КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

Хасанов Б.М.

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ
В МАГНИТНЫХ СИСТЕМАХ

Казань 2013

УДК 541.67

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

методической комиссии института физики
Протокол №1 от 29 марта 2013 г.

заседания кафедры теоретической физики
Протокол №8 от 7 марта 2013 г.

Автор
канд. физ. мат. наук, доц. Б.М.Хасанов

Рецензент
доктор физ.-мат. наук, проф. Э.К.Садыков

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ В МАГНИТНЫХ СИСТЕМАХ. Учебно-методическое пособие /Б.М.Хасанов // Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2013. – с.17

Аннотация
В пособии предложены задачи по курсу фазовые переходы для студентов и магистрантов Института физики КФУ.

Данное пособие соответствует содержанию курса “Фазовые переходы”. Здесь мы рассмотрим задачи по физике фазовых переходов, связанные с упорядочением магнитных моментов в ферромагнетиках. Используются метод эффективного поля упорядочения в моделях Изинга и Гейзенберга. Приведенные задачи требуют знания основ термодинамики и статистической физики. Для некоторых задач дана схема решения, для остальных – только указания и ответы, в то же время, все решения не требует проведения громоздких вычислений. Все это позволяет использовать задачи на практических занятиях, в контрольных работах и на экзамене.

СИСТЕМА НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ МАГНИТНЫХ МОМЕНТОВ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим систему невзаимодействующих магнитных моментов во внешнем магнитном поле напряженности **H**. Для каждого момента **μ** энергия взаимодействия имеет вид $U = -\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}$, и поле приводит к упорядочению момента. С другой стороны, тепловое движение стремится разупорядочить их. Если направить внешнее магнитное поле по оси z, тогда можно записать $U = -\mu_0 H S_z / S$, где S – спин частицы. Если $S = 1/2$, то число степеней свободы равно двум (вдоль и против поля). Энергия взаимодействия отдельного момента с внешним полем имеет соответственно только два значения $E = \mp\mu_0 H$.

Запишем полную намагниченность системы $\langle M \rangle = \sum_i \langle \mu_i \rangle = \sum_i \langle \mu \rangle = N \langle \mu \rangle$, просуммировав по всем N частицам. Угловые скобки означают усреднение по ансамблю Гиббса $\langle \mu \rangle = Z^{-1} \sum_n \langle n | \mu \exp(-\beta \mathrm{H}) | n \rangle$, где Z – статистическая сумма, H – гамильтониан системы, $\beta = 1/kT$, T – температура, k – постоянная Больцмана, $|n\rangle$ – собственные функции гамильтониана. В базисе собственных функций легко получить $\langle \mu \rangle = Z^{-1} \sum_n \mu_n \exp(-\beta E_n)$, где E_n – энергия системы в состоянии $|n\rangle$. Для $S = 1/2$ можно получить $\langle \mu \rangle = \mu_0 \operatorname{th}(\mu_0 \beta H)$.

Простой анализ средней намагниченности системы показывает, что система локализованных невзаимодействующих магнитных моментов проявляет свойства парамагнетика. Такая система никогда не испытывает фазового перехода.

1. Вычислить статистическую сумму Z системы невзаимодействующих спинов в модели Изинга во внешнем магнитном поле.

Решение. Гамильтониан модели имеет вид

$$\mathrm{H} = -\sum_{i=1}^{N} \mu_i H_i , \quad \mu_i = \mu_0 S_i , \; S_i = \pm 1 .$$

Для невзаимодействующих спинов имеем

$$Z = \prod_i \sum_{S_i} \exp(\beta \mu_0 S_i H) = (2 \operatorname{ch}(\beta \mu_0 H))^N .$$

2. Найти энергию системы невзаимодействующих спинов в модели Изинга.

Ответ.

$$E = -\partial \ln Z / \partial \beta = -\mu_0 N \, H \operatorname{th}(\beta \mu_0 H) .$$

3. Найти энтропию системы невзаимодействующих спинов в модели Изинга.

Решение.

Вероятность состояния системы с энергией E_n равна

$P_n = Z^{-1}\exp(-\beta E_n)$. Поэтому,

$$S = -\sum_n P_n \ln P_n = -Z^{-1}\sum_n \exp(-\beta E_n)\ln(Z^{-1}\exp(-\beta E_n))$$
$$= \ln Z + \beta E = N(\ln(2\,\mathrm{ch}(\beta\mu_0 H)) - \beta\mu_0 H\,\mathrm{th}(\beta\mu_0 H)).$$

4. Прямым подсчетом числа допустимых состояний найти энтропию системы невзаимодействующих спинов с энергией E в модели Изинга.

Решение.

Пусть g есть число способов, которыми можно реализовать состояние с заданной энергией. Энергия определяется числом спинов направленных вверх N_+ и полным числом спинов N: $E = -\mu_0 H(N_+ - N_-) = -\mu_0 NH(2x-1)$.

Тогда $g = C_N^{N_+} = N!/(N_+!(N-N_+)!)$. Пусть $N_+ = xN$, $0 < x < 1$. Используя формулу Стирлинга, получим энтропию $S = -Nx\ln x - N(1-x)\ln(1-x)$.

С учетом выражения для энергии имеем

$S = -N[(1-y)\ln(1-y) + (1+y)\ln(1+y)]/2 + N\ln 2$, $y = E/\mu_0 NH$.

5. Получить соответствие между энтропией в каноническом и микроканоническом ансамбле невзаимодействующих спинов в модели Изинга.

Решение.

Энергию для канонического ансамбля в задаче 2 использовать в выражении для энтропии, полученном в задаче 4.

6. Найти свободную энергию системы невзаимодействующих спинов в модели Изинга.

Ответ.

$F = E - TS = -TN\ln(2\,\mathrm{ch}(\mu_0\beta H)) = -T\ln Z$

7. Найти среднее число спинов направленных вверх.

Ответ

$$N_+(T) = Z^{-1}\sum_{N_+=0}^{N} N_+ C_N^{N_+}\exp(\mu_0\beta H(2N_+ - N)) = N/(1+\exp(-2\mu_0\beta H)$$

8. Вычислить теплоемкость системы невзаимодействующих изинговских спинов. Рассмотреть предельные случаи $T \to 0$ и $T \to \infty$.

Ответ

$C(T) = dE/dT = -T\partial^2 F/\partial T^2 = N(\mu_0 H/T)^2\,\mathrm{ch}^{-2}(\mu_0 H/T)$

9. Найти среднюю намагниченность системы невзаимодействующих спинов при температуре T.

Ответ

$M = \mu_0 < N_+ - N_- >= \mu_0 < 2N_+ - N >= \mu_0 N \,\mathrm{th}(\mu_0 \beta H)$

10. Найти удельную магнитную восприимчивость системы невзаимодействующих спинов в модели Изинга.

Ответ

$\chi = (1/N)(dM/dH)_{H=0} = \mu_0^2 / T$

11. Найти связь между намагниченностью, магнитной восприимчивостью и свободной энергией в системе невзаимодействующих спинов в модели Изинга.

Ответ

$M = \partial \ln Z / \partial(\beta H) = -\partial F / \partial H$, $\chi = -\partial^2 F / \partial H^2$

12. Вычислить статистическую сумму невзаимодействующих спинов в трехмерной классической модели Гейзенберга во внешнем магнитном поле.

Решение

Степенью свободы является угол θ_i между полем H и спином S_i, поэтому

$$Z = \prod_i \int d\Omega_i \exp(\mu_0 \beta H S \cos\theta_i) = [4\pi \,\mathrm{sh}(\mu_0 \beta H S) / \mu_0 \beta H S]^N$$

13. Найти намагниченность системы невзаимодействующих спинов в модели Гейзенберга.

Решение

Используя формулу $M = \partial \ln Z / \partial(\beta H) = -\partial F / \partial H$ можно получить $M = \mu_0 N \,\mathrm{F}_L(\mu_0 \beta H S)$, где $\mathrm{F}_L(x) = \mathrm{cth}\, x - 1/x$ – функция Ланжевена. Аналогичный результат можно получить из определения среднего

$M_z = (N/4\pi) \int d\Omega \mu_0 S \cos\theta \exp(-\mu_0 \beta \mathbf{S}_i \mathbf{H})$.

14. Рассмотреть поведение намагниченности в случаях $T \to 0$ и $T \to \infty$.

Решение

Функция Ланжевена имеет следующие асимптотики

$\mathrm{F}_L(x \to \infty) \approx 1 - 1/x + 2\exp(-2x)$,

$\mathrm{F}_L(x \to 0) \approx x/3 - x^3/45 + 2x^5/945$.

Отсюда находим $M(T=0) = \mu_0 N S$, и $M = \mu_0^2 N S^2 H / 3T$, $T \to \infty$.

15. Найти магнитную восприимчивость системы.

Ответ
$\chi = (1/N)(dM/dH)_{H=0} = \mu_0^2 S^2 / 3T$.

16. Вычислить теплоемкость системы невзаимодействующих спинов в классической модели Гейзенберга. Рассмотреть предельные случаи $T \to \infty$, $T \to 0$.

Ответ
$C = -T\partial^2 F / \partial T^2 = T\partial^2 (T \ln Z) / \partial T^2 = (\mu_0 HS / T)^2 \, \mathrm{F}_L'(\mu_0 \beta HS)$
$C(T \to 0) = 1 - 4(\mu_0 \beta HS)^2 \exp(-2\mu_0 \beta HS)$,
$C(T \to \infty) \approx (\mu_0 \beta HS)^2 / 3$.

17. Найти энтропию системы невзаимодействующих спинов в классической модели Гейзенберга. Рассмотреть предельные случаи $T \to \infty$, $T \to 0$.

Указание
$S = -\partial F / \partial T = \partial (T \ln Z) / \partial T$. Выражение для статистической суммы взять из зад.12.

СИСТЕМА МАГНИТНЫХ МОМЕНТОВ СО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Рассмотрим систему магнитных моментов взаимодействующих друг с другом, энергия взаимодействия *i* и *j* моментов равна ($-J\mu_i\mu_j$). Полный гамильтониан во внешнем поле имеет вид $\mathrm{H} = -(1/2)\sum_{ij} J_{ij}\boldsymbol{\mu}_i\boldsymbol{\mu}_j - \sum_i \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_i$. Примем, что ориентация магнитных моментов может принимать только два значения (по полю и против поля).

Взаимодействие стремится упорядочить магнитные моменты. На выделенный момент действует внешнее поле и поле взаимодействия от всех остальных моментов $H_i = H + \sum_j J_{ij}\mu_j$. После усреднения для суммарного поля имеем, $\langle H_i \rangle = H + \sum_j J_{ij} \langle \mu_j \rangle$. Если принять трансляционную инвариантность, то $\langle \mu_i \rangle$ не зависит от номера узла, и на выделенный момент в среднем действует эффективное поле $H_{eff} = \langle \mu_i \rangle J(0) + H$. Здесь $J(0) = \sum_j J_{ij}$. – нулевая фурье-компонента взаимодействия. В приближении взаимодействия ближайших соседей, z, можно записать $J(0) = zJ$. Используя приближение среднего поля (истинное поле заменяем на эффективное), легко получить самосогласованное уравнение $\langle \mu_i \rangle = \mathrm{th}[\beta(J(0)\langle \mu_i \rangle + H)]$.

В предельном случае нулевого внешнего поля при больших температурах получаем закон Кюри-Вейсса. При температурах меньших температуры Кюри возможен переход в ферромагнитное состояние.

1. Рассмотрим гамильтониан модели Изинга во внешнем магнитном поле $\mathrm{H} = -(\mu_0^2/2)\sum_{ij} J_{ij}S_iS_j - \mu_0 \sum_i S_i H$, $S_i = \pm 1$, $J_{ij} > 0$. Получить гамильтониан в приближении среднего поля, пренебрегая квадратичными флуктуациями магнитных моментов.

Решение

В нашем случае $< S^2 > - < S >^2 \to 0$. и в приближении среднего поля запишем $S_iS_j \approx < S_i > S_j + S_i < S_j > - < S_i >< S_j >$. В итоге для гамильтониана имеем $\mathrm{H} = (\mu_0/2)NH_0 < S_i > - \mu_0 \sum_i S_i(H + H_0)$, где $H_0 = \mu_0 \sum_i J_{ij} < S_i > = z\mu_0 J < S_i >$ – среднее поле, z – число ближайших соседей, а $< S_i >$ – средний магнитный момент (параметр порядка).

2. Вычислить статистическую сумму в приближении среднего поля, используя гамильтониан, полученный в предыдущей задаче.

Ответ

$$Z = \prod_i \sum_{S_i = \pm 1} \exp(-\mu_0\beta H_0 < S_i > /2 + \mu_0\beta S_i(H + H_0)) =$$

$$= \exp(-\mu_0\beta N H_0 < S_i > /2)[2\,\mathrm{ch}(\mu_0\beta(H + H_0)]^N$$

3. Найти свободную энергию в модели Изинга в приближении среднего поля. Использовать статистическую сумму в задаче 2.

Ответ

$F = -T\ln Z = \mu_0\beta NH_0 < S_i > /2 - TN\ln[2\,\mathrm{ch}(\mu_0\beta(H + H_0))]$

4. Используя условие минимума свободной энергии (см. задачу 3), получить уравнение на параметр порядка.

Указание

Рассмотреть условие $\partial F / \partial < S_i >= 0$.

5. Найти температуру Кюри T_k и исследовать поведение параметра порядка при $T \to 0$ и $T \to T_k$ в модели Изинга в приближении среднего поля.

Решение

Условие минимума свободной энергии приводит к уравнению $< S_i >= \mathrm{th}(< S_i > T_k / T)$. Учитывая, что

$\mathrm{th}(x \to 0) \approx x - x^3 / 3 + 2x^5 / 45,$

$\mathrm{th}(x \to \infty) \approx 1 - 2\exp(-x)$

Легко получить $< S_i >= 1 - 2\exp(-2T_k / T)$ при $T \to 0$ и

$< S_i >^2 = 3\tau - 12\tau^2 / 5$, $\tau = T_k - T / T_k \ll 1$, при $T \to T_k$, $T_k = \mu_0^2 zJ$.

6. Исследовать поведение свободной энергии при $T \to 0$ и $T \to T_k$ в нулевом магнитном поле. Показать устойчивость ферромагнитного состояния в этих пределах. Получить разложения свободной энергии по параметру порядка в пределе $< S_i > \to 0$.

Ответ

$F / N = -T_k / 2 + O(\exp(-2T_k / T))$, $T \to 0$,

$F / N = -T\ln 2 - T_k < S_i >^2 \tau / 2 + T_k < S_i >^4 /12$, $\tau = (T_k - T) / T_k$, $T \to T_k$.

$F(< S_i >) - F(< S_i >= 0) = -(3NT_k / 4)(\tau^2 - \tau^3 / 5) < 0$, $T \to T_k$.

7. Выразить теплоемкость в модели Изинга через параметр порядка. Рассмотреть предельные случаи $T \to 0$ и $T \to T_k$.

Ответ

$C = -(NT_k / 2)\partial < S_i >^2 /\partial T$,

$C = (3N / 2)[1 - 8\tau / 5]$, при $T \to T_k$, $\tau = (T_k - T) / T_k$ и

$C = 4N(T_k / T)^2\exp(-2T_k / T)$ при $T \to 0$.

8. Вычислить магнитную восприимчивость в модели Изинга в приближении среднего поля. Рассмотреть предельные случаи $T < T_c$ и $T \to T_k \pm 0$.

Ответ

$\chi = \mu_0^2 (1 - < S_i >^2) / (T - T_k (1 - < S_i >^2))$

$\chi = (4\mu_0^2 / T) \exp(-2T_k / T)$, $T \to 0$

$\chi = \mu_0^2 / 2(T_k - T)$, $T \to T_k - 0$

$\chi = \mu_0^2 / (T - T_k)$, $T \to T_k + 0$

9. Выразить магнитную восприимчивость через среднеквадратичную флуктуацию магнитного момента.

Ответ

$\chi = (1/N)(dM / dH)_{H=0} = (\beta / N)[< M^2 > - < M >^2] = (\beta / N) < (M - < M >)^2 >$.

10. Найти флуктуацию магнитного момента в приближении среднего поля в модели Изинга в нулевом поле.

Ответ

$$< M^2 >= Z^{-1} \partial^2 Z / \partial(\beta H)^2 = \beta^2 (\partial F / \partial(\beta H))^2 - \beta \partial^2 F / \partial(\beta H)^2 =$$
$$\mu_0^2 < S_i >^2 + \mu_0 T d < S_i > / dH = \mu_0^2 < S_i >^2 + T\chi =$$
$$\mu_0^2 [< S_i >^2 + T(1 - < S_i >^2)(T - T_k (1 - < S_i >^2))^{-1}]$$

11. Найти статистическую сумму ферромагнитной одномерной модели Изинга во внешнем поле.

Ответ

$$Z = [\exp(\beta J)\,\mathrm{ch}(\beta H) + \sqrt{\exp(2\beta J)\,\mathrm{sh}^2(\beta H) + \exp(-2\beta J)}\,]^N$$

12. Найти свободную энергию ферромагнитной одномерной модели Изинга, используя результат зад.11. Рассмотреть случай нулевого поля.

Ответ

$$F = -T \ln Z = -TN \ln[\exp(\beta J)\,\mathrm{ch}(\beta H) + \sqrt{\exp(2\beta J)\,\mathrm{sh}^2(\beta H) + \exp(-2\beta J)}\,] =$$
$$-TN[\ln(2\,\mathrm{ch}(\beta J))]_{H=0}.$$

13. Найти статистическую сумму антиферромагнитной одномерной модели Изинга во внешнем поле.

Ответ

В ответе задачи 11 следует сделать замену $J \to -J$.

14. Найти теплоемкость в одномерной модели Изинга в нулевом поле.

Ответ
$C = N(J/T)^2 \operatorname{ch}^{-2}(\beta J)$.

15. Найти энергию одномерной модели Изинга в нулевом поле.

Ответ
$E = -NJ \operatorname{th}(\beta J)$.

16. Найти магнитную восприимчивость одномерной модели Изинга.

Ответ
$\chi = (\mu_0^2/T)\exp(-2\beta\mu_0^2/T)$.

17. Получить свободную энергию двумерной модели Изинга.

Указание
Точное выражение для статистической суммы имеет вид
$$Z = 2^N(1-x^2)^{-N}\prod_{n,m=1}^{L}[(1+x^2)^2 - 2x(1-x^2)(\cos 2\pi n/L + \cos 2\pi m/L)]^{1/2},\ x = \operatorname{th}(J/T).$$
Решение
Используя выражение для статистической суммы, находим
$$F = -NT\ln 2 + NT\ln(1-x^2) -$$
$$(T/2)\sum_{n,m=0}^{L}[(1+x^2)^2 - 2x(1-x^2)(\cos 2\pi n/L + \cos 2\pi m/L)]\,.$$
Переходя от суммирования к интегрированию, в пределе $L, N \to \infty$ получим:
$$F = -NT\ln 2 + NT\ln(1-x^2) -$$
$$(TN/2(2\pi)^2)\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln[(1+x^2)^2 - 2x(1-x^2)(\cos\omega_1 + \cos\omega_2)]d\omega_1 d\omega_2\,.$$

18. Исследовать свободную энергию двумерной модели Изинга вблизи критической температуры.

Решение
Свободная энергия имеет особую точку при таком значении x, при котором аргумент логарифма под знаком интеграла обращается в нуль. Аргумент минимален при $\cos\omega_1 = \cos\omega_2 = 1$, и равен $(1+x^2)^2 - 4x(1-x^2)$. Это выражение имеет минимум в нуле при $x = x_c = \sqrt{2}-1$, что определяет температуру фазового перехода $\operatorname{th}(J/T_c) = x_c$. $T = T_c$ Можно показать, что свободная энергия

понижается при $C \sim \ln|T - T_c|$, непрерывна при $T = T_c$.Теплоемкость имеет логарифмическую особенность в точке фазового перехода.

19. Найти теплоемкость двумерной модели Изинга.

Решение
Разложим свободную энергию по степеням $T - T_c$ и рассмотрим особенность, возникающую из интегрального слагаемого. Разложение вблизи минимума по степеням $\omega_{1,2}$ и $T - T_c$: $F \sim \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln[a(T - T_c)^2 + b(\omega_1^2 + \omega_2^2)]d\omega_1 d\omega_2$.
После этого легко получить $F \sim -|T - T_c|^2 \ln|T - T_c|$, и $C \sim \ln|T - T_c|$.

20. Гамильтониан классической модели Гейзенберга можно представить в виде $\mathrm{H} = -(\mu_0^2/2)\sum_{i>j} J_{ij}\mathbf{S}_i\mathbf{S}_j - \mu_0 \sum_i \mathbf{S}_i\mathbf{H}$. Записать данный гамильтониан в приближении среднего поля, пренебрегая квадратичными флуктуациями спиновых моментов.

Решение
Используя разложение в виде
$S_i S_j \approx < S_i > S_j + S_i < S_j > - < S_i >< S_j >$, запишем гамильтониан в виде: $\mathrm{H} = (\mu_0/2)N\mathbf{H}_0\mathbf{m}S - \mu_0 \sum_i \mathbf{S}_i(\mathbf{H} + \mathbf{H}_0)$, где $\mathbf{H}_0 = \mu_0 \sum_j J_{ij}\mathbf{m}S = zJ\mu_0\mathbf{m}S$ – среднее поле в приближении ближайших соседей, $\mathbf{m} =< \mathbf{S}_i > /S$ – параметр порядка. Если определить параметр порядка как средний магнитный момент на узле $\mathbf{m} = \mu_0 < \mathbf{S}_i >$, то среднее поле имеет вид $\mathbf{H}_0 = zJ\mathbf{m}$.

21. Вычислить статистическую сумму классической ферромагнитной модели Гейзенберга в приближении среднего поля.

Решение
Определим угол θ_i между полем $H + H_0$ и спином S_i, поэтому
$$Z = \prod_i \exp(-\beta m H_0/2)\int d\Omega_i \exp[\mu_0\beta S(H + H_0)\cos\theta_i] =$$
$$\exp(-\beta N m H_0/2)[4\pi\,\mathrm{sh}(\mu_0\beta S(H + H_0))/\mu_0\beta S(H + H_0)]^N.$$

22. Вычислить свободную энергию классической ферромагнитной модели Гейзенберга в приближении среднего поля.

Ответ
$F = NmH_0/2 - TN\ln[4\pi\,\mathrm{sh}(\mu_0\beta S(H + H_0))/\mu_0\beta S(H + H_0)]$.

23. Получить уравнение на параметр порядка классической модели Гейзенберга в приближении среднего поля.

Ответ

Используя условие $\partial F / \partial m = 0$, получаем $m = \mu_0 S\,\mathrm{F}_L[\mu_0 \beta S(H + H_0)]$, где $\mathrm{F}_L(x) = \operatorname{cth} x - 1/x$ – функция Ланжевена.

24. Определить температуру перехода в ферромагнитное состояние в приближении среднего поля.

Решение

Используя разложение функции Ланжевена при $m \to 0$, легко получить $T_c = zJ(\mu_0 S)^2 / 3$.

25. Разложить свободную энергию по параметру порядка вблизи температуры перехода в модели Гейзенберга.

Решение

Используя приближенные выражения

$$\frac{\operatorname{sh} x}{x} \approx 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^6}{5020}, \ln \frac{\operatorname{sh} x}{x} \approx \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + \frac{x^6}{2835},$$

Разложим свободную энергию (см. задачу 22) по степеням параметра порядка

$F / N = -T \ln 4\pi - (1/2)zJ\tau(1+\tau)m^2 + (1/20T_c)z^2J^2(1+3\tau)m^4 + (1/105T_c^2)z^3J^3m^6$,

$\tau = (T_c - T)/T_c << 1$.

Из условия минимума свободной энергии находим зависимость параметра порядка от температуры $m = (5T_c / zJ)^{1/2}\sqrt{\tau(1 - 4\tau/7)}$, с учетом которой зависимость свободной энергии от температуры имеет вид $\dfrac{F(m) - F(0)}{N} = -\dfrac{5T_c}{4}\tau^2 + \dfrac{5T_c}{84}\tau^3$.

26. Найти теплоемкость в модели Гейзенберга при $T \to T_c$.

Ответ

$C = 5N/2 - (20N/7)\tau$.

27. Найти продольную намагниченность в модели Гейзенберга.

Ответ

$M = -\partial F / \partial H = Nm$.

28. Записать продольную магнитную восприимчивость через функцию Ланжевена.

Ответ

$$\chi = \left(\frac{dm}{dH}\right)_{H=0} = \frac{(\mu_0 S)^2\, \mathrm{F}_L'(\mu_0 \beta H_0 S)}{T - zJ(\mu_0 S)^2\, \mathrm{F}_L'(\mu_0 \beta H_0 S)}.$$

29. Найти магнитную восприимчивость в модели Гейзенберга при $T > T_c$.

Ответ

$\chi(m = 0, H_0 = 0) = \mu_0^2 S^2 / 3(T - T_c)$.

30. Найти продольную магнитную восприимчивость в модели Гейзенберга при $T \to T_c - 0$.

Ответ

Используя асимптотики функции Ланжевена, получаем $\chi = (\mu_0^2 S^2 / 6T_c)\tau^{-1}$.

31. Найти продольную магнитную восприимчивость в модели Гейзенберга при $T \to 0$.

Ответ

$\chi \approx T / (zJ\mu_0^2 S^2)$.

32. Исследовать зависимость параметра порядка от температуры в модели Гейзенберга при $T \to 0$ и $T \to T_c - 0$.

Ответ

$m = \mu_0 S(1 - T / 3T_c)$, $m = (5T_c / zJ)^{1/2} \sqrt{(\tau - 4\tau^2 / 7 + 4\tau^3 / 49)}$.

33. Найти зависимость теплоемкости от температуры в модели Гейзенберга при $T \to 0$ и $T \to T_c$.

Ответ

$C = -(NzJ / 2)\partial m^2 / \partial T$, $C = (5N / 2)(1 - 8\tau / 7)$, $C = N(1 + T_c / 3T)$.

ФЛУКТУАЦИИ МАГНИТНОГОМОМЕНТА В МОДЕЛИ ИЗИНГА

Теория среднего поля только качественно описывает область вблизи точки фазового перехода. Учет флуктуаций позволяет лучше объяснить экспериментальные данные вблизи фазового перехода.

Дальний порядок возникает в упорядоченной фазе, где $\langle \mu_i \rangle \neq 0$, не зависит от номера узла и не спадает даже на больших расстояниях от узла. Дальний порядок спонтанно исчезает в точке фазового перехода. Ближний порядок связан с локальными флуктуациями магнитного момента на близких расстояниях. В теории среднего поля флуктуации не учитываются, поэтому с исчезновением спонтанной намагниченности исчезает и ближний порядок.

Рассмотрим функцию корреляции $\langle \mu_i \mu_j \rangle$ выше точки фазового перехода, где $\langle \mu_i \rangle = 0$. Используя метод самосогласованного поля, запишем функцию корреляции в виде. $G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \operatorname{th} \beta [J(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \sum_{j \neq 1} J(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_j) G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j)]$. В приближении Вейсса $G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j) = 0$. Если принять, что $G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j) << 1$, то после фурье-преобразования имеем $G(\mathbf{k}) = \beta [J(\mathbf{k}) + G(-\mathbf{k}) J(\mathbf{k})]$. Корреляционная функция в реальном пространстве принимает вид $G(r) \sim (1/r)\exp(-r/\xi)$, где ξ – корреляционная длина, которая расходится в точке фазового перехода. Таким образом, магнитные моменты начинают выстраиваться в пределах блока размера ξ. Магнитные моменты блоков ориентированы беспорядочно, так что средний магнитный момент всей системы по-прежнему равен нулю.

1. Фурье представление функции корреляции магнитного момента в модели Изинга $< \mu_i \mu_j >= G(r_{ij})$ представим в виде $G(\mathbf{k}) = \beta J(\mathbf{k}) / (1 - \beta J(\mathbf{k}))$, $T > T_c$. Получить корреляционную функцию в длинноволновом приближении.

Ответ
$G(k) = \beta T_c / (1 - T_c / T)$.

2. Исследовать пространственную зависимость $J(r)$ в пределе больших корреляционных длин.

Ответ
$J(r) \sim (1/r)\exp(-r/r_0)$.

3. Вычислить координатную зависимость функции корреляции, используя фурье компоненты взаимодействия $J(r)$.

Ответ
$G(r) \sim (1/r)\exp(-r/\xi)$, $\xi \sim (T - T_c)^{-1/2}$.

4. Получить средний квадрат модуля фурье компоненты $<|\mu_k|^2>$ выше точки перехода.

Ответ

$<|\mu_k|^2> = 1/(1-\beta J(\mathbf{k}))$.

5. Получить среднюю энергию $<\mathrm{H}>$ в модели Изинга.

Решение

По определению при нулевом магнитном поле

$$E = <\mathrm{H}> = -(1/2)\sum_{i\neq j} J_{ij} <\mu_i \mu_j>$$
$$= -(1/2)\sum_{\mathbf{k}} J(\mathbf{k})G(\mathbf{k}) = -(1/2)\sum_{\mathbf{k}} J(\mathbf{k})/(1-\beta J(\mathbf{k})).$$

6. Вычислить теплоемкость в модели Изинга вблизи фазового перехода, учитывая длинноволновую поправку.

Ответ

В длинноволновом приближении $J(k) = J(0) - ak^2$.

$$C = (1/2)\sum_{\mathbf{k}} \frac{\beta^2 J^2(k)}{(1-\beta J(k))^2} = \frac{VJ^2(0)}{16\pi a^{3/2}}(T-T_c)^{-1/2}.$$

7. Выразить восприимчивость системы через флуктуации магнитного момента.

Ответ

$\chi = (\beta/N)[<(\sum_i \mu_i)^2> - <(\sum_i \mu_i)>^2]$.

8. Вычислить флуктуационный вклад в магнитную восприимчивость системы выше точки перехода.

Ответ

$\chi = \partial m/\partial H = \lim_{k\to 0} <|\mu_k|^2> \sim (T-T_c)^{-1}$.

Литература

1. Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Статистическая физика.– М., Физматлит, 2010.
2. Изюмов Ю.А. Скрябин Ю.Н. Статистическая механика магнитоупорядоченных систем – М., Наука, 1987.
3. Елесин В.Ф. Кашурников В.А. Физика фазовых переходов.– М., МИФИ, 1997.
4. Толедано Ж.К, Толедано П. Теория Ландау фазовых переходов – М., Мир, 1999.
5. Румер Ю.Б. Рывкин М.Ш. Термодинамика статистическая физика и кинетика – М., Наука, 1977.
6. Аминов Л.К. Термодинамика и статистическая физика – Казань, КГУ, 2008.