Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Направление: 010101.68 – Математика

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ НА ТЕМУ

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОБЛАСТИ

Работа завершена:
«____»________________2015 г. ________________Л.А. Салахова
Работа допущена к защите:
Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент
«____»________________2015 г. ________________Р.Г. Салахудинов
Заведующий кафедрой
доктор физико-математических наук,
профессор
«____»________________2015 г. ________________С.Р. Насыров

Казань – 2015 г.

Содержание

1 Введение

Пусть Ω — односвязная область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и через $\partial\Omega$ обозначим ее границу. Рассмотрим физический функционал жесткость кручения области Ω:

$$\mathbf{P}(\Omega) := 2\int\int_\Omega u(x,y)\,dxdy,$$

где функция напряжения $u = u(x,y)$ — решение уравнения Пуассона $\triangle u = -2$ с граничным условием $u = 0$.

Задача о двусторонней оценке жесткости кручения через один и тот же геометрический функционал области или некоторую их комбинацию возникла в работах Сен-Венана. В 1998 г. эта задача в классе односвязных областей была решена Ф. Г. Авхадиевым [1], им была получена двусторонняя оценка жесткости кручения в терминах евклидова момента инерции $\mathbf{I}_2(\Omega)$:

$$\mathbf{I}_2(\Omega) \le \mathbf{P}(\Omega) \le 64\mathbf{I}_2(\Omega), \quad \mathbf{I}_2(\Omega) = \int\int_\Omega \rho(z,\Omega)^2\,dxdy, \tag{1}$$

где $\rho(z,\Omega)$ — функция расстояния от точки z до границы области Ω.

Также известно большое число результатов, связанных с задачей Сен-Венана, в классе выпуклых областей. Например, в 1951 г. Г.Полиа и Г. Сеге была доказана оценка:

$$\mathbf{P}(\Omega) \ge \frac{1}{2}\mathbf{A}(\Omega)\boldsymbol{\rho}(\Omega)^2, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\rho}(\Omega) := \sup \rho(z,\Omega) : z \in \Omega\}$, $\mathbf{A}(\Omega)$ — площадь области Ω.

В 1962 г. Е. Макаи получил обратную оценку:

$$\mathbf{P}(\Omega) < \frac{4}{3}\mathbf{A}(\Omega)\boldsymbol{\rho}(\Omega)^2. \tag{3}$$

Одним из наиболее важных неравенств для жесткости кручения является неравенство Сен-Венана–Полиа

$$\mathbf{P}(\Omega) \le \frac{\mathbf{A}(\Omega)^2}{2\pi}.$$

Л.Е. Пейн показал, что в действительности последнее неравенство является следствием более сильного изопериметрического неравенства. А именно, справедливо неравенство

$$\mathbf{A}(\Omega)^2 - 2\pi\mathbf{P}(\Omega) \ge (\mathbf{A}(\Omega) - 2\pi\mathbf{u}(\Omega))^2,$$

где $\mathbf{u}(\Omega) = \sup_{x,y\in\Omega} u(x,y)$. В обоих неравенствах равенство достигается тогда и только тогда, когда Ω — круг.

Далее было установлено, что евклидовы моменты области и жесткость кручения обладают схожими изопериметрическими свойствами. И в работе [2] были получены аналоги неравенства Сен-Венана–Полиа для евклидовых моментов, также Р. Г. Салахудинов [6] получил аналоги неравенство Пейна для евклидовых моментов порядка q:

Теорема А. *Пусть Ω – односвязная область конечной площади и $\mathbf{I}_1(\Omega) < +\infty$, $q \ge 1$. Тогда имеет место неравенство*

$$\mathbf{I}_q(\Omega) - \frac{2\pi\boldsymbol{\rho}(\Omega)^{q+2}}{(q+1)(q+2)} \le \frac{2\boldsymbol{\rho}(\Omega)^{q-1}}{(q+1)}(\mathbf{I}_1(\Omega) - \frac{\pi\boldsymbol{\rho}(\Omega)^3}{3}).$$

Теорема B. *Пусть* Ω *– односвязная область конечной площади и* $q \geq 0$*. Тогда имеет место неравенство*

$$\mathbf{I}_q(\Omega) - \frac{2\pi\boldsymbol{\rho}(\Omega)^{q+2}}{(q+1)(q+2)} \leq \frac{\boldsymbol{\rho}(\Omega)^q}{(q+1)}(\mathbf{A}(\Omega) - \pi\boldsymbol{\rho}(\Omega)^2).$$

$$\mathbf{I}_q(\Omega) - \frac{2\pi\boldsymbol{\rho}(\Omega)^{q+2}}{(q+1)(q+2)} \geq \frac{\mathbf{l}(\boldsymbol{\rho}(\Omega))\boldsymbol{\rho}(\Omega)^{q+1}}{(q+1)},$$

где $\mathbf{l}(\boldsymbol{\rho}(\Omega))$ длина границы множества уровня, расположенного на расстоянии $\boldsymbol{\rho}(\Omega)$ от $\partial\Omega$.

Случаи равенства в двух теоремах совпадают со случаями равенства в неравенстве Боннезена (т. е. экстремальные области Ω являются выпуклыми и состоят из прямоугольника и двух полукругов).

Обобщения по размерности приведенных неравенств с точными константами неизвестны. Некоторое обобщение неравенства (1) на многомерный случай было получено в работе [3] для областей, удовлетворяющих строгому условию Харди.

Основными результатами данной работы являются обобщение теоремы A и теоремы B на 3-мерный случай в классе выпуклых тел.

2 Основные обозначения и определения

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ выпуклый компакт G. Обозначим через $\mathbf{V}(G)$, $\mathbf{S}(G)$ объем и площадь поверхности тела G соответственно. Определим в G множество

$$G(t) := \{z \in G | \rho(z, G) > t\}, \quad (0 \le t < \boldsymbol{\rho}(G)),$$

где $\rho(z, G)$ — расстояние от точки z до границы ∂G области G и $\boldsymbol{\rho}(G) := \sup_{z \in G} \rho(z, G)$, которое называется внутренним параллельным множеством множества G на расстоянии t (см. рис.1).

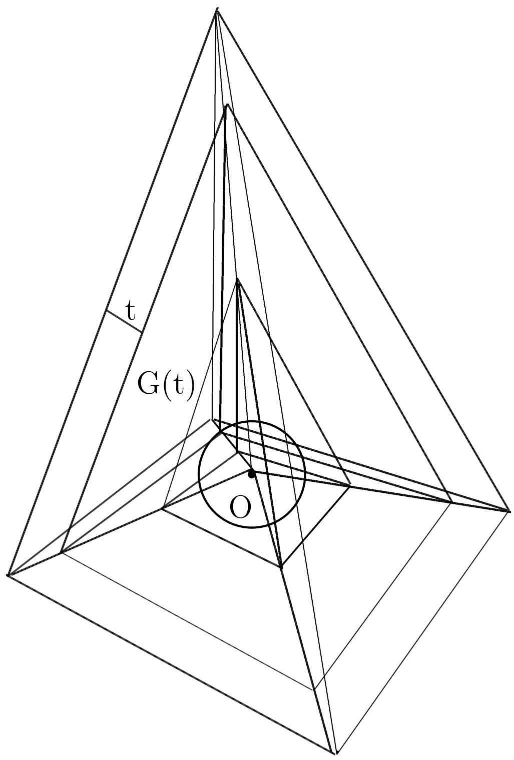


Рис. 1

Будем использовать следующие обозначения для оценок на параллельных множествах функции расстояния $\rho(z, G)$:

$$G(\boldsymbol{\rho}) := \{z \in G | \rho(z, G) = \boldsymbol{\rho}(G)\}, \quad V(t) := \mathbf{V}(G(t)) = \int_{G(t)} dV,$$

$$S(t) := \mathbf{S}(G(t)) \quad (0 \le t < \boldsymbol{\rho}(G)), \quad \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G)) := \lim_{t \to \boldsymbol{\rho}(G)} S(t).$$

Например, для прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b, c $(a < b < c)$ множеством $G(\boldsymbol{\rho})$ является прямоугольник $ABCD$, а в случае $b = a$ отрезок MN, в обоих случаях $\boldsymbol{\rho}(G) = \dfrac{a}{2} = R$ (см. рис. 2).

Известно [4], что для множеств $G(t)$ площадь поверхности $S(t)$ и объем $V(t)$ связаны простым соотношением:

$$-\frac{dV(t)}{dt} = S(t). \tag{4}$$

Т.е. площадь поверхности параллельного тела есть производная объема параллельного тела по параметру t.

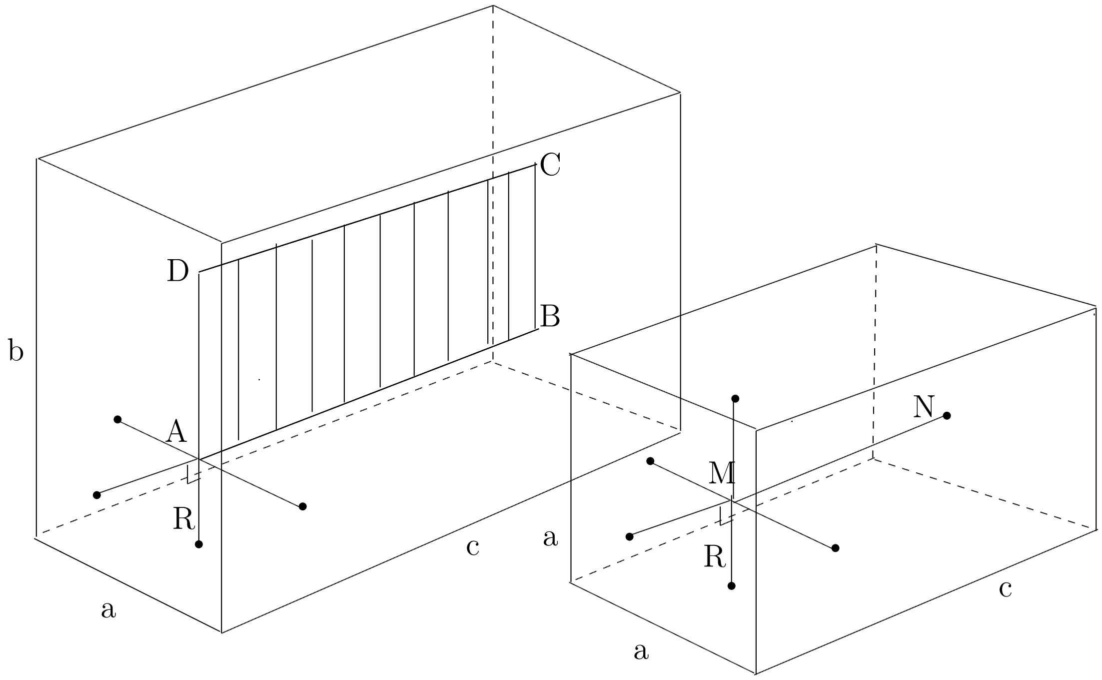


Рис. 2

Определим евклидовый момент тела G относительно его границы порядка $p \geq 0$ как геометрический функционал:

$$\mathbf{I}_p(G) = \int\int_G \rho(z, G)^p \, dxdy,$$

где $\rho(z, G)$ — функция расстояния от точки z до границы тела G.

Используя определение интеграла по Лебегу и интегрирование по частям, функционал $\mathbf{I}_p(G)$ можно представить в виде:

$$\mathbf{I}_p(G) = \int_0^{V(G)} t^p(V)dV = p\int_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} t^{p-1}V(t)dt. \tag{5}$$

Функционал евклидовый момент порядка $p \geq 0$ можно рассматривать как естественное обобщение объема тела G.

3 Аналог неравенства Боннезена. Неравенство Дисканта.

В двумерном случае хорошо известно справедливое для произвольной односвязной области Ω неравенство Боннезена (например, [5]):

$$\boldsymbol{\rho}(\Omega)\mathbf{L}(\Omega) \geq \mathbf{A}(\Omega) + \mathbf{A}(D_{\boldsymbol{\rho}}),$$

где $\mathbf{A}(\Omega)$, $\mathbf{L}(\Omega)$ — площадь и длина границы области Ω, $D_{\boldsymbol{\rho}}$ — круг радиуса $\boldsymbol{\rho}(\Omega)$. Экстремальной областью в этом неравенстве является круг и область типа Боннезена, состоящая из двух полукругов радиуса r и прямоугольника со сторонами $2r$ и d (см. рис. 3).

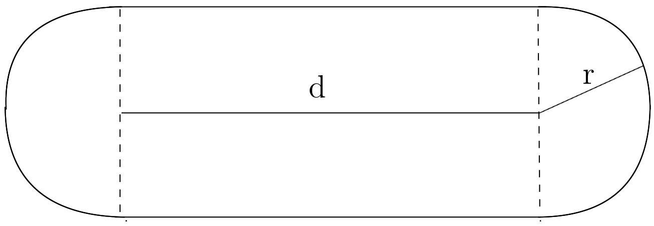


Рис. 3

Обобщением неравенства Боннезена на многомерный случай служит неравенство, справедливое для выпуклого компакта G:

$$\boldsymbol{\rho}(G)\mathbf{S}(G) \geq \mathbf{V}(G) + (n-1)\mathbf{V}(B_{\boldsymbol{\rho}}), \qquad (6)$$

где $B_{\boldsymbol{\rho}}$ — шар радиуса $\boldsymbol{\rho}(G)$. Равенство достигается только в том случае, когда G совпадает с $B_{\boldsymbol{\rho}}$.

Неравенство (6) является следствием неравенства Дисканта (например, [5]):

$$\mathbf{V}^{\frac{n}{n-1}}(G, n-1) - \mathbf{V}(G)\mathbf{V}^{\frac{1}{n-1}}(B) \geq (\mathbf{V}^{\frac{1}{n-1}}(G, n-1) - \rho(G)\mathbf{V}^{\frac{1}{n-1}}(B))^n, \qquad (7)$$

где $\mathbf{V}(G, n-1)$ — $(n-1)$-мерный объем тела G и $n\mathbf{V}(G, n-1) = \mathbf{S}(G)$, B — шар единичного радиуса. Равенство достигается только в случае шара.

Приведем доказательство неравенства (6) для случая $n = 3$ (доказательство в общем случае приведено, например, в [5]).

Введем функцию $f(x) = (x-a)^3 - x^3 + 3x^2a$ и покажем, что она возрастает при $a > 0$ на интервале $[a; \infty)$. Для этого оценим производную $f'(x) = 3(x-a)^2 - 3x^2 + 6xa = 3a^2$, очевидно, при $a > 0$ справедливо $f'(x) > 0$.

Положим теперь $x = \left(\dfrac{\mathbf{S}(G)}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ и $a = \boldsymbol{\rho}(G)\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}(B)$. Из того, что $B_\rho \subset G$, следует

$$\frac{\mathbf{S}(G)}{3} \geq \frac{\mathbf{S}(B_{\boldsymbol{\rho}})}{3} = \frac{\boldsymbol{\rho}^2(G)\mathbf{S}(B)}{3} = \frac{4\pi\boldsymbol{\rho}^2(G)}{3} = \boldsymbol{\rho}^2(G)\mathbf{V}(B).$$

Таким образом, имеем $x \geq a$. Оценим правую часть неравенства (7) при $n = 3$:

$$(x-a)^3 = x^3 - 3x^2a + f(x) \geq x^3 - 3x^2a + f(a) = x^3 - 3x^2a + 2a^3 =$$

$$= \left(\frac{\mathbf{S}(G)}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - \mathbf{S}(G)\boldsymbol{\rho}(G)\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}(B) + 2\boldsymbol{\rho}^3(G)\mathbf{V}^{\frac{3}{2}}(B).$$

Из последнего неравенства и (7) при $n = 3$ следует

$$\left(\frac{\mathbf{S}(G)}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - \mathbf{V}(G)\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}(B) \geq \left(\frac{\mathbf{S}(G)}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - \mathbf{S}(G)\boldsymbol{\rho}(G)\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}(B) + 2\boldsymbol{\rho}^3(G)\mathbf{V}^{\frac{3}{2}}(B).$$

С помощью очевидных сокращений из последнего неравенства получим (6). Случай равенства в неравенстве (6) совпадает со случаем равенства в неравенстве Дисканта.

Для доказательства неравенства Дисканта рассмотрим семейство функций $H_\lambda(u) = H_G(u) - \lambda H_B(u)$, где $H_G(u)$, $H_B(u)$ — опорные функции G и B. Из того, что $B_{\boldsymbol{\rho}} \subset G$, следует $H_\lambda(u) > 0$ при $0 \leq \lambda \leq \boldsymbol{\rho}(G)$. Таким образом, $H_\lambda(u)$ является опорной функцией некоторого выпуклого компакта C_λ, который образован из пересечения конечного числа полупространств.

По теореме Фубини величину $\mathbf{V}(G)$ можем представить в виде

$$\mathbf{V}(G) = n \int_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} V(C_\lambda, n-1)\, d\lambda. \tag{8}$$

Используя обобщение теоремы Брунна-Минковского ([5], с.147), получим неравенство

$$\mathbf{V}^{\frac{1}{n-1}}(C_\lambda + \lambda B, n-1) \geq \mathbf{V}^{\frac{1}{n-1}}(C_\lambda, n-1) + \lambda \mathbf{V}^{\frac{1}{n-1}}(B). \tag{9}$$

Из того, что $C_\lambda + \lambda B \subset G$, следует

$$\mathbf{V}(C_\lambda + \lambda B, n-1) \leq \mathbf{V}(G, n-1). \tag{10}$$

Тогда из (9) и (10) получим

$$\mathbf{V}^{\frac{1}{n-1}}(C_\lambda, n-1) \leq \mathbf{V}^{\frac{1}{n-1}}(G, n-1) - \lambda \mathbf{V}^{\frac{1}{n-1}}(B).$$

Подставим последнюю оценку в (8) и после интегрирования получим неравенство Дисканта.

4 Оценки на множествах уровня функции расстояния.

Лемма 4.1 *Пусть G выпуклое тело конечного объема. Тогда справедлива следующая оценка*

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G)) + \frac{4}{3}\pi(\boldsymbol{\rho}(G) - t)^2 \leq \frac{V(t)}{\boldsymbol{\rho}(G) - t} \leq \frac{\mathbf{V}(G)}{\boldsymbol{\rho}(G)} + \frac{4}{3}t(t - 2\boldsymbol{\rho}(G)),$$

где $0 \leq t < \boldsymbol{\rho}(G)$. Равенство возможно только в случае шара.

Доказательство. Запишем неравенство (6) при $n = 3$ в более удобной форме:

$$\mathbf{S}(G) \geq \frac{\mathbf{V}(G)}{\boldsymbol{\rho}(G)} + \frac{8}{3}\pi\boldsymbol{\rho}(G)^2, \tag{11}$$

Так как тело G выпуклое, то все множества $G(t)$ $(0 \leq t < \boldsymbol{\rho}(G))$ также выпуклые, поэтому к $G(t)$ можем применить неравенство (11), имеем

$$S(t) \geq \frac{V(t)}{\boldsymbol{\rho}(G(t))} + \frac{8}{3}\pi\boldsymbol{\rho}(G(t))^2. \tag{12}$$

Далее, известно (например, [4]), что справедливы равенства

$$-\frac{dV(t)}{dt} = S(t), \qquad \rho(G(t)) = \boldsymbol{\rho}(G) - t. \tag{13}$$

Тогда неравенство (12) для множества $G(t)$ примет вид

$$-V'(t)(\boldsymbol{\rho}(G) - t) \geq V(t) + \frac{8}{3}\pi(\boldsymbol{\rho}(G) - t)^3.$$

Последнее неравенство эквивалентно

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{V(t)}{\boldsymbol{\rho}(G) - t}\right] \leq \ -\frac{8}{3}\pi(\boldsymbol{\rho}(G) - t). \tag{14}$$

Функция $V(t)$ непрерывна и дифференцируема на интервале $[0; \boldsymbol{\rho}(G))$ [4]. Следовательно, функция $V(t)(\boldsymbol{\rho}(G) - t)^{-1}$ может быть представлена как определенный интеграл с переменным верхним пределом от своей производной. Из неравенства (14) вытекает, что $V(t)(\boldsymbol{\rho}(G) - t)^{-1}$ является неотрицательной и убывающей функцией. Тогда существует предел функции $V(t)(\boldsymbol{\rho}(G) - t)^{-1}$ при $t \to \boldsymbol{\rho}(G)$. Из определения $\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G))$ и равенства $\mathbf{V}(\boldsymbol{\rho}(G)) = 0$ вычислим

$$\lim_{t \to \boldsymbol{\rho}(G)} \frac{V(t)}{\boldsymbol{\rho}(G) - t} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G)).$$

Проинтегрируем обе части неравенства (14) по $t \in [0; t_1]$ и $t \in [t_2, \boldsymbol{\rho}(G)]$, учитывая последнее выражение, получим необходимые неравенства. Случаи равенства в обоих неравенствах совпадают со случаем равенства в неравенстве (6).

□

5 Двусторонняя оценка евклидовых граничных моментов выпуклых тел.

Теорема 5.1 *Пусть G — выпуклое тело конечного объема и $p \geq 0$. Тогда справедливы следующие неравенства:*

$$\mathbf{I}_p(G) \leq \frac{\mathbf{V}(G)\boldsymbol{\rho}(G)^p}{p+1} - \frac{4\pi p(p+5)\boldsymbol{\rho}(G)^{p+3}}{3(p+1)(p+2)(p+3)}$$

и

$$\mathbf{I}_p(G) \geq \frac{\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G))\boldsymbol{\rho}(G)^{p+1}}{p+1} + \frac{8\pi\boldsymbol{\rho}(G)^{p+3}}{(p+1)(p+2)(p+3)}.$$

Равенство возможно только в случае шара.

Доказательство. Воспользуемся представлением (5) для $\mathbf{I}_p(G)$ и верхней оценкой из леммы 4.1, тогда получим

$$\mathbf{I}_p(G) = p\int_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} t^{p-1}V(t)dt \leq p\int_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} t^{p-1}\left(\frac{\mathbf{V}(G)}{\boldsymbol{\rho}(G)} + \frac{4}{3}t(t-2\boldsymbol{\rho}(G))\right)(\boldsymbol{\rho}(G)-t)dt.$$

Из последнего выражения, получим правую часть первого неравенства теоремы.

Покажем справедливость второго неравенства теоремы. Для этого воспользуемся нижней оценкой из леммы 4.1, имеем

$$\mathbf{I}_p(G) = p\int_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} t^{p-1}V(t)dt \geq p\int_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} t^{p-1}\left(\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G)) + \frac{4}{3}\pi(\boldsymbol{\rho}(G)-t)^2\right)(\boldsymbol{\rho}(G)-t)dt.$$

После несложных вычислений получим необходимое неравенство.

Случай равенства в обоих неравенствах совпадает со случаем равенства в (6). Этим завершается доказательство теоремы.

□

Хорошо известно, что на плоскости такие функционалы как площадь, длина границы и радиус наибольшего круга, содержащегося в выпуклой области связаны простым неравенством:

$$\mathbf{A}(\Omega) \geq \frac{\mathbf{L}(\Omega)\boldsymbol{\rho}(\Omega)}{2}. \tag{15}$$

Доказательство этого неравенства достаточно вести на примере выпуклого многоугольника. В трехмерном случае применение такого же метода доказательства для многогранников приводит к неравенству (доказательство приведено ниже):

$$\mathbf{V}(G) \geq \frac{\mathbf{S}(G)}{3}\boldsymbol{\rho}(G). \tag{16}$$

Таким образом, неравенство (15) легко обобщается по размерности.

Следующее неравенство дает некоторое уточнение неравенства (15)

$$\mathbf{A}(\Omega) \geq \frac{\mathbf{L}(\Omega) + \mathbf{l}(\boldsymbol{\rho}(\Omega))}{2}\boldsymbol{\rho}(\Omega), \tag{17}$$

где $\mathbf{l}(\boldsymbol{\rho}(\Omega))$ длина границы множества, находящегося на расстоянии $\boldsymbol{\rho}(\Omega)$ от границы области Ω. Естественным является предположение о существовании подобного неравенства для выпуклых тел в трехмерном пространстве. Однако, в отличие от предыдущей простой аналогии между неравенствами (15) и (16), здесь без наложения дополнительных условий на тело, полный аналог неравенства (17) пока не доказан. Рассмотрим подробнее некоторые особенности, которые возникают в этом случае.

Любая плоская выпуклая область Ω с ненулевым значением функционала $\mathbf{l}(\boldsymbol{\rho}(\Omega))$ содержит в себе некоторый прямоугольник со сторонами d и $2r$, где r — это радиус наибольшего круга, содержащегося в этой области (см. рис. 4). Остальные части, составляющие область Ω достаточно произвольны, главное, чтобы область Ω не выходила из класса выпуклых областей.

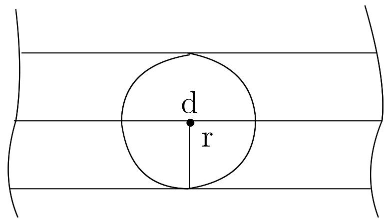


Рис. 4

В случае любого сколь угодно малого добавления площади к этому прямоугольнику, например, в виде треугольника (см. рис. 5), сразу же следует увеличение значения функционала $\boldsymbol{\rho}(\Omega)$ до некоторого R:

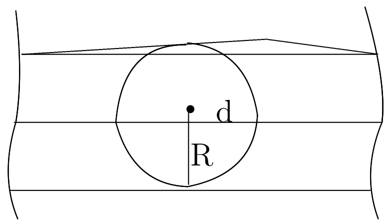
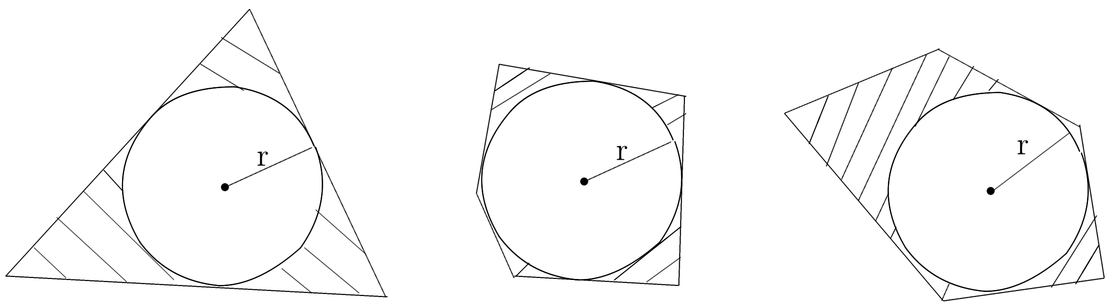


Рис. 5

Также заметим, если сжать область Ω вдоль d, то полученное таким образом новое множество может быть только выпуклым и отсюда следует, что для него будет справедливо неравенство (15).

Теперь рассмотрим аналогичные случаи в трехмерном пространстве. А именно, любое выпуклое тело G с ненулевым значением функционала $\mathbf{l}(\boldsymbol{\rho}(G))$ содержит в себе цилиндр высоты h и радиусом основания $\boldsymbol{\rho}(G) = r$. В отличие от двумерного случая, здесь мы можем найти такое добавление к цилиндру, что значение r при этом не изменится, например:



Также существенные отличия от двумерного пространства наблюдаются при сжатии тела G вдоль отрезка h, который проходит через центр вписанного шара. Это обстоятельство поясним на конкретном примере.

Рассмотрим в качестве поперечного сечения тела G треугольник описанный около окружности радиуса r. Тогда та часть тела G, которая содержит в себе цилиндр, может быть образована путем растяжения сечения вдоль h. Очевидно, построенная таким способом фигура может быть только треугольной призмой (см. рис. 7).

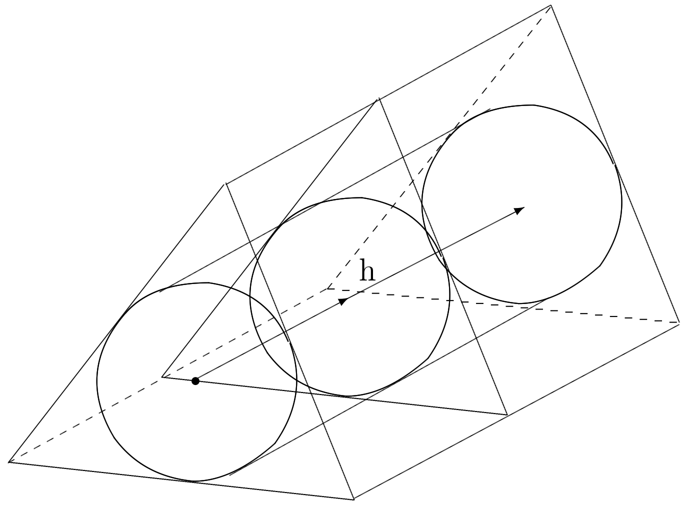


Рис. 7

Другой метод построения этой части тела G состоит из одновременного растяжения сечения вдоль h и его вращения. Этот способ приводит к более сложным и достаточно разнообразным фигурам. Такие условия позволяют утверждать, что множество, полученное из G после удаления той части, которая содержит цилиндр, может оказаться невыпуклым и тогда справедливость неравенства (16) для такого множества не доказана.

Из последних замечаний видно, что в отличие от достаточно простого доказательства неравенства (16), для обобщения неравенства (17) уже требуются более тонкие рассуждения.

Удалось получить некоторые результаты для тел с ненулевым значением функционала $\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G))$. Если рассматривать этот случай на примере многогранника, тогда такие тела содержат в себе произвольную призму высоты $2R$ ($R = \boldsymbol{\rho}(G)$) (например, см. рис. 8).

Покажем, что для таких фигур справедлива

Лемма 5.1 *Для выпуклого компакта G справедливо неравенство*

$$\mathbf{V}(G) \geq \frac{\mathbf{S}(G) + \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G))}{3}\boldsymbol{\rho}(G). \tag{18}$$

Равенство возможно в случае шара и описанного многогранника.

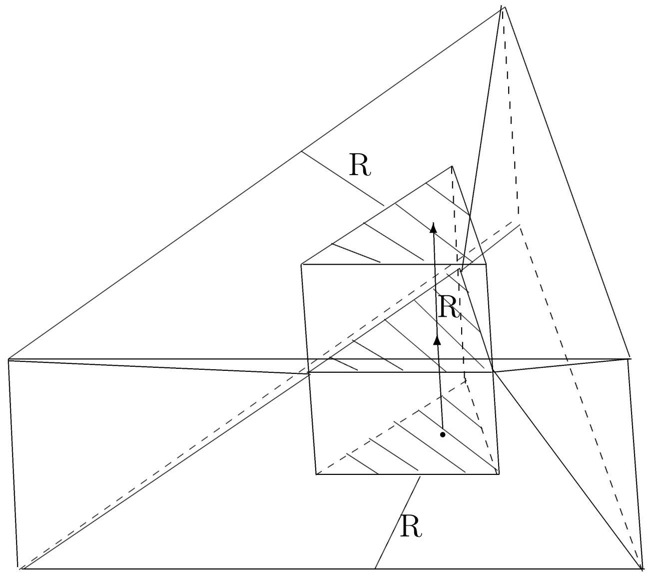


Рис. 8

Доказательство. Прежде чем доказывать лемму, отметим частный случай неравенства (18). Построим доказательство для произвольного выпуклого многогранника Q (например, рис. 9).

Далее будем использовать обозначения $R = \boldsymbol{\rho}(Q)$, $r = \rho(Q(t))$, через Q_i $(i = \overline{1, n})$ обозначим i-ую грань многогранника Q. Предположим, что шар наибольшего радиуса R с центром в точке O касается всех граней за исключением грани Q_n. Тогда объем многогранника можем представить в виде суммы пирамид с вершинами в точке O и основаниями Q_i:

$$\mathbf{V}(Q) = \frac{1}{3}(R\sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{A}(Q_i) + h\mathbf{A}(Q_n)),$$

где h это расстояние от вершины O до грани Q_n. Из очевидного неравенства $h \geq R$ следует

$$\mathbf{V}(Q) \geq \frac{1}{3}R\sum_{i=1}^{n}\mathbf{A}(Q_i) = \frac{1}{3}\mathbf{S}(Q)R.$$

Из построенного доказательства видно, что равенство выполняется только в случае описанного многогранника и шара.

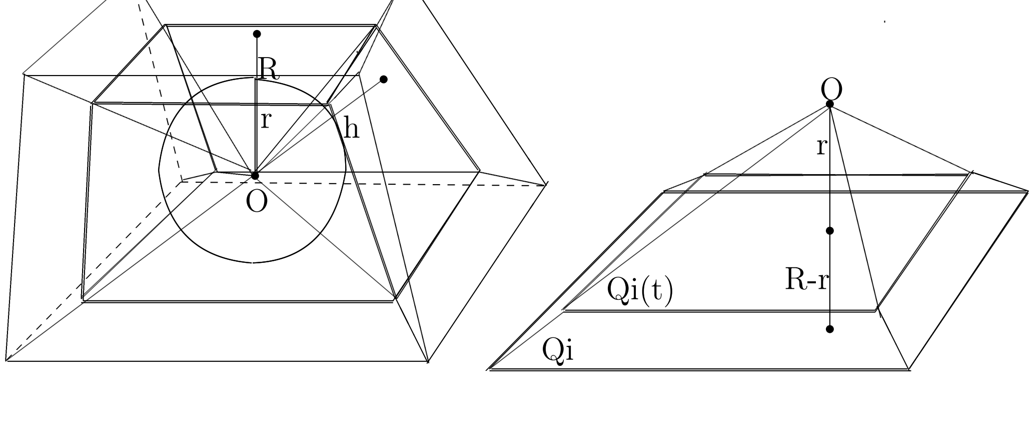


Рис. 9

Перейдем к доказательству основного неравенства.

Далее, зафиксируем значение $t = R - r$ $(0 \le t \le R)$ и соответствующее ему множество уровня $Q(t)$. Тогда многогранник Q можем разбить на усеченные пирамиды с основаниями Q_i и $Q_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$ и пирамиды с вершинами в точке O и основаниями $Q_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$ (см. рис. 9), таким образом найдем объем многогранника Q:

$$\mathbf{V}(Q) = \frac{1}{3}(R-r)\sum_{i=1}^{n}\Big(\mathbf{A}(Q_i) + \sqrt{\mathbf{A}(Q_i)\mathbf{A}(Q_i(t))} + \mathbf{A}(Q_i(t))\Big) +$$

$$+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n-1}(r\mathbf{A}(Q_i(t)) + (h-(R-r))\mathbf{A}(Q_n(t))).$$

Как и ранее, учтем неравенство $h \ge R$, тогда получим оценку

$$\mathbf{V}(Q) \ge \frac{1}{3}(R-r)\sum_{i=1}^{n}\Big(\mathbf{A}(Q_i) + \sqrt{\mathbf{A}(Q_i)\mathbf{A}(Q_i(t))} + \mathbf{A}(Q_i(t))\Big) + \frac{1}{3}r\sum_{i=1}^{n}\mathbf{A}(Q_i(t)) =$$

$$= \frac{1}{3}(R-r)\sum_{i=1}^{n}\Big(\mathbf{A}(Q_i) + \sqrt{\mathbf{A}(Q_i)\mathbf{A}(Q_i(t))}\Big) + \frac{1}{3}R\sum_{i=1}^{n}\mathbf{A}(Q_i(t)) =$$

$$= \frac{1}{3}\left((R-r)\mathbf{S}(Q) + R\mathbf{S}(Q(t)) + (R-r)\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\mathbf{A}(Q_i)\mathbf{A}(Q_i(t))}\right).$$

Так как последнее неравенство справедливо для $0 \le t \le R$, тогда при $t \to R$ будем иметь

$$\mathbf{V}(Q) \ge \lim_{t\to R}\frac{1}{3}\left((R-r)\mathbf{S}(Q) + R\mathbf{S}(Q(t)) + (R-r)\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\mathbf{A}(Q_i)\mathbf{A}(Q_i(t))}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}R\left(\mathbf{S}(Q) + \mathbf{S}(Q(R)) + \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\mathbf{A}(Q_i)\mathbf{A}(Q_i(R))}\right) \ge \frac{1}{3}R\left(\mathbf{S}(Q) + \mathbf{S}(Q(R))\right).$$

Последняя оценка эквивалентна неравенству из леммы.

В этом случае равенство возможно при $h = R$, т. е. в случае описанного многогранника и шара.

$\square$

Лемма 5.1 позволяет получить следующую оценку

Лемма 5.2 *Для выпуклого компакта G конечного объема справедливо неравенство*

$$\frac{\mathbf{V}(t)}{(\boldsymbol{\rho}(G)-t)^3} \ge \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G))\left(\frac{1}{(\boldsymbol{\rho}(G)-t)^2} - \frac{1}{\boldsymbol{\rho}^2(G)}\right) + \frac{\mathbf{V}(G)}{\boldsymbol{\rho}^3(G)}.$$

Равенство возможно в случае шара и описанного многогранника.

Доказательство. Так как тело G выпуклое, то все множества $G(t)$ $(0 \le t < \boldsymbol{\rho}(G))$ также выпуклые, поэтому к $G(t)$ можем применить неравенство из леммы 5.1, имеем

$$V(t) \ge \frac{S(t) + \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G))}{3}\boldsymbol{\rho}(G(t)). \tag{19}$$

Как и ранее, воспользуемся выражениями (16), тогда неравенство (19) для множества $G(t)$ примет вид

$$V(t) \ge \frac{-V'(t) + \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G))}{3}(\boldsymbol{\rho}(G) - t).$$

Последнее неравенство эквивалентно

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{V(t)}{(\boldsymbol{\rho}(G)-t)^3}\right] \ge \frac{d}{dt}\left[\frac{\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G))}{(\boldsymbol{\rho}(G)-t)^2}\right].$$

Проинтегрируем обе части последнего неравенства по $t \in [0; t_1]$, тогда получим

$$\frac{V(t)}{(\boldsymbol{\rho}(G)-t)^3} - \frac{\mathbf{V}(G)}{\boldsymbol{\rho}^3(G)} \ge \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G))\left(\frac{1}{(\boldsymbol{\rho}(G)-t)^2} - \frac{1}{\boldsymbol{\rho}^2(G)}\right).$$

Таким образом, получили неравенство эквивалентное требуемому неравенству. Равенство в лемме достигается в случае равенства в (18).

□

Теорема 5.2 *Пусть G — выпуклое тело конечного объема и $p \ge 0$. Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$\mathbf{I}_p(G) \ge \frac{\boldsymbol{\rho}(G)^p}{(p+1)(p+2)(p+3)}(6\mathbf{V}(G) + p(p+5)\boldsymbol{\rho}(G)\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G))).$$

Равенство возможно в случае шара и описанного многогранника.

Доказательство. Воспользуемся представлением (5) для $\mathbf{I}_p(G)$ и оценкой из леммы 5.2, тогда получим

$$\mathbf{I}_p(G) = p\int_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} t^{p-1}V(t)dt \ge p\int_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} t^{p-1}\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G))\left(\frac{1}{(\boldsymbol{\rho}(G)-t)^2} - \frac{1}{\boldsymbol{\rho}^2(G)}\right)(\boldsymbol{\rho}(G)-t)^3dt+$$

$$+p\int_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} t^{p-1}\frac{\mathbf{V}(G)}{\boldsymbol{\rho}^3(G)})(\boldsymbol{\rho}(G)-t)^3dt = \frac{\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G))\boldsymbol{\rho}(G)^{p+1}}{p+1} + \frac{6\boldsymbol{\rho}(G)^p\left(\mathbf{V}(G) - \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G))\boldsymbol{\rho}(G)\right)}{(p+1)(p+2)(p+3)}.$$

С учетом некоторых упрощений последнее неравенство совпадает с неравенством из теоремы. Осталось заметить, что случаи равенства в теореме совпадают со случаями равенства в лемме 5.2.

□

В дальнейшем при доказательстве основных результатов главную роль играет функционал

$$\mathbf{i}_1(t) := \mathbf{I}_1(G(t)),$$

где $0 \le t \le \boldsymbol{\rho}(G)$. Следующая лемма позволяет оценить введенный функционал $\mathbf{i}_1(t)$.

Лемма 5.3 *Пусть G — выпуклое тело конечного объема и $\mathbf{I}_1(G) < +\infty$. Тогда для $0 \leq t \leq \boldsymbol{\rho}(G)$ справедливы следующие неравенства:*

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G))\left(\frac{1}{(\boldsymbol{\rho}(G)-t)^2}-\frac{1}{\boldsymbol{\rho}(G)^2}\right)+\frac{\mathbf{I}_1(G)}{\boldsymbol{\rho}(G)^4} \leq \frac{\mathbf{i}_1(t)}{(\boldsymbol{\rho}(G)-t)^2} \leq \frac{\pi}{3}t(t-2\boldsymbol{\rho}(G))+\frac{\mathbf{I}_1(G)}{\boldsymbol{\rho}(G)^2}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный функционал $\mathbf{i}_1(t)$, где $0 \leq t \leq \boldsymbol{\rho}(G)$. Зафиксируем значение $t > 0$ и соответствующее ему множество уровня $G(t)$, тогда

$$\mathbf{i}_1(t) := \mathbf{I}_1(G(t)) = \int_0^{V(t)} t^*(V^*)dV^* = \int_0^{\boldsymbol{\rho}(G(t))} V^*(t^*)dt^*,$$

используя очевидное равенство $V^*(t^*) = V(t+t^*)$, окончательно получим

$$\mathbf{i}_1(t) = \int_0^{\boldsymbol{\rho}(G(t))} V(t^*+t)dt^* = \int_t^{\boldsymbol{\rho}(G(t))+t} V(\lambda)d(\lambda) = \int_t^{\boldsymbol{\rho}(G)} V(\lambda)d(\lambda).$$

Таким образом, имеем

$$\frac{di_1(t)}{dt} = -V(t). \tag{20}$$

Используя первое неравенство из теоремы 5.1, для $\mathbf{i}_1(t)$ получим оценку

$$\mathbf{i}_1(t) \leq \frac{V(t)\boldsymbol{\rho}(G(t))}{2} - \frac{\pi\boldsymbol{\rho}(G(t))^4}{3}. \tag{21}$$

Применяя (20) и $\boldsymbol{\rho}(G(t)) = \boldsymbol{\rho}(G) - t$ к (21), неравенство примет вид

$$\mathbf{i}_1(t) \leq \frac{-\mathbf{i}_1'(t)(\boldsymbol{\rho}(G)-t)}{2} - \frac{\pi(\boldsymbol{\rho}(G)-t)^4}{3}.$$

Последнее неравенство эквивалентно

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\mathbf{i}_1(t)}{(\boldsymbol{\rho}(G)-t)^2}\right] \leq -\frac{2\pi}{3}(\boldsymbol{\rho}(G)-t).$$

Проинтегрируем обе части неравенства по $t \in [0; t_1]$, тогда получим:

$$\frac{\mathbf{i}_1(t)}{(\boldsymbol{\rho}(G)-t)^2} - \frac{\mathbf{I}_1(G)}{\boldsymbol{\rho}(G)^2} \leq \frac{\pi}{3}\left((\boldsymbol{\rho}(G)-t)^2 - \boldsymbol{\rho}^2(G)\right). \tag{22}$$

С помощью очевидных упрощений неравенство (22) можно привести к виду правой части требуемого неравенства.

Для вывода левой части неравенства леммы воспользуемся теоремой 5.2, тогда при $p = 1$ для $\mathbf{i}_1(t)$ имеем оценку

$$\mathbf{i}_1(t) \geq \frac{V(t) + \boldsymbol{\rho}(G(t))\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G))}{4}\rho(G(t)). \tag{23}$$

Как и ранее в доказательстве воспользуемся выражениями (20) и $\rho(G(t)) = \boldsymbol{\rho}(G) - t$, тогда (23) примет вид

$$\mathbf{i}_1(t) \geq \frac{-\mathbf{i}_1'(t) + (\boldsymbol{\rho}(G)-t)\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G))}{4}(\boldsymbol{\rho}(G)-t).$$

Последнее неравенство эквивалентно

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\mathbf{i}_1(t)}{(\boldsymbol{\rho}(\Omega)-t)^4}\right] \leq \frac{d}{dt}\left[\frac{S(\boldsymbol{\rho}(\Omega))}{(\boldsymbol{\rho}(\Omega)-t)^2}\right].$$

Проинтегрируем обе части полученного неравенства по $t \in [0; t_1]$, отсюда

$$\frac{\mathbf{i}_1(t)}{(\boldsymbol{\rho}(G)-t)^4} - \frac{\mathbf{I}_1(G)}{\boldsymbol{\rho}(G)^4} \geq \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G))\left(\frac{1}{(\boldsymbol{\rho}(G)-t)^2} - \frac{1}{(\boldsymbol{\rho}(G))^2}\right),$$

что дает нам левую оценку из неравенства леммы.

□

Выразим $\mathbf{I}_p(G)$ через вспомогательный функционал $\mathbf{i}_1(t)$, для этого используем его как новую переменную в (5) и после интегрирования по частям, получим новое представление для $\mathbf{I}_p(G)$:

$$\mathbf{I}_p(G) = p\int_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} t^{p-1}V(t)\,dt = p\int_0^{\mathbf{I}_1(G)} t^{p-1}(\mathbf{i}_1)\,d\mathbf{i}_1 = p(p-1)\int_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} t^{p-2}\mathbf{i}_1(t)\,dt. \tag{24}$$

Тогда с помощью леммы 5.3 и (24) получим двусторонние оценки для функционала $\mathbf{I}_p(G)$ в терминах $\mathbf{I}_1(G)$ и других геометрических функционалов. А именно

Теорема 5.3 *Пусть G — выпуклое тело конечного объема и $p \geq 1$, $\mathbf{I}_1(G) < +\infty$. Тогда справедливы следующие неравенства:*

$$\mathbf{I}_p(G) \leq \frac{2\boldsymbol{\rho}(G)^{p-1}}{(p+1)(p+2)(p+3)}\left((p+2)(p+3)\mathbf{I}_1(G) - \frac{\pi(p-1)(p+6)\boldsymbol{\rho}(G)^4}{3}\right)$$

и

$$\mathbf{I}_p(G) \geq \frac{2\boldsymbol{\rho}(G)^{p-1}}{(p+1)(p+2)(p+3)}\left(12\mathbf{I}_1(G) + (p-1)(p+6)\boldsymbol{\rho}(G)^2\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G))\right).$$

Равенство в первом неравенстве возможно в случае шара. Во втором неравенстве равенство возможно в случае шара и описанного многогранника.

Доказательство. Воспользуемся представлением (24) для $\mathbf{I}_p(G)$ и верхней оценкой из леммы 5.3, откуда

$$\mathbf{I}_p(G) = p(p-1)\int_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} t^{p-2}\mathbf{i}_1(t)dt \leq p\int_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} t^{p-1}\left(\frac{\pi}{3}t(t-2\boldsymbol{\rho}(G)) + \frac{\mathbf{I}_1(G)}{\boldsymbol{\rho}(G)^2}\right)(\boldsymbol{\rho}(G)-t)^2dt =$$

$$= \frac{2\mathbf{I}_1(G)\boldsymbol{\rho}(G)^{p-1}}{p+1} - \frac{2\pi(p-1)(p+6)\boldsymbol{\rho}(G)^{p+3}}{3(p+1)(p+2)(p+3)}.$$

Последнюю оценку несложно представить в виде первого неравенства теоремы.

Для доказательства второго неравенства используем нижнюю оценку леммы 5.3, тогда

$$\mathbf{I}_p(G) = p\int_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} t^{p-1}V(t)dt \geq p\int_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} t^{p-1}\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G))\left(\frac{1}{(\boldsymbol{\rho}(G)-t)^2} - \frac{1}{\boldsymbol{\rho}(G)^2}\right)(\boldsymbol{\rho}(G)-t)^2dt +$$

$$+p\int_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} t^{p-1}\frac{\mathbf{I}_1(G)}{\boldsymbol{\rho}(G)^4}(\boldsymbol{\rho}(G)-t)^2dt =$$

$$= 2\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G))\boldsymbol{\rho}(G)^{p+1}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{12}{p(p+1)(p+2)(p+3)}\right) + \frac{24\mathbf{I}_1(G)\boldsymbol{\rho}(G)^{p-1}}{(p+1)(p+2)(p+3)}.$$

Таким образом, получили неравенство эквивалентное второму неравенству теоремы.

□

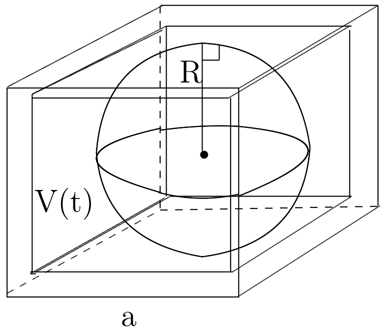
6 Примеры.

Приведем несколько примеров вычисления рассмотренных функционалов и случаи строгих неравенств в доказанных теоремах параграфа 5.

Пример 1. Рассмотрим куб G со сторонами длины a. Тогда для $p \geq 0$ справедливы:

$$\mathbf{I}_p(G) = \frac{6a^{p+3}}{2^p(p+1)(p+2)(p+3)}, \quad \mathbf{I}_1(G) = \frac{a^4}{8},$$

$$\mathbf{V}(G) = a^3, \quad \boldsymbol{\rho}(G) = \frac{a}{2}, \quad \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G)) = 0.$$



Покажем некоторые выкладки для вычислении функционала $\mathbf{I}_p(G)$, $p \geq 0$:

$$\mathbf{I}_p(G) = p\int_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} t^{p-1}V(t)\,dt = p\int_0^{\frac{a}{2}} t^{p-1}(a-2t)^3\,dt = \frac{3a^{p-1}}{2^{p-1}(p+1)(p+2)(p+3)}.$$

Согласно теореме 5.1 неравенства для куба обращаются в строгие неравенства:

$$\mathbf{I}_p(G) < C_1\left(\frac{\mathbf{V}(G)\boldsymbol{\rho}(G)^p}{p+1} - \frac{4}{3}\frac{\pi\boldsymbol{\rho}(G)^{p+3}p(p+5)}{(p+1)(p+2)(p+3)}\right) \tag{25}$$

и

$$\mathbf{I}_p(G) > C_2\left(\frac{\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G))\boldsymbol{\rho}(G)^{p+1}}{p+1} + \frac{8\pi\boldsymbol{\rho}(G)^{p+3}}{(p+1)(p+2)(p+3)}\right), \tag{26}$$

где C_1 и C_2 некоторые константы. Чтобы найти эти константы достаточно вычислить все функционалы, входящие в данные неравенства. Для этого перепишем неравенства (25), (26) в более удобной форме

$$\mathbf{I}_p(G) < C_1\mathbf{J}_1(G),$$

$$\mathbf{I}_p(G) > C_2\mathbf{J}_2(G).$$

Так как функционал $\mathbf{I}_p(G)$ для куба был подсчитан нами ранее, то перейдем к вычислению оставшихся величин, а именно

$$\mathbf{J}_1(G) = \frac{a^{p+3}((6-\pi)(p^2+5p)+36)}{6\cdot 2^p(p+1)(p+2)(p+3)},$$

$$\mathbf{J}_2(G) = \frac{\pi a^{p+3}}{2^p(p+1)(p+2)(p+3)}.$$

Теперь нетрудно получить необходимые константы

$$C_1 = \frac{36}{(6-\pi)p(p+5)+36} < 1,$$

$$C_2 = \frac{6}{\pi} > 1.$$

Таким образом, для куба установлены оценки (25) и (26) с найденными константами.

Перейдем к теореме 5.2, тогда в случае куба справедливо неравенство

$$\mathbf{I}_p(G) \geq C_3 \left(\frac{\boldsymbol{\rho}(G)^p}{(p+1)(p+2)(p+3)} (6\mathbf{V}(G) + p(p+5)\boldsymbol{\rho}(G)\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G))) \right) \tag{27}$$

Как и в предыдущем случае приведем (27) к более простому виду

$$\mathbf{I}_p(G) \geq C_3 \mathbf{J}_3(G),$$

где C_3 — неизвестная константа. Прямым счетом получаем

$$\mathbf{J}_3(G) = \frac{6a^{p+3}}{2^p(p+1)(p+2)(p+3)} = \mathbf{I}_p(\mathbf{G}).$$

Таким образом, имеем $C_3 = 1$, т.е. куб является экстремалью в неравенстве (27), как и утверждается в условиях теоремы 5.2.

Установим справедливость строгих неравенств из теоремы 5.3 для куба

$$\mathbf{I}_p(G) < C_4 \left(\frac{2\mathbf{I}_1(G)\boldsymbol{\rho}(G)^{p-1}}{p+1} - \frac{2\pi(p-1)(p+6)\boldsymbol{\rho}(G)^{p+3}}{3(p+1)(p+2)(p+3)} \right). \tag{28}$$

Отсюда тем же способом, что и выше несложно вычислить константу

$$C_4 = \frac{72}{(6-\pi)p(p+5) + 6(6+\pi)} \leq 1.$$

Таким образом неравенство (28) для куба доказано.

Из обратного неравенства теоремы 5.3 следует

$$\mathbf{I}_p(G) \geq C_5 \left(\frac{2\boldsymbol{\rho}(G)^{p-1}}{(p+1)(p+2)(p+3)} ((p-1)(p+6)\boldsymbol{\rho}(G)^2\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G)) + 12\mathbf{I}_1(G)) \right).$$

Нетрудно проверить, что $C_5 = 1$. Так как куб является описанным многогранником, то из условий теоремы 5.3 можем сделать вывод, что константа найдена верно.

Пример 2. Рассмотрим параллелепипед G со сторонами a, b, c $(a < b \leq c)$ (рис. 2). Тогда для $p \geq 0$ справедливы:

$$\mathbf{I}_p(G) = \frac{a^{p+1}(b(p+3)(2c + (c-a)p) + ap(a - 3c + (a-c)p))}{2^p(p+1)(p+2)(p+3)}$$

$$\mathbf{I}_1(G) = \frac{a^2(2b(3c-a) + a(a-c))}{24},$$

$$\mathbf{V}(G) = abc, \quad \boldsymbol{\rho}(G) = \frac{a}{2}, \quad \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}(G)) = (b-a)(c-a).$$

Далее, все введенные обозначения в примере 1 имеют тот же смысл и для параллелепипеда. Результаты для всех констант представим в виде таблиц.

Таблица 1: значения константы $C_1 < 1$ при $p \geq 1$ для первого неравенства из теоремы 1.

$\mathbf{C_1}$	**p**	1	3	5	7	∞
c/b						
1		0.75794	0.558484	0.475179	0.430356	0.287654
2		0.796912	0.633152	0.564222	0.526613	0.401263
3		0.809323	0.65624	0.591496	0.555975	0.435677
4		0.815426	0.667474	0.604723	0.570193	0.452302
5		0.819055	0.674119	0.612532	0.578582	0.462098
6		0.819055	0.678509	0.617687	0.584116	0.468556
7		0.823173	0.681626	0.621344	0.588041	0.473133
10		0.826241	0.687196	0.627874	0.595048	0.4813
100		0.832628	0.698732	0.641375	0.609522	0.498152
∞		$0.8(3) = 5/6$	0.7	0.642857=9/14	0.6(1)=11/8	0.5

Таблица 2: значения константы $C_2 > 1$ при $p \geq 1$ для второго неравенства из теоремы 1.

$\mathbf{C_2}$	**p**	1	3	5	7	∞
c/b						
1		3.71926	3.30732	3.01847	2.825	2
2		3.50021	2.99118	2.73119	2.57707	2
3		3.43979	2.91778	2.66869	2.52475	2
4		3.41149	2.88511	2.64134	2.50203	2
5		3.39508	2.86662	2.62599	2.48933	2
6		3.38436	2.85474	2.61617	2.48122	2
7		3.37681	2.84645	2.60935	2.47559	2
10		3.36345	2.83194	2.59744	2.46579	2
100		3.33628	2.80308	2.57393	2.44649	2
∞		$3.(3) = 10/3$	2.8	2.57143=18/7	2.(4)=22/9	2

Таблица 3: значения константы $C_3 > 1$ при $p \geq 1$ для неравенства из теоремы 2.

$\mathbf{C_3}$	**p**	1	3	5	7	∞
c/b						
1		1.25926	1.66667	1.91837	2.06061	2
2		1.29825	1.71429	1.93496	2.04598	2
3		1.31034	1.72727	1.93909	2.04255	2
4		1.31624	1.73333	1.94096	2.04103	2
5		1.31973	1.73684	1.94203	2.04016	2
6		1.32203	1.73913	1.94272	2.0396	2
7		1.32367	1.74074	1.9432	2.03922	2
10		1.3266	1.74359	1.94406	2.03854	2
100		1.33267	1.74937	1.94576	2.03718	2
∞		$1.(3) = 4/3$	1.75	1.94595=72/37	2.03704=55/27	2

Таблица 4: значения константы $C_4 < 1$ при $p \geq 1$ для первого неравенства из теоремы 3.

$\mathbf{C_4}$	**p**	2	3	5	7	∞
c/b						
1		0.842919	0.747313	0.638815	0.57976	0.388873
2		0.874307	0.798724	0.712972	0.665944	0.508055
3		0.883422	0.81345	0.733937	0.690168	0.541231
4		0.887764	0.820432	0.743834	0.701581	0.556814
5		0.890303	0.824506	0.749597	0.708221	0.565865
6		0.89197	0.827176	0.753368	0.712565	0.571779
7		0.893147	0.829061	0.756029	0.715627	0.575947
8		0.894024	0.830463	0.758006	0.717902	0.579042
9		0.894701	0.831546	0.759533	0.719659	0.581431
10		0.895241	0.832409	0.760749	0.721057	0.583331
100		0.899532	0.839254	0.770381	0.73213	0.598368
∞		0.9	1.75	0.771429=27/35	0.7(3)=11/15	0.6

Таблица 5: значения константы $C_5 \geq 1$ при $p \geq 1$ для второго неравенства из теоремы 3.

$\mathbf{C_5}$	**p**	2	3	5	7	∞
c/b						
1		1.09524	1.15385	1.20513	1.21429	1
2		1.08163	1.125	1.15534	1.15584	1
3		1.07792	1.11765	1.14371	1.14286	1
4		1.07619	1.11429	1.13853	1.13714	1
5		1.07519	1.11236	1.13559	1.13393	1
6		1.07453	1.11111	1.1337	1.13187	1
7		1.07407	1.11024	1.13239	1.13043	1
8		1.07373	1.10959	1.13142	1.12938	1
9		1.07347	1.10909	1.13067	1.12857	1
10		1.07326	1.1087	1.13008	1.12793	1
100		1.07161	1.1056	1.12549	1.12298	1
∞		1.07143=15/14	1.10526=21/19	1.125	1.12245=55/49	1

Список литературы

[1] Авхадиев Ф. Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана*, Матем. сборник 189 (12), с. 3–12 (1998).

[2] Avkhadiev F.G., Salakhudinov R.G. *Isoperimetric inequalities for conformal moments of plane domains*, J. of Inequalities and Appl. 7 (4), 593–601 (2002).

[3] Banuelos R., van den Berg M., Carroll T. *Torsional rigidity and expected lifetime of Brownian motion* // J. London Math. Soc.– V 66. – P. 499–512 (2002).

[4] Хадвигер Г. *Лекции об объеме, площади поверхности и изометрии* (Наука, М., 1966)

[5] Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А. *Геометрические неравенства* (Наука, Ленинград, 1980).

[6] Салахудинов Р. Г. *Изопериметрические свойства граничных евклидовых моментов односвязной области.* Известия вузов. Математика 8, с. 66–79 (2013)

[7] Salakhudinov R. G. *Refined inequalities for euclidean moments of a domain with respect to its boudary*, SIAM J. Math. Anal. 44 (4), 2949–2961 (2012).