p-version with the hierarchical bases* // Proc. of OFEA-95. St. Petersburg, Math. Modeling. – 1996. – V. 8. – № 9. – P. 63–73.
16. Jensen S. *p-version of mixed finite element methods for Stokes-like problems* // Comput. Meth. Appl. Mech. and Engrg. – 1992. – V. 201. – P. 27–41.
17. Maday Y., Meiron D., Patera A.T., Rönquist E.M. *Analysis of iterative methods for the steady and unsteady Stokes problem: Application to spectral element discretization* // SIAM J. Sci. Comput. – 1993. – V. 14. – P. 310–337.
18. Maday Y., Patera A.T. *Spectral element methods for Navier-Stokes equations.* – In: A. Noor and J.T. Oden. State of Art Surveys in Computational Mechanics. New York, 1996, ASME.
19. Oden J.T., Patra Abani, Feng Y.S. *Domain decomposition solver for adaptive hp finite elements* // VII-th International Conference on Domain Decomposition, State College, Pennsylvania, October, 1993.
20. Parter S.V., Rothman E.E. *Preconditioning Legendre spectral collocation approximations to elliptic problems* // SIAM J. Numer. Anal. – 1995. – V. 32. – № 2. – P. 333–385.
21. Pavarino L.F. *Additive Schwartz methods for the p-version finite element method* // Numer. Math. – 1994. – V. 66. – № 4. – P. 493–515.
22. Pavarino L.F., Widlund O.B. *Iterative substructuring methods for spectral elements in three dimensions* // Proc. of FEM50 The Finite Element Meth.: Fifty Years of the Courant Element, M. Krizek and P. Neitaanmaki, eds., Marcell Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1994. - P. 345–355.
23. Amon C.N. *Spectral element — Fourier approximation for the Navier-Stokes equations: some aspects of parallel implementation* // Parallel and Vector computations in Heat Transfer. HTD V. 133. Ed. J.D. Georgiadis and J.Y. Murphy, 1990.
24. Carey G.F, Barragy E. *Basis function selection and preconditioning high degree finite element and spectral methods* // BIT. – 1989. – V. 29. – № 4. – P. 784–804.
25. Fisher P.F. *Spectral element solution for the Navier-Stokes equations on high performance distributed memory parallel processors* // Parallel and Vector Computations in Heat Transfer. HTD V. 133. Ed. J.D. Georgiadis and J.Y. Murphy, 1990.
26. Mandel J. *Iterative solvers by substructuring for the p-version finite element method* // Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. – 1990. – V. 80. – P. 117–128.
27. Oden J.T. *Theory and implementation of high-order adaptive h-p methods for the analysis of incompressible viscous flows* // Comput. non linear mech. in aerospace eng., AIAA progress in aeronautics, S.N. Atlyri, 1991.
28. Dryja M. *A finite element capacitance method for elliptic problems on regions partitioned into substructures* // Numer. Math. – 1984. – V. 44. – P. 153–168.
29. Adams R.A. *Sobolev Spaces.* – New York: Academic Press, 1975. – 268 p.
30. Корнеев В.Г. *О связи между методом конечных разностей и методом функции Грина с использованием квадратурных формул для обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка* // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1972. – № 7. – С. 36–44.
31. Maitre J.F. and Pourquier O. *Estimates of $\mathcal{O}(p^\alpha)$ type for the condition number of matrices in the p-version of the finite element method* // Proc. of Third International Conference on Spectral and Higher Order Meth., 1996, Houston J. Math. – 1996. – P. 215–220.
32. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* – 4-е изд. – М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с.
33. Ainsworth M. *A preconditioner based on domain decomposition for h-p finite element approximation on quasi-uniform meshes* // SIAM J. Numer. Anal. – 1996. – V. 33. – № 4. – P. 1358–1376.

34. Mandel J. *Hierarchical preconditioning and partial orthogonalization for the p-version finite element method* // Proc. of Third International Symposium on Domain Decomposition Meth. for Partial Differential Equations, ed. T.F. Chan et al, SIAM, 1989.
35. Корнеев В.Г. *О построении вариационно-разностных схем высоких порядков точности* // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1970. – № 19. – С. 28–40.
36. Корнеев В.Г. *Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности.* – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. – 205 с.
37. Корнеев В.Г. *Итерационные методы рещения конечноэлементных систем линейных алгебраических уравнений* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1977. – Т. 17. – № 5. – С. 1213–1233.

*Санкт-Петербургский государственный университет*

*Университет штата Мэриленд (США)*

*Поступила*
25.02.1998