Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, №3, с. 50–59 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0024*

М. МИРСАБУРОВ, Р. КАРАСАКАЛОВ

ВТОРАЯ ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ФРАНКЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧАПЛЫГИНА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Аннотация. В работе исследуется вторая обобщенная задача Франкля для уравнения Чаплыгина с сингулярным коэффициентом. Методом *abc* доказывается единственность решения, а методом интегральных уравнений доказывается однозначная разрешимость исследуемой задачи.

Ключевые слова: единственность решения, существование решения, сингулярный коэффициент.

УДК: 517.956

Abstract. In the work a generalized Frankl problem for the Chaplygin equation with singular coefficient is considered. The unique solvability of considered problem is proved by the method of integral equations.

Keywords: the uniqueness of solution, the existence of solution, singular coefficient.

1. Введение и постановка задачи

Ф.И. Франкль [1] поставил задачу, единственность и существование решения которой исследованы в работах Ю.В. Девингталя [2] и Линь Цзянь-бина [3]. Существенные и интересные результаты были получены М.С. Салахитдиновым и М. Мирсабуровым в [4].

Рассмотрим уравнение Чаплыгина с сингулярным коэффициентом

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0, \tag{1}$$

где $K(y)$ — непрерывно дифференцируемая функция, причем $K(y) < 0$ при $y < 0, K(y) > 0$ и $K(-ky) = -k^m K(y)$ при $y > 0$; k, m — положительные постоянные, постоянная $\beta_0 \in (-m/2, 1)$, $(|y|^{\beta_0} K(y))_y \geq 0$.

Пусть D — область, ограниченная отрезком AA' прямой $x = 0$, $y_1 \leq y \leq y_2$, где $y_1 < 0$, $y_2 > 0$, $-y_1 \leq y_2$, гладкой кривой Γ, лежащей в верхней полуплоскости и имеющей концы в точках $A(0, y_2)$ и $B(a, 0)$, $a > 0$, характеристикой $A'C$ уравнения (1), где $A' = A'(0, y_1)$, $C = C(a_1, 0)$, $0 < a_1 < a$, и отрезком CB оси x, $a_1 \leq x \leq a$.

Введем обозначения $D_1 = D \cap \{y < 0\}$; $D_2 = D \cap \{y > 0\}$; OP — характеристика уравнения (1), исходящая из точки $O(0, 0)$, $P \in A'C$, OC — отрезок оси x, $0 \leq x \leq a_1$.

Поступила 21.08.2009

Задача F_2. Найти в области $D \setminus (OP \cup OC)$ регулярное решение $u(x,y) \in C(\overline{D})$ уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{\Gamma} = \psi_1(s), \quad 0 \le s \le l;$$

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = \psi_2(x), \quad a_1 \le x \le a;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{AA'} = 0, \quad y_1 \le y \le y_2; \tag{2}$$

$$u(0,y) - \mu u(0,-ky) = f(y), \quad 0 \le y \le y_2; \tag{3}$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to+0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad 0 < x < a_1,$$

где μ — некоторая положительная постоянная, $k = -(y_1/y_2) \le 1$, $\psi_1(s)$, $\psi_2(x)$ — заданные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, $\psi_1(0) = \psi_2(a)$, s — длина дуги Γ, отсчитываемая от точки $B(a,0)$ до точки $M(x(s),y(s)) \in \Gamma$, l — длина всей дуги кривой Γ, а заданная функция $f(y)$ имеет первую производную, удовлетворяющую условию Гёльдера на $(0,y_2)$.

Задача F_2 является обобщением известной второй задачи Франкля [1].

2. Единственность решения задачи F_2

Единственность решения задачи докажем методом abc [3]. Имеет место следующая

Теорема 1. *Однородная задача* F_2 $(\psi_1 = \psi_2 = f = 0)$ *при выполнении условия*

$$k^{1+\beta_0+m} \le \mu^2$$

имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Обозначим через $v(x,y)$ функцию, которая вместе с решением $u(x,y)$ задачи F_2 удовлетворяет системе уравнений

$$|y|^{\beta_0}K(y)u_x + v_y = 0, \quad v_x - |y|^{\beta_0}u_y = 0. \tag{4}$$

При условии $v(0,0) = 0$ функция $v(x,y)$ однозначно определяется из системы уравнений (4), т. е.

$$v(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} |y|^{\beta_0}u_y dx - |y|^{\beta_0}K(y)u_x dy. \tag{5}$$

В силу (4) очевидно, что величина интеграла (5) не зависит от пути интегрирования, лишь бы он лежал целиком в области D.

Пусть $b(x,y)$ и $c(x,y)$ — две произвольные кусочно-гладкие функции в $\overline{D}$, согласно (4) имеем

$$\iint_D [(|y|^{\beta_0}Kcu - bv)(v_x - |y|^{\beta_0}u_y) + (|y|^{\beta_0}bu + cv)(|y|^{\beta_0}Ku_x + v_y)]dx\,dy = 0. \tag{6}$$

В силу тождества

$$(|y|^{\beta_0}Kcu - bv)(v_x - |y|^{\beta_0}u_y) + (|y|^{\beta_0}bu + cv)(|y|^{\beta_0}Ku_x + v_y) =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(|y|^{2\beta_0}bKu^2 + 2|y|^{\beta_0}cKuv - bv^2) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(|y|^{2\beta_0}cKu^2 - 2|y|^{\beta_0}buv - cv^2) -$$
$$- \frac{1}{2}|y|^{2\beta_0}b_xKu^2 + \frac{1}{2}b_xv^2 - |y|^{\beta_0}c_xKuv + \frac{1}{2}(|y|^{2\beta_0}cK)_yu^2 - (|y|^{\beta_0}b)_yuv - \frac{1}{2}c_yv^2$$

равенство (6) перепишем в виде

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(|y|^{2\beta_0}bKu^2+2|y|^{\beta_0}cKuv-bv^2)-\frac{\partial}{\partial y}(|y|^{2\beta_0}cKu^2-2|y|^{\beta_0}buv-cv^2)\right]dx\,dy+$$
$$+\iint_D\{[(|y|^{2\beta_0}cK)_y-|y|^{2\beta_0}Kb_x]u^2-2[(|y|^{\beta_0}b)_y+|y|^{\beta_0}Kc_x]uv+$$
$$+(b_x-c_x)v^2\}dx\,dy=0. \quad (7)$$

Применяя формулу Грина к первому интегралу равенства (7), имеем

$$\iint_D\{[(|y|^{2\beta_0}cK)_y-|y|^{2\beta_0}Kb_x]u^2-2[(|y|^{\beta_0}b)_y+|y|^{\beta_0}Kc_x]uv+(b_x-c_x)v^2\}dx\,dy+$$
$$+\int_{\partial D}(|y|^{2\beta_0}Kcu^2-2|y|^{2\beta_0}buv-cv^2)dx+(|y|^{2\beta_0}Kbu^2+2|y|^{\beta_0}Kcuv-bv^2)dy=0. \quad (8)$$

Нетрудно убедиться, что

1) на CB $dy=0$, $u=0$;
2) на Γ $u=0$;
3) на AA' $dx=0$, $v(0,y)=0$;
4) на $A'C$ $dx=\sqrt{-K}dy$ и, следовательно, вдоль этой кривой

$$(|y|^{2\beta_0}Kcu^2-cv^2)dx+2|y|^{\beta_0}Kcuv\,dy+(|y|^{\beta_0}Kbu^2-bv^2)dy-2|y|^{\beta_0}buv\,dx=$$
$$=-c[(|y|^{\beta_0}\sqrt{-K}u)^2+2|y|^{\beta_0}\sqrt{-K}uv+v^2]dx-b[(|y|^{\beta_0}\sqrt{-K}u)^2+2|y|^{\beta_0}\sqrt{-K}uv+v^2]dy=$$
$$=(|y|^{\beta_0}\sqrt{-K}u+v)^2(cdx+bdy)=-(|y|^{\beta_0}\sqrt{-K}u+v)^2(\sqrt{-K}c+b)dy.$$

С учетом приведенных выше равенств, равенство (8) преобразуем к виду

$$\iint_D\big\{\big[(|y|^{2\beta_0}cK)_y-|y|^{2\beta_0}Kb_x\big]u^2-2\big[(|y|^{\beta_0}b)_y+|y|^{\beta_0}Kc_x\big]uv+(b_x-c_y)v^2\big\}dx\,dy-$$
$$-\int_{CB}cv^2dx\,dy-\int_\Gamma v^2(c\,dx+b\,dy)+\int_{AA'}|y|^{2\beta_0}Kbu^2dy-\int_{A'C}(|y|^{\beta_0}\sqrt{-K}u+v)^2(\sqrt{K}c+b)dy. \quad (9)$$

Теперь подчиним функции b и c таким условиям, чтобы все интегралы в (9) были бы неотрицательными, для этого достаточно потребовать

$$(|y|^{2\beta_0}Kc)_y-|y|^{2\beta_0}Kb_x\geq 0,$$
$$b_x-c_y\geq 0,$$
$$(|y|^{\beta_0}Kc_x+(|y|^{\beta_0}b)_y)^2\leq(b_x-c_y)[(|y|^{2\beta_0}Kc)_y-|y|^{2\beta_0}Kb_x] \text{ в области } D; \quad (10)$$
$$c\leq 0 \text{ на } CB; \quad (11)$$
$$c\frac{\partial x}{\partial s}+b\frac{\partial y}{\partial s}\leq 0 \text{ на } \Gamma; \quad (12)$$
$$\int_0^{y_2}t^{2\beta_0}[\mu^{-2}k^{1+2\beta_0}K(-kt)b(0,-kt)+K(t)b(0,t)]u^2(0,t)dt\leq 0$$

или

$$\mu^{-2}k^{1+2\beta_0}K(-kt)b(0,-kt)+K(t)b(0,t)\leq 0 \text{ на } AA'; \quad (13)$$
$$\sqrt{-K}c+b\leq 0 \text{ на } A'C. \quad (14)$$

Теперь подберем функции $b = b(x,y)$ и $c = c(x,y)$ так, чтобы выполнялись неравенства (10)–(14). Пусть, например, при $y \geq 0$ $b = (x - m_0)y^{-\beta_0}$, $c = \frac{y^{1-\beta_0}}{1-\beta_0}$, где m_0 — постоянная и $m_0 > \max\limits_{(x,y)\in D} x$, а при $y \leq 0$ $b = (x - m_0)(-y)^{-\beta_0}$, $c = 0$. Тогда, очевидно, условия (10), (11), (14) выполняются, а условия (12), (13) переходят в неравенства

$$(1-\beta_0)(x-m_0)\frac{dy}{ds} + y\frac{dx}{ds} \leq 0 \text{ на } \Gamma$$

и

$$k^{1+\beta_0+m} \leq \mu^2.$$

Из неотрицательности интегралов, входящих в равенство (9), следует, что каждый из них равен нулю, поскольку их сумма равна нулю. Тогда из первого интеграла (9) $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$. □

3. Доказательство существования решения задачи F_2

Доказательство существования решения задачи F_2 приведем для случая $K(y) = \operatorname{sign}\, y|y|^m$. В этом случае уравнение (1) примет вид

$$\operatorname{sign} y|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0, \tag{15}$$

а AC' совпадает с отрезком характеристики $x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = a_1$.

Пусть D^* — область, симметричная области D относительно оси y, и пусть $\Omega = D \cup D^* \cup AA'$. Область $\Omega^+ = \Omega \cap \{y > 0\}$ ограничена кривой $\Gamma \cup \Gamma^*$ и отрезком $[-a, a]$ оси x, где Γ^* — контур, симметричный Γ относительно оси y.

Обозначим через $\psi_1^*(s)$ функцию, заданную на Γ^* равенством

$$\psi_1^*(s) = \psi_1(2l - s), \quad l \leq s \leq 2l,$$

где l — длина кривой Γ. В дальнейших исследованиях положим, что кривая Γ совпадает с нормальной кривой $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} =$ уравнения (15).

Найдем в области Ω решение уравнения (15), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_\Gamma = \psi_1(s), \quad u|_{\Gamma^*} = \psi_1^*(s);$$

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{CB} = \psi_2(x), \quad a_1 < x < a;$$

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{C^*B^*} = \psi_2(-x), \quad -a < x < -a_1;$$

$$u(0,y) - \mu u(0,-ky) = f(y), \quad 0 \leq y \leq y_2.$$

Функции $\tau(x) = u(x,0)$ и $\nu(x) = \lim\limits_{y\to0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}$ при $-a_1 < x < a_1$ будем считать четными, следовательно, и решение задачи N в области Ω^+ будет четным относительно переменной x. Тогда условие (2) будет выполнено, так как $\frac{\partial u}{\partial x}$ по переменной x — нечетная функция. Очевидно, что решение этой вспомогательной задачи при $x \geq 0$ является и решением задачи F_2.

Без ограничения общности можно считать $\psi_1 \equiv \psi_2 \equiv 0$ ([2]).

Используя формулу Дарбу ([4], с. 34), дающую решение видоизмененной задачи Коши с данными

$$u(x,0) = \tau(x), \quad x \in [-a_1, a_1],$$

$$\lim_{y\to-0} (-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x), \quad x \in (-a_1, a_1),$$

в силу краевого условия (3) нетрудно получить соотношение

$$\mu\gamma_2\frac{\pi}{\sin\beta\pi}\nu(k_0x)=k_0^{2\beta-1}\left(\frac{m+2}{2}\right)^{2\beta-1}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{y}{(x^2-y^2)^{1-\beta}}u\left(0,\left(\frac{m+2}{2}y\right)^{\frac{2}{m+2}}\right)dy-$$
$$-k_0^{2\beta-1}\mu\left(\frac{m+2}{2}\right)^{2\beta-1}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\tau(k_0t)}{(x-t)^{1-2\beta}}dt-$$
$$-k_0^{2\beta-1}\left(\frac{m+2}{2}^{2\beta-1}\right)\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{y}{(x^2-y^2)^{1-\beta}}f\left(\left(\frac{m+2}{2}y\right)^{\frac{2}{m+2}}\right)dy,\quad(16)$$

где $\beta=\frac{m+2\beta_0}{2(m+2)}$.

В дальнейших исследованиях положим, что кривая Γ совпадает с нормальной кривой $\sigma_0\,:\,x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}=1$ уравнения (15). В этом случае решение видоизмененной задачи N:

$$u(x,y)|_{\sigma_0}=\varphi(s),\quad 0\le s\le l,\quad \lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x),\quad x\in(-1,1)$$

дается формулой

$$u(x,y)=-k_1\int_{-a}^{a}\nu(t)\left\{\left[(x-t)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{-\beta}-\right.$$
$$\left.-\left[\left(a-\frac{xt}{a}\right)^2+\frac{4t^2}{a^2(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{-\beta}dt\right\}-$$
$$-k_1(m+2)(a^2-R^2)\int_0^l\eta^{\beta-1}\varphi(s)(r_1^2)^{-\beta-1}F(\beta,\beta+1,2\beta;1-\sigma)\frac{d\xi(s)}{ds}ds,\quad(17)$$

где

$$k_1=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)},$$
$$R^2=x^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2},\qquad \left.\begin{matrix}r^2\\ r_1^2\end{matrix}\right\}=(x-\xi(s))^2+\frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{\frac{m+2}{2}}\mp\eta(s)^{\frac{m+2}{2}}\right)^2,\quad \sigma=\frac{r^2}{r_1^2}.$$

В (17), переходя к пределу при $y\to-$ (с учетом однородных условий на $\Gamma^*\cup\Gamma$ и $B^*C^*\cup CB$, где B^* и C^* — соответственно точки на оси x, симметричные точкам B и C), нетрудно убедиться, что

$$\tau(x)=-k_1\int_0^a\left[|x-t|^{-2\beta}-\left(a+\frac{xt}{a}\right)^{-2\beta}\right]\nu(t)dt-k_1\int_0^a\left[|x-t|^{-2\beta}-\left(a-\frac{xt}{a}\right)^{-2\beta}\right]\nu(t)dt.\quad(18)$$

Подставляя (18) в (16), получим

$$\mu\gamma_1\frac{\pi}{\sin\beta\pi}\nu(k_0x)=k_0^{2\beta-1}\left(\frac{m+2}{2}\right)^{2\beta-1}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{y}{(x^2-y^2)^{1-\beta}}u\left(0,\left(\frac{m+2}{2}y\right)^{\frac{2}{m+2}}\right)dy-$$
$$-\mu\left(\frac{m+2}{2}\right)^{2\beta-1}\left\{-k_1\pi\operatorname{tg}\beta\pi\nu(k_0x)-k_1x^{2\beta-1}\int_0^{\xi_0}\frac{2\xi^{2-2\beta}\nu(k_0\xi)}{\xi^2-x^2}d\xi+\right.$$
$$\left.+k_1k_0^{2\beta}\frac{x^{2\beta-1}}{a^{2\beta-4}}\int_0^{\xi_0}\frac{2\nu(k_0\xi)}{a^4-k_0^4\xi^2x^2}d\xi\right\}-$$

$$-k_0^{2\beta-1}\left(\frac{m+2}{2}\right)^{2\beta-1}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{y}{(x^2-y^2)^{1-\beta}}f\left(\left(\frac{m+2}{2}y\right)^{\frac{2}{m+2}}\right)dy. \quad (19)$$

В силу (17) первый интеграл правой части (18) преобразуем к виду

$$E(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{y}{(x^2-y^2)^{1-\beta}}u\left(0,\left(\frac{m+2}{2}y\right)^{\frac{2}{m+2}}\right)dy=$$
$$=-2k_2k_0x^{2\beta-1}\int_0^{\xi_0}\nu(k_0\xi)\left(\frac{1}{(k_0\xi^2)^{\beta-1}}\frac{1}{k_0\xi^2+x^2}-\frac{a^{4-2\beta}}{a^4+k_0^2\xi^2x^2}\right)d\xi. \quad (20)$$

В силу (20) соотношение (19) принимает вид

$$\mu\gamma_2\frac{\pi}{\sin\beta\pi}\nu(k_0x)=-2k_1k_0^{2\beta}x^{2\beta-1}\left(\frac{m+2}{2}\right)^{2\beta-1}\int_0^{\xi_0}\nu(k_0t)\left(\frac{1}{(k_0t^2)^{\beta-1}}\frac{1}{k_0t^2+x^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{a^{4-2\beta}}{a^4+k_0^2t^2x^2}\right)dt+k_1\mu\left(\frac{m+2}{2}\right)^{2\beta}x^{2\beta-1}\int_0^{\xi_0}\frac{2t^{2-2\beta}\nu(k_0t)}{t^2-x^2}dt-$$
$$-\mu k_1k_0^{2\beta}\left(\frac{m+2}{2}\right)^{2\beta-1}\frac{x^{2\beta-1}}{a^{2\beta-4}}\int_0^{\xi_0}\frac{2\nu(k_0t)}{a^4-k_0^4t^2x^2}dt+k_1\mu\left(\frac{m+2}{2}\right)^{2\beta-1}\pi\operatorname{tg}\beta\pi\nu(k_0x)-$$
$$-k_0^{2\beta-1}\left(\frac{m+2}{2}\right)^{2\beta-1}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{y}{(x^2-y^2)^{1-\beta}}f\left(\left(\frac{m+2}{2}y\right)^{\frac{2}{m+2}}\right)dy. \quad (21)$$

В (21), сделав замену $x=\xi_0\sqrt{z}$, $t=\xi_0\sqrt{\xi}$, с учетом $a=a_0k_0$ преобразуем

$$\rho(z)-\lambda\int_0^1\left(\frac{1}{z-\xi}-\frac{b}{b^2-z\xi}\right)\rho(\xi)d\xi=\frac{\lambda k_0^2}{\mu}\int_0^1\frac{\rho(\xi)d\xi}{k_0^2\xi+z}+F_0(\rho)+f_0(z), \quad (22)$$

где

$$\lambda=\frac{\cos\beta\pi}{\pi(1+\sin\beta\pi)},\quad \lambda_1=\frac{2^{2\beta}\mu\Gamma(\beta)\pi(1+\sin\beta\pi)}{(m+2)\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)\sin2\beta\pi},$$
$$\rho(z)=z^{\frac{1-2\beta}{2}}\nu(k_0\xi_0\sqrt{z}),\quad \rho(\xi)=\xi^{\frac{1-2\beta}{2}}\nu(k_0\xi_0\sqrt{z}),$$
$$z^{\frac{1-2\beta}{2}}F_0(\rho)=-\lambda\int_0^1 b\frac{1-(b/\xi)^{1-\beta}}{b^2-z\xi}\rho(\xi)d\xi+\frac{\lambda k_0^{2\beta}}{\mu}\int_0^1\frac{\xi_0(\xi_0\sqrt{z})^{2\beta-1}a^{4-2\beta}}{\xi^{1-\beta}(a^4+k_0^2\xi_0^4\xi z)}\rho(\xi)d\xi, \quad (23)$$
$$f_0(z)=-z^{\frac{1-2\beta}{2}}\frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{m+2}{2}\right)^{2\beta+1}\frac{2\sqrt{z}}{\xi_0}\frac{d}{dz}\int_0^{\xi_0\sqrt{z}}\frac{y}{(\xi_0^2z-y^2)^{1-\beta}}f\left(\left(\frac{m+2}{2}y\right)^{\frac{2}{m+2}}\right)dy,$$
$$b=(a_0/\xi_0)^2=(a/a_1)^2>1.$$

Из (23) нетрудно убедиться, что $F_0(\rho)$ — регулярный оператор.

Заметим, что ядро первого интегрального оператора правой части (22) при $\xi=0$, $z=0$ имеет особенность первого порядка, и поэтому это слагаемое выделено отдельно.

Правую часть уравнения (22) временно будем считать известной функцией и перепишем его в виде

$$\rho(x)=\lambda\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}-\frac{b}{b^2-xt}\right)\rho(t)dt=g(x), \quad (24)$$

где

$$g(x)=\lambda_0\int_0^1\frac{\rho(t)dt}{k_0^2t+x}+g_0(\rho), \quad (25)$$

$$g_0(\rho) = F_0(\rho) + f_0(x), \quad \lambda_0 = \lambda k_0^2/\mu.$$

Решение уравнения (24) будем искать в классе функций Гёльдера H, которые ограничены при $x = 1$ и могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы при $x = 0$, т. е. в классе $h(1)$.

Применяя к уравнению (24) метод регуляризации Карлемана ([4], с. 190), получим

$$\rho(x) = \frac{1}{1+\lambda^2\pi^2}\left[g(x) + \lambda\left(\frac{1-x}{x}\right)^\alpha \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^\alpha \frac{g(t)dt}{t-x}\right] + A(g), \tag{26}$$

где

$$A(g) = \frac{1}{1+\lambda^2\pi^2}\Bigg[\lambda\left(\frac{1-x}{x}\right)^\alpha \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^\alpha \left[\left(\frac{b^2-x}{b^2-t}\right)^\alpha - 1\right]\frac{g(t)dt}{t-x} -$$
$$- \lambda\left(\frac{1-x}{x}\right)^\alpha \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^\alpha \left(\frac{b^2-x}{b^2-t}\right)^\alpha \frac{bg(t)dt}{b^2-xt}\Bigg].$$

Подставляя в (26) выражение для $g(x)$ из (25), получим

$$\rho(x) = \frac{1}{1+\lambda^2\pi^2}\Bigg[\lambda_0\int_0^1 \frac{\rho(t)dt}{k_0^2 t + x} + g_0(\rho) +$$
$$+ \lambda\left(\frac{1-x}{x}\right)^\alpha \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^\alpha \left(\lambda_0 \int_0^1 \frac{\rho(s)ds}{k_0^2 s + t} + g_0(\rho)\right)\frac{dt}{t-x}\Bigg] + A_0(\rho), \tag{27}$$

где $A_0(\rho) = A\Big(\lambda_0 \int\limits_0^1 \frac{\rho(t)dt}{k_0^2 t + x} + g_0(\rho)\Big)$ — регулярный оператор.

Уравнение (27) преобразуем к виду

$$\rho(x) = \frac{1}{1+\lambda^2\pi^2}\Bigg[\lambda_0\int_0^1 \frac{\rho(t)dt}{k_0^2 t + x} +$$
$$+ \lambda\lambda_0\left(\frac{1-x}{x}\right)^\alpha \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^\beta dt \int_0^1 \frac{\rho(s)ds}{(k_0^2 s + t)(t-x)}\Bigg] + R(\rho); \tag{28}$$

здесь $R(\rho) = \frac{1}{1+\lambda^2\pi^2}\Big[g_0(\rho) + \lambda\left(\frac{1-x}{x}\right)^\alpha \int\limits_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^\alpha \frac{g_0(\rho)dt}{t-x}\Big] + A_0(\rho)$ — регулярный оператор.

Во втором интеграле правой части (28), поменяв порядок интегрирования, имеем

$$\rho(x) = \frac{1}{1+\lambda^2\pi^2}\Bigg[\lambda_0\int_0^1 \frac{\rho(t)dt}{k_0^2 t + x} +$$
$$+ \lambda\lambda_0\left(\frac{1-x}{x}\right)^\alpha \int_0^1 \rho(s)ds \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^\alpha \frac{dt}{(k_0^2 s + t)(t-x)}\Bigg] + R(\rho). \tag{29}$$

Вычислив внутренний интеграл в (29), имеем

$$\rho(x) = \frac{1}{1+\lambda^2\pi^2}\Bigg[\lambda_0\int_0^1 \frac{\rho(t)dt}{k_0^2 t + x} + \lambda\lambda_0\pi\operatorname{ctg}\alpha\pi \int_0^1 \frac{\rho(t)dt}{k_0^2 t + x} +$$
$$+ \lambda\lambda_0 \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\left(\frac{1-x}{x}\right)^\alpha \int_0^1 \frac{\rho(t)dt}{k_0^2 t + x} -$$
$$- \lambda\lambda_0 \frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}\left(\frac{1-x}{x}\right)^\alpha \int_0^1 \frac{1}{1+k_0^2 t} F\left(1-\alpha, 1, 2; \frac{1}{1+k_0^2 t}\right)\int_0^1 \frac{\rho(t)dt}{k_0^2 t + x}\Bigg] + R(\rho). \tag{30}$$

Учитывая равенство $\lambda\pi\,\mathrm{ctg}\,\alpha\pi = 1$, уравнение (30) преобразуем к виду

$$\rho(x) = \frac{\lambda\lambda_0}{1+\lambda^2\pi^2}\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha}\int_0^1\left(1-\frac{\alpha}{1+k_0^2t}F\left(1-\alpha,1,2;\frac{1}{1+k_0^2t}\right)\right)\frac{\rho(t)dt}{k_0^2t+x}R(\rho). \tag{31}$$

Заметим, что

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{\alpha}{1+k_0^2t}F\big(1-\alpha,1,2;\frac{1}{1+k_0^2t}\big)}{t^{\alpha}} = \lim_{t\to 0}\frac{\alpha F\big(1-\alpha,2,2;\frac{1}{1+k_0^2t}\big)\frac{k_0^2}{(1+k_0^2t)^2}}{\alpha t^{\alpha-1}} = k_0^{2\alpha}. \tag{32}$$

Уравнение (31) представим в виде

$$\rho(x) = \int_0^1\frac{K(x,t)\rho_0(t)dt}{k_0^2t+x} + R_0(\rho_0), \tag{33}$$

где $\rho_0(x) = x^{\alpha}\rho(x)$,

$$K(x,t) = \frac{\lambda\lambda_0}{1+\lambda^2\pi^2}\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\frac{(1-x)^{\alpha}}{t^{\alpha}}\left(1-\frac{\alpha}{1+k_0^2t}F\left(1-\alpha,1,2;\frac{1}{1+k_0^2t}\right)\right),$$

и с учетом предела (32) имеем

$$K(0,0) = \frac{\lambda\lambda_0}{1+\lambda^2\pi^2}\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}k_0^{2\alpha}, \tag{34}$$

$R_0(\rho_0) = x^{\alpha}R_0\big(\frac{\rho_0(x)}{x^{\alpha}}\big)$ — регулярный оператор. В силу (34) уравнение (33) преобразуем к виду

$$\rho_0(x) = K(0,0)\int_0^1\frac{\rho_0(t)dt}{k_0^2t+x} + R_1(\rho_0), \tag{35}$$

где $R_1(\rho_0) = R_0(\rho_0) + \int\limits_0^1\frac{K(x,t)-K(0,0)}{k_0^2t+x}\rho_0(t)dt$ — регулярный оператор.

Согласно работе ([5], с. 198) (35) может быть сведено к уравнению Винера–Хопфа (одностороннему уравнению) с помощью замены переменных $x = e^{-y}$, $t = e^{-s}$, и введения вспомогательной функции $\rho_0(e^{-y}) = e^{y/2}\rho_1(y)$ с

$$\rho_1(y) = K(0,0)\int_0^{\infty}\frac{\rho_1(s)ds}{k_0^2e^{(y-s)/2}+e^{(s-y)/2}} + R_2(\rho_1), \tag{36}$$

где $R_2(\rho_1)$ — регулярный оператор.

Покажем, что индекс уравнения (36) ([5], с. 28) равен нулю. В этом случае разрешимость уравнения (36) эквивалентна разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода, которая в свою очередь вытекает из единственности решения исходной задачи.

Индексом уравнения (36) будет индекс выражения $1-K^{\wedge}(x)K(0,0)$ с противоположным знаком, где

$$K^{\wedge}(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixt}dt}{k_0^2t^{t/2}+e^{-t/2}}. \tag{37}$$

Вычислим интеграл Фурье (37) с помощью теории вычетов ([5], с. 18). Очевидно, $K^{\wedge}(x) = \lim\limits_{N\mapsto\infty}J_N$, где $J_N = \int\limits_{-N}^{N}\frac{e^{ixt}dt}{k_0^2e^{t/2}+e^{-t/2}}$. Образуем на комплексной плоскости $z = t+i\eta$ замкнутый контур в виде прямоугольника со сторонами

$$-N\le t\le N,\quad \eta=0,\quad -N\le t\le N,\quad \eta=4\pi;\quad t=\pm N,\quad 0\le\eta\le 4\pi.$$

Внутри контура подинтегральная функция $\frac{e^{ixz}}{k_0^2e^{z/2}+e^{-z/2}}$ имеет только две особые точки: полюсы $z_0=-2\ln k_0+i\pi$ и $z_1=-2\ln k_0+i3\pi$ с вычетами $\frac{e^{-\pi x}e^{-ix2\ln k_0}}{ik_0}$ и $\frac{e^{-3\pi x}e^{-ix2\ln k_0}}{ik_0}$ соответственно. По теореме о вычетах интеграл по прямоугольнику равен

$$\int\frac{e^{ixz}dz}{k_0^2e^{z/2}+e^{-z/2}}=\frac{4\pi e^{-ix2\ln k_0}}{k_0(1+k_0^2)}(e^{-\pi x}-e^{-3\pi x}).$$

Следовательно,

$$\left(\int_{(-N,0)}^{(N,0)}+\int_{(N,4\pi)}^{(-N,4\pi)}+\int_{(-N,4\pi)}^{(-N,0)}+\int_{(N,0)}^{(N,4\pi)}\right)\frac{e^{ixz}dz}{k_0^2e^{z/2}+e^{-z/2}}=\frac{4\pi e^{-ix2\ln k_0}}{k_0(1+k_0^2)}(e^{-\pi x}-e^{-3\pi x}). \quad (38)$$

Первый интеграл в левой части (38) равен J_N. Учитывая, что $e^{z/2}$ имеет период $4\pi i$, получим, что второй интеграл равен $-e^{-4\pi x}J_N$. Несложная оценка остальных двух интегралов показывает, что они стремятся к нулю при $N\to\infty$. Переходя в равенстве (38) к пределу при $N\to\infty$, получим

$$K^\wedge(x)\left(1-e^{-4\pi x}\right)=\frac{2\pi e^{-ix2\ln k_0}}{k_0}(e^{-\pi x}-e^{-3\pi x})$$

или, окончательно,

$$K^\wedge(x)=\frac{\pi e^{-ix2\ln k_0}}{k_0\operatorname{ch}\pi x}.$$

Теперь вычислим индекс выражения $1-K^\wedge(x)K(0,0)$.

При выполнении условия

$$\mu>\frac{k_0^{2\alpha+1}\lambda^2\pi^2}{(1+\lambda^2\pi^2)\sin\alpha\pi} \quad (39)$$

нетрудно убедиться, что $\operatorname{Re}(1-K^\wedge(x)K(0,0))>0$, следовательно ([5], с. 28),

$$\operatorname{Ind}(1-K^\wedge(x)K(0,0))=\frac{1}{2\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}(1-K^\wedge(x)K(0,0))}{\operatorname{Re}(1-K^\wedge(x)K(0,0))}\right]_{-\infty}^{+\infty}=0,$$

т. е. изменение аргумента $1-K^\wedge(x)K(0,0)$ на действительной оси, выраженное в полных оборотах, равно нулю.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Задача F_2 при выполнении условия* (39) *однозначно разрешима.*

Литература

[1] Франкль Ф.И. *Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения*, ПММ **20** (2), 196–202 (1956).

[2] Девингталь Ю.В. *О существовании и единственности решения одной задачи Ф.И. Франкля*, Изв. вузов. Математика, № 3, 39–51 (1958).

[3] Линь Цзянь-бин. *О некоторых задачах Франкля*, Вестн. ЛГУ. Сер. матем., мех., астр. **3** (13), 28–39 (1961).

[4] Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами* (Universitet, Yangiyo'l poligraf servis, Ташкент, 2005).

[5] Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки* (Наука, М., 1978).

М. Мирсабуров

профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и геометрии,
Термезский государственный университет,
ул. Ф. Ходжаева, д. 43, г. Термез, Республика Узбекистан,

`e-mail:` mirsaburov@mail.ru

Р. Карасакалов

преподаватель, кафедра дифференциальных уравнений и геометрии,
Термезский государственный университет,
ул. Ф. Ходжаева, д. 43, г. Термез, Республика Узбекистан,

`e-mail:` karasakalov@mail.ru

M. Mirsaburov

Professor, Head of the Chair of Differential Equations and Geometry,
43 F. Khodzhaev str., Termez, Republic of Uzbekistan,

`e-mail:` mirsaburov@mail.ru

R. Karasakalov

Lecturer, the Chair of Differential Equations and Geometry,
43 F. Khodzhaev str., Termez, Republic of Uzbekistan,

`e-mail:` karasakalov@mail.ru