ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 9 (472)

УДК 512.542

*ГО ВЭНЬБИНЬ*

# ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ ТЕОРИИ СТУПЕНЧАТЫХ ФОРМАЦИЙ

Все рассматриваемые здесь группы обладают конечными композиционными рядами. Напомним, что класс $\mathfrak{F}$ называется формацией [1], если $\mathfrak{F}$ — гомоморф (т. е. каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ снова принадлежит $\mathfrak{F}$) и всегда из $G/N \in \mathfrak{F}$ и $G/R \in \mathfrak{F}$ следует, что $G/N \cap R \in \mathfrak{F}$. В приложениях теории формаций особую роль играют так называемые ступенчатые формации, введенные впервые Л.А. Шеметковым в [2] (см. также [3], гл. 1).

Пусть $f : \mathfrak{G} \mapsto \{\text{классы групп}\}$ — отображение класса всех групп $\mathfrak{G}$ в множество всех классов групп, причем $f(1) = \mathfrak{G}$ и из $G_1 \cong G_2$ всегда следует, что $f(G_1) = f(G_2)$. Тогда $f$ называют экраном [2], если $f(G)$ — формация и для любой группы $G$ и любой ее нормальной подгруппы $N$ имеет место $f(G) \subseteq f(N) \cap f(G/N)$.

Если $f$ — некоторый экран, то символом $\langle f \rangle$ обозначают класс всех таких групп $G$, у которых для всех их главных факторов $H/K$ имеет место $G/C_G(H/K) \in f(H/K)$. Формация $\mathfrak{F}$ называется ступенчатой [2], если $\mathfrak{F} = \langle f \rangle$ для некоторого экрана $f$.

Экран $f$ называется композиционным [2], если для любой группы $G \neq 1$ имеет место $f(G) = \bigcap f(H/K)$, где $H/K$ пробегает все композиционные факторы группы $G$. Формация $\mathfrak{F}$ называется композиционной, если $\mathfrak{F} = \langle f \rangle$ для некоторого композиционного экрана $f$.

Композиционные формации особенно полезны с точки зрения приложений (см. [3], [4]) и поэтому весьма актуален вопрос о том, при каких условиях формация является композиционной. Согласно знаменитой теореме Бэра ([5], с. 373) непустая формация конечных групп $\mathfrak{F}$ является композиционной тогда и только тогда, когда конечная группа $G \in \mathfrak{F}$ всякий раз, когда $G/\Phi(R(G)) \in \mathfrak{F}$ (здесь $R(G)$ — радикал группы $G$, т. е. произведение всех ее нормальных разрешимых подгрупп).

На Гомельском алгебраическом семинаре в 1995 году О.В. Мельников высказал предположение, что композиционной является и всякая ступенчатая формация конечных групп. Частичным подтверждением этому служат многие известные примеры ступенчатых формаций, а также результаты в [6] по проблеме О.В. Мельникова.

В данной статье построен пример, показывающий, что в общем случае ответ на вопрос О.В. Мельникова отрицателен. Но прежде необходимо проанализировать и упростить само определение ступенчатой формации.

Пусть функция $f$ сопоставляет каждой элементарной группе $G$ некоторую формацию $f(G)$. Будем говорить, что $f$ — $e$-функция, если $f(H) = f(T)$ для любых двух элементарных групп $H$ и $T$, где $H \cong T$. Пусть $EF(f)$ — класс всех таких групп $G$, что для каждого главного фактора $H/K$ группы $G$ имеет место $G/C_G(H/K) \in f(H/K)$. По определению все единичные группы принадлежат классу $EF(f)$.

**Предложение 1.** *Для любой $e$-функции $f$ класс $EF(f)$ является формацией.*

**Доказательство.** Пусть $G \in EF(f)$ и $N$ — произвольная нормальная в $G$ подгруппа. Пусть $(H/N)/(K/N)$ — произвольный главный фактор группы $G/N$. Тогда $H/K$ — главный фактор группы $G$ и поэтому согласно предположению о $G$ имеем $G/C_G(H/K) \in f(H/K)$. Но ввиду леммы 2.8 из [4] $C_{G/N}((H/N)/(K/N)) = C_G(H/K)/N$. Значит, $(G/N)/C_{G/N}((H/N)/(K/N)) = (G/N)/(C_G(H/K)/N) \cong G/C_G(H/K) \in f(H/K) = f((H/N)/(K/N))$. Следовательно, $G/N \in EF(f)$, т. е. класс $EF(f)$ — гомоморф.

Пусть теперь $G/N_1 \in EF(f)$ и $G/N_2 \in EF(f)$. Покажем, что $G/N_1 \cap N_2 \in EF(f)$. Пусть $L = N_1 \cap N_2$ и $(H/L)/(K/L)$ — произвольный главный фактор группы $G/N$. Тогда $H/K$ — главный фактор группы $G$. Допустим, что $HN_1 = KN_1$. Тогда $H = H \cap KN_1 = K(H \cap N_1)$. Значит, $H \cap N_1 \not\subseteq K$ и поэтому $H \cap N_1 \supset K \cap N_1$. Но фактор $H \cap N_1/K \cap N_1$ $G$-изоморфен фактору $K(H \cap N_1)/K$. Следовательно, $K(H \cap N_1)/K = H/K$. Отсюда $(H \cap N_1)/(K \cap N_1)$ — главный фактор группы $G$, $G$-изоморфный фактору $H/K$. В свою очередь фактор $((H \cap N_1)N_2)/((K \cap N_1)N_2)$ $G$-изоморфен фактору $(H \cap N_1)/(K \cap N_1)(H \cap N_1 \cap N_2) = (H \cap N_1)/((K \cap N_1)(N_1 \cap N_2)) = (H \cap N_1)/(K \cap N_1)$. Значит, $((H \cap N_1)N_2)/((K \cap N_1)N_2)$ — главный фактор группы $G$, $G$-изоморфный фактору $H/K$. Заметим, наконец, что фактор $((H \cap N_1)N_2)/((K \cap N_1)N_2)$ $G$-изоморфен фактору

$$(((H \cap N_1)N_2)/N_2)/(((K \cap N_1)N_2)/N_2)$$

группы $G/N_2 \in EF(f)$. Значит,

$$\begin{gathered}G/C_G(H/K) \cong (G/N_2)/(C_G(H/K)/N_2) = \\ = (G/N_2)/(C_G((H \cap N_1)N_2)/(((K \cap N_1)N_2))/N_2) = \\ = (G/N_2)/(C_{G/N_2}(((H \cap N_1)N_2)/N_2)/(((K \cap N_1)N_2)/N_2)) \in \\ \in f(((H \cap N_1)N_2)/((K \cap N_1)N_2)) = f(H/K).\end{gathered}$$

Поэтому $(G/L)/C_{G/L}((H/L)/(K/L)) = (G/L)/(C_G(H/K)/L) \cong G/C_G(H/K) \in f((H/L)/(K/L))$.

Допустим, что $HN_1 \neq KN_1$. Поскольку фактор $(HN_1)/(KN_1)$ $G$-изоморфен фактору $H/(K(H \cap N_1)) = H/K$, то, как и выше, можем убедиться, что $(G/L)/C_{G/L}((H/L)/(K/L)) \in f((H/L)/(K/L))$. Итак, $G/N_1 \cap N_2 \in EF(f)$. Таким образом, класс $EF(f)$ — формация. □

Формацию $\mathfrak{F}$ будем называть слабо ступенчатой, если $\mathfrak{F} = EF(f)$ для некоторой $e$-функции $f$. Пусть $f$ — некоторая $e$-функция. Будем говорить, что $f$ — (примарно) однородная $e$-функция, если $f(H) = f(T)$ для любых двух элементарных (абелевых) групп $H$ и $T$ с изоморфными композиционными факторами.

**Теорема.** *Формация $\mathfrak{F}$ является композиционной в том и только том случае , когда $\mathfrak{F} = EF(f)$ для некоторой примарно однородной $e$-функции $f$.*

**Доказательство.** Пусть $\mathfrak{F} = EF(f)$ для некоторой примарно однородной $e$-функции $f$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ — композиционная формация. Пусть $\overline{f}$ — такой экран, что $\overline{f}(H) = f(H)$, если $H$ — абелева элементарная группа, $\overline{f}(H) = \mathfrak{F}$, если $H$ — неабелева элементарная группа, и $\overline{f}(G) = \bigcap \overline{f}(H/K)$, где $H/K$ пробегает все композиционные факторы группы $G$, и пусть $\mathfrak{M} = \langle \overline{f} \rangle$. Покажем, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} = EF(f)$.

Допустим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq EF(f)$. Пусть $G$ — группа с минимальной длиной композиционного ряда из $\mathfrak{M} \setminus EF(f)$. Поскольку согласно предложению 1 класс $EF(f)$ является формацией, то группа $G$ обладает единственной минимальной нормальной подгруппой $R$ и $R = G^{EF(f)}$. Допустим, что $R$ — неабелева группа. Тогда $C_G(R) = 1$ и

$$G \cong G/C_G(R) \in \overline{f}(R) = \mathfrak{F} = EF(f).$$

Полученное противоречие показывает, что $R$ — абелева группа. Значит, $\overline{f}(R) = f(R)$ и $G/C_G(R) \in f(R)$. Но $G/R \in EF(f)$. Таким образом, $G \in EF(f)$. Вновь полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{M} \subseteq EF(f)$. Допустим, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{M}$. Пусть $G$ — группа с минимальной длиной композиционного ряда из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}$, $R = G^{\mathfrak{M}}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы $G$. Допустим, что $R$ — неабелева группа. Тогда

$$G \cong C/C_G(R) \in \mathfrak{F} = \overline{f}(R).$$

Поскольку $G/R \in \langle \overline{f} \rangle$, то $G \in \mathfrak{M} = \langle \overline{f} \rangle$. Полученное противоречие показывает, что $R$ — абелева группа, и тогда $G/C_G(R) \in f(R) = \overline{f}(R)$, т.е. $G \in \langle \overline{f} \rangle$. Вновь полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$ — композиционная формация.

Если же $\mathfrak{F}$ — композиционная формация и $\mathfrak{F} = \langle f \rangle$, где $f$ — композиционный экран, то, очевидно, $\mathfrak{F} = EF(\overline{f})$, где $\overline{f}$ — такая $e$-функция, что $\overline{f}(H) = f(H)$ для любой элементарной группы $H$. Понятно, что $\overline{f}$ — примарно однородная $e$-функция. $\square$

Многочисленные примеры слабо ступенчатых формаций можно найти среди классов групп, введенных В.А. Ведерниковым в [7]. Здесь опишем общий способ построения слабо ступенчатых формаций.

Если $H = A_1 \times \cdots \times A_t$, где $A_1 \cong A_2 \cong \cdots \cong A_t \cong A$, $A$ — простая группа, то число $t$ будем называть рангом элементарной группы $H$. Пусть функция $R$ сопоставляет каждой простой группе $A$ некоторую (возможно пустую) систему натуральных чисел $R(A)$. Такую функцию будем называть ранговой функцией.

Если главный фактор $H/K$ группы $G$ имеет вид $H/K = A_1 \times \cdots \times A_t$, где $A_1 \cong A_2 \cong \cdots \cong A_t \cong A$, $A$ — простая группа, то будем говорить, что $H/K$ — главный $A$-фактор группы $G$.

Каждой ранговой функции $R$ сопоставим класс $\mathfrak{F}(R) = (G \mid$ ранг каждого главного $A$-фактора группы $G$ принадлежит $R(A))$. Согласно определению класса $\mathfrak{F}(R)$ все единичные группы принадлежат $\mathfrak{F}(R)$. Таким образом, для любой ранговой функции $R$ класс $\mathfrak{F}(R)$ непуст. Более того, справедливы следующие предложения.

**Предложение 2.** *Для любой ранговой функции $R$ класс $\mathfrak{F}(R)$ является слабо ступенчатой формацией.*

**Доказательство.** Пусть $G \in \mathfrak{F}(R)$ и $N$ — нормальная подгруппа группы $G$. Пусть $(H/N)/(K/N)$ — произвольный главный фактор группы $G/N$. Тогда

$$(H/N)/(K/N) \cong H/K \cong A_1 \times \cdots \times A_t,$$

где $A_1 \cong A_2 \cong \cdots \cong A_t \cong A$, $A$ — простая группа. Так как по условию $G \in \mathfrak{F}(R)$, то $t \in R(A)$, поэтому для любого $A$-главного фактора $(H/N)/(K/N)$ группы $G/N$, где $(H/N)/(K/N) = |A|^t$, имеет место $t \in R(A)$. Значит, $G/N \in \mathfrak{F}(R)$, т.е. $\mathfrak{F}(R)$ — гомоморф.

Пусть $G/N_1, G/N_2 \in \mathfrak{F}(R)$, $L = N_1 \cap N_2$ и $(H/L)/(K/L)$ — произвольный главный $A$-фактор группы $G/L$. Тогда $H/K$ — главный $A$-фактор группы $G$. Допустим, что $HN_1 = KN_1$. Тогда группа $(H/L)/(K/L)$ изоморфна главному фактору

$$(((H \cap N_1)N_2)/N_2)/(((K \cap N_1)N_2)/N_2)$$

группы $G/N_2 \in \mathfrak{F}(R)$ (см. доказательство предложения 1).

Таким образом, если $|(H/L)/(K/L)| = |A|^t$, то и $|((H \cap N_1)N_2/N_2)/((K \cap N_1)N_2/N_2)| = |A|^t$, поэтому $t \in R(A)$. Допустим теперь, что $HN_1 \neq KN_1$. Тогда поскольку фактор $HN_1/KN_1$ $G$-изоморфен фактору $H/K(H \cap N_1) = H/K$, то, как и выше, $t \in R(A)$. Итак, $\mathfrak{F}(R)$ — формация.

Покажем, что $\mathfrak{F}(R)$ — слабо ступенчатая формация. Пусть для каждой элементарной группы $T$, изоморфной некоторому главному фактору $H/K$ некоторой группы $G \in \mathfrak{F}(R)$, имеет место $f(T) = \mathfrak{G}$, где $\mathfrak{G}$ — класс всех групп, а для каждой элементарной группы $H$, не изоморфной ни одному главному фактору ни одной группы из $\mathfrak{F}(R)$, положим $f(H) = \varnothing$. Покажем, что $\mathfrak{F}(R) = EF(f)$. Предположим, что $\mathfrak{F}(R) \not\subseteq EF(f)$, и пусть $G$ — группа с минимальной длиной композиционного ряда из $\mathfrak{F}(R) \setminus EF(f)$. Поскольку по предложению 1 класс $EF(f)$ — непустая формация, то $G$ — монолитическая группа с монолитом $R = G^{EF(f)}$. Тогда, поскольку $G \in \mathfrak{F}(R)$, то $f(R) = \mathfrak{G}$, и поэтому $G/C_G(R) \in f(R)$. Но т.к. $R = G^{EF(f)}$, то $G/R \in EF(f)$. Значит, $G \in EF(f)$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F}(R) \subseteq EF(f)$. Предположим теперь, что $EF(f) \not\subseteq \mathfrak{F}(R)$, и пусть $G$ — группа с минимальной длиной композиционного ряда из $EF(f) \setminus \mathfrak{F}(R)$. Поскольку $\mathfrak{F}(R)$ — непустая формация, то $G$ — монолитическая группа и ее монолит $R = G^{\mathfrak{F}(R)}$. Так как $G \in EF(f)$, то $G/C_G(R) \in f(R)$. Значит, $f(R) \neq \varnothing$. Поэтому, если $R = A_1 \times \cdots \times A_t$, где $A_1 \cong A_2 \cong \cdots \cong A_t \cong A$, $A$ — простая группа, то по определению функции $f$ имеем $t \in R(A)$, и поэтому $G \in \mathfrak{F}(R)$. Полученное противоречие показывает, что $EF(f) \subseteq \mathfrak{F}(R)$. Отсюда $\mathfrak{F}(R) = EF(f)$ — слабо ступенчатая формация. $\square$

Назовем $e$-функцию $f$ ступенчатой, если для любой нормальной подгруппы $N$ любой элементарной группы $H$ имеет место $f(H) \subseteq f(N)$.

**Предложение 3.** *Непустая формация $\mathfrak{F}$ является ступенчатой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = EF(f)$ для некоторой ступенчатой $e$-функции $f$.*

**Доказательство.** Пусть $\mathfrak{F} = EF(f)$, где $f$ — некоторая ступенчатая $e$-функция. Пусть функция $\overline{f}$ сопоставляет каждой неэлементарной группе $G$ пустую формацию $\varnothing$, $\overline{f}(H) = f(H)$ для любой элементарной группы $H$ и $\overline{f}(1) = \mathfrak{G}$. Покажем прежде, что $\overline{f}$ — экран. Пусть $G$ — произвольная группа и $N$ — некоторая ее нетривиальная нормальная подгруппа. Тогда если $G$ — элементарная группа, то по определению функции $\overline{f}$ имеем $\overline{f}(G) = f(G)$. Понятно также, что $N$ и $G/N$ — элементарные группы. Поэтому $\overline{f}(N) = f(N)$ и $\overline{f}(G/N) = f(G/N)$. Легко видеть, что в $G$ имеется такая нормальная подгруппа $L$, что $L \cong G/N$. Значит, $\overline{f}(L) = f(L) = f(G/N)$. Следовательно, $\overline{f}(G) \subseteq \overline{f}(N) \cap \overline{f}(L) = \overline{f}(N) \cap \overline{f}(G/N)$. Предположим теперь, что $G$ — неэлементарная группа. Тогда $\overline{f}(G) = \varnothing$ и поэтому $\overline{f}(G) \subseteq f(N) \cap \overline{f}(G/N)$. Итак, $\overline{f}$ — экран.

Покажем, что $\mathfrak{F} = \langle \overline{f} \rangle$. Допустим, что $\mathfrak{F} \nsubseteq \langle \overline{f} \rangle$, и пусть $G$ — группа с наименьшей длиной композиционного ряда в $\mathfrak{F} \setminus \langle \overline{f} \rangle$. Так как класс $\langle \overline{f} \rangle$ — формация, то группа обладает единственной минимальной нормальной подгруппой $R = G^{\langle \overline{f} \rangle}$. Так как $G \in \mathfrak{F} = EF(f)$, то $G/C_G(R) \in f(R) = \overline{f}(R)$. Но $G/R \in \langle \overline{f} \rangle$. Значит, $G \in \langle \overline{f} \rangle$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F} \subseteq \langle \overline{f} \rangle$. Предположим теперь, что $\langle \overline{f} \rangle \nsubseteq \mathfrak{F}$, и пусть $G$ — группа с наименьшей длиной композиционного ряда в $\langle \overline{f} \rangle \setminus \mathfrak{F}$, а $R = G^{\mathfrak{F}}$ — минимальная нормальная подгруппа в $G$. Тогда поскольку $R$ — элементарная группа, то $\overline{f}(R) = f(R)$. Но $G \in \langle \overline{f} \rangle$ и поэтому $G/C_G(R) \in \overline{f}(R)$. Следовательно, $G/C_G(R) \in f(R)$, т. е. $G \in EF(f)$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F} = \langle \overline{f} \rangle$ — ступенчатая формация.

Если же $\mathfrak{F} = \langle f \rangle$, где $f$ — экран, то, очевидно, $\mathfrak{F} = EF(\overline{f})$, где $\overline{f}$ — такая ступенчатая $e$-функция, что $\overline{f}(H) = f(H)$ для любой элементарной группы $H$. $\square$

Пусть $A$ — простая группа, $\{H_i/K_i \mid i \in I\}$ — множество всех тех главных факторов неэлементарной и неединичной группы $G$, у которых композиционные факторы изоморфны группе $A$, $|H_i/K_i| = |A|^{n_i}$ $(i \in I)$. Тогда символом $r_A(G)$ обозначим число $\max\{n_i \mid i \in I\}$ и назовем его $A$-рангом группы $G$. Если у группы $G$ нет композиционных факторов, изоморфных группе $A$, то положим $r_A(G) = 0$. Если $A$ — группа простого порядка $p$, то $A$-ранг группы $G$ совпадает с ее $r_p$-рангом в обычном смысле ([8], с. 685). Символом $r(G)$ обозначим число $\max\{r_A(G) \mid$ где $A$ пробегает все композиционные факторы группы $G\}$. Для единичной группы $G$ положим $r(G) = r_A(G) = 0$.

Построим теперь пример, показывающий, что существуют ступенчатые формации, которые не являются композиционными формациями.

**Пример.** Пусть $p$, $q$ и $r$ — простые числа такие, что $p \mid q-1$ и $pq \mid r-1$ (напр., $p=2$, $q=3$, $r=7$).

Пусть $H$ — транзитивная группа подстановок степени $q$ с $|H| = pq$. Пусть $k = r-1$ и $S = H_1 \times \dots \times H_k$, где $H_1 \cong H_2 \cong \dots \cong H_k \cong H$, $F$ — свободная группа ранга $qk$ со свободными порождающими $a_{ij}$, $i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, q$. Полагая для любого $s \in S$, где $s = h_1 \dots h_k$, $h_i \in H_i$,

$$(a_{ij})^s = a_{i(j^{h_i})},$$

естественным образом превращаем группу $S$ в группу автоморфизмов для $F$. Пусть $K_r(F)$ — $r$-й член нижнего центрального ряда группы $F$ и $F^r = \langle a^r \mid a \in F \rangle$. Положим $R = F/F^rK_r(F)$. Тогда $R$ — $r$-группа экспоненты $r$ и класса $\leq r-1$. Группа $S$ естественным образом действует на $R$ как группа операторов. Пусть $G = [R]S$, а для любого простого числа $l$ символ $Z_l$ обозначает некоторую группу порядка $l$.

Пусть $f$ — такая $e$-функция, что $f(Z_p) = (1)$, $f(Z_q) = \operatorname{form} Z_p$,

$$f(Z_r) = f(Z_r \times Z_r) = \dots = f(\underbrace{Z_r \times Z_r \times \dots \times Z_r}_{p \text{ раз}}) = \operatorname{form} S,$$

и

$$f(\underbrace{Z_p \times Z_p \times \cdots \times Z_p}_{n \text{ раз}}) = f(\underbrace{Z_q \times Z_q \times \cdots \times Z_q}_{m \text{ раз}}) = f(\underbrace{Z_r \times Z_r \times \cdots \times Z_r}_{t \text{ раз}}) = \varnothing$$

для всех $n \geq 2$, $m \geq 2$, $t \geq p+1$, и $f(H) = \varnothing$ для всех элементарных групп $H$, у которых композиционные факторы не изоморфны ни одной из следующих групп: $Z_p$, $Z_q$, $Z_r$. Тогда, очевидно, $f$ — ступенчатая $e$-функция. Рассмотрим формацию $\mathfrak{F} = EF(f)$. Согласно предложению 3 $\mathfrak{F}$ — ступенчатая формация. Покажем, что эта формация не является композиционной. Поскольку группа $G$ разрешима, то для этого необходимо лишь установить, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}$. Пусть $H/K$ — произвольный главный фактор группы $G$ такой, что $\Phi(G) \subseteq K$. Если $H/K$ — $p$-группа, то из построения группы $G$ видно, что $H/K = G/K$ — группа порядка $p$, и поэтому $G/C_G(H/K) = G/G \in f(H/K) = f(Z_p)$. Если же $H/K$ — $q$-группа, то $R \subseteq K$ и $G/C_G(H/K) \cong Z_p \in f(H/K) = f(Z_q)$. Пусть $H/K$ — $r$-фактор. Тогда согласно доказанному в ([8], с. 714) $|H/K| = Z_r^t$, где $t = 1$ или $t = p$. Значит,

$$G/C_G(H/K) \in \mathrm{form}(G/R) = \mathrm{form}\, S = f(Z_r) = f(\underbrace{Z_r \times \cdots \times Z_r}_{p \text{ раз}}).$$

Следовательно, $G/\Phi(G) \in EF(f)$. Но, как доказано в ([8], с. 715), если $t$ — $r_r$-ранг группы $G$, то $t \geq p^k$. Значит, у группы $G$ имеется такой фраттиниев главный $r$-фактор $H/K$, что $H/K \cong \underbrace{Z_r \times \cdots \times Z_r}_{t \text{ раз}}$, где $t \geq p+1$. Поэтому $f(H/K) = \varnothing$ и, следовательно, $G \notin EF(f)$.

## Литература


1. Gaschütz W. *Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen* // Math. Z. – 1963. – Bd. 80. – № 4. – S. 300–305.
2. Шеметков Л.А. *Ступенчатые формации групп* // Матем. сб. – 1974. – Т. 94. – № 4. – С. 628–648.
3. Шеметков Л.А. *Формации конечных групп.* – М.: Наука, 1978. – 271 с.
4. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. *Формации алгебраических систем.* – М.: Наука, 1989. – 253 с.
5. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups.* – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – 889 p.
6. Ведерников В.А. *О ступенчатых формациях групп* // Международн. алгебр. конф., посв. памяти проф. Л.М. Глускина: Тез. докл. Киев – Словянск, 1997. – С. 48.
7. Ведерников В.А. *Элементы теории классов групп* // Смоленск, 1988. – 122 с.
8. Huppert B. *Endliche Gruppen* I. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1967. – 793 p.



*Хучжоуский нормальный*
*университет* (*г. Хучжоу,*
*Китайская Народная Республика*)



*Поступила*
17.04.2000