ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 10 (449)

УДК 517.954

А.Н. МИРОНОВ

О СВЯЗИ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ ГУРСА С НОРМАЛЬНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Пусть $u(x,y)$ является в области $D=(0,x_1)\times(0,y_1)$ решением задачи Гурса для уравнения

$$u_{xy}+au_x+bu_y+cu=0 \tag{1}$$

с условиями $u(x,0)=\psi(x)$, $u(0,y)=\varphi(y)$, $\varphi(0)=\psi(0)$, где $a,b\in C^3(\overline{D})$, $c\in C^2(\overline{D})$, $a^2+b^2+c^2\neq 0$. В данной статье устанавливается связь между $\psi(x)$, $\varphi(y)$ и нормальными производными $\mu(x)=u_{yyy}(x,0)$, $\lambda(y)=u_{xxx}(0,y)$. Ранее, в работах [1], [2], исследовалась связь $\psi(x)$ и $\varphi(y)$ с нормальными производными первого и второго порядка.

Остановимся на соотношениях между $\lambda(y)$ и $\varphi(y)$. Используем систему

$$u_x+bu=v,\quad v_y+av=ku, \tag{2}$$

эквивалентную уравнению (1) ([3], с. 134), в которой $k=b_y+ab-c$ — один из инвариантов Римана. Решая второе уравнение из (2) как линейное относительно v, найдем

$$v(x,y)=[u_x(x,0)+b(x,0)u(x,0)]\exp\left(\int_y^0 a(x,\beta)d\beta\right)+ \\ +\int_0^y k(x,\beta)u(x,\beta)\exp\left(\int_y^\beta a(x,\gamma)d\gamma\right)d\beta. \tag{3}$$

Продифференцируем дважды первое уравнение системы (2)

$$u_{xxx}=v_{xx}-bv_x+(b^2-2b_x)v-(b^3-3bb_x+b_{xx})u\,. \tag{4}$$

Исходя из (3), получим

$$v_x(x,y)=F(x,0,y)\Big[u_{xx}(x,0)+b_x(x,0)u(x,0)+b(x,0)u_x(x,0)+ \\ +(u_x(x,0)+b(x,0)u(x,0))\int_y^0 a_x(x,\beta)d\beta\Big]+\int_0^y\Big[k_x(x,\beta)+ \\ +k(x,\beta)\int_y^\beta a_x(x,\gamma)d\gamma\Big]F(x,\beta,y)u(x,\beta)d\beta+\int_0^y k(x,\beta)F(x,\beta,y)u_x(x,\beta)d\beta,$$

$$F(x,y,y_0)=\exp\left(\int_{y_0}^y a(x,\beta)d\beta\right).$$

Учитывая, что $u_x=v-bu$, запишем

$$\int_0^y k(x,\beta)F(x,\beta,y)u_x(x,\beta)d\beta=[u_x(x,0)+b(x,0)u(x,0)]F(x,0,y)\int_0^y k(x,\beta)d\beta- \\ -\int_0^\beta b(x,\beta)k(x,\beta)F(x,\beta,y)u(x,\beta)d\beta+\int_0^y k(x,\beta)F(x,\beta,y)\int_0^\beta k(x,\gamma)F(x,\gamma,\beta)u(x,\gamma)d\gamma d\beta.$$

Меняя местами пределы интегрирования в двойном интеграле по формуле Дирихле, окончательно получаем

$$v_x(x,y) = F(x,0,y)\Big[u_{xx}(x,0) + b_x(x,0)u(x,0) + b(x,0)u_x(x,0) + \\ + (u_x(x,0) + b(x,0)u(x,0))\Big(\int_y^0 a_x(x,\beta)d\beta + \int_0^y k(x,\beta)d\beta\Big)\Big] + \\ + \int_0^y \Big[k_x(x,\beta) + k(x,\beta)\Big(\int_y^\beta a_x(x,\gamma)d\gamma + \int_\beta^y k(x,\gamma)d\gamma - b(x,\beta)\Big)\Big]F(x,\beta,y)u(x,\beta)d\beta. \quad (5)$$

Аналогично, дифференцируя (5), получаем выражение для v_{xx}.

Подставив значения v, v_x, v_{xx} в уравнение (4) и полагая в полученной формуле $x=0$, найдем интегральное уравнение типа Вольтерра для определения $\varphi(y)$ через $\lambda(y)$

$$A(0,y)E(y)\varphi(y) + \int_0^y B(\beta,y)E(\beta)\varphi(\beta)d\beta = C(y)\,. \quad (6)$$

Здесь

$$A = -b^3 + 3bb_x - b_{xx}, \quad E(y) = \exp\Big(\int_0^y a(0,\beta)d\beta\Big),$$

$$B(\beta,y) = p(\beta) + k_x(0,\beta)\int_0^y m(\gamma)d\gamma + k(0,\beta)(q(y) + r(\beta,y)),$$

$$C(y) = \lambda(y)E(y) - \varphi(0)g(y) - \psi'(0)f(y) - \psi''(0)\int_0^y m(\beta)d\beta - \lambda(0),$$

$$f(y) = n(y) - b(0,0)b(0,y) + 2b_x(0,0) - 2b(0,0)\int_0^y a_x(0,\beta)d\beta,$$

$$g(y) = b_{xx}(0,0) + b_x(0,0)\Big[\int_0^y m(\beta)d\beta - b(0,0)\Big] + b(0,0)n(y),$$

$$p(\beta) = k_{xx}(0,\beta) - k_x(0,\beta)\Big[\int_0^\beta m(\gamma)d\gamma + 3b(0,\beta)\Big] + \\ + k(0,\beta)\Big[\int_0^\beta a_{xx}(0,\gamma)d\gamma + \Big(\int_0^\beta a_x(0,\gamma)d\gamma\Big)^2 - 2b(0,\beta)\int_0^\beta a_x(0,\gamma)d\gamma + \\ + b^2(0,\beta) - b_x(0,\beta) - 2\int_0^\beta k_x(0,\gamma)d\gamma - \int_0^\beta k(0,\gamma)\int_0^\gamma a_x(0,\gamma_1)d\gamma_1 d\gamma\Big],$$

$$q(y) = \int_0^y l_x(\gamma)d\gamma + \Big(\int_0^y a_x(0,\gamma)d\gamma\Big)^2 + \int_0^y k(0,\gamma)\int_0^\gamma l(\gamma_1)d\gamma_1 d\gamma - \\ - b(0,y)\int_0^y l(0,\gamma)d\gamma + b(0,y)b(0,0) - 2b_x(0,0),$$

$$r(\beta,y) = 2\Big(\int_0^y k(0,\gamma)d\gamma - \int_0^y a_x(0,\gamma)d\gamma\Big)\Big(\int_0^\beta a_x(0,\gamma)d\gamma - b(0,\beta)\Big) + \\ + b(0,y)\Big(\int_0^\beta k(0,\gamma)d\gamma - \int_0^\beta a_x(0,\gamma)d\gamma\Big) - \int_0^y k(0,\gamma)\int_0^\beta l(\gamma_1)d\gamma_1 d\gamma,$$

$$m(y) = m_1(0,y)a(0,y)b(0,y) - c(0,y) - 2a_x(0,y), \qquad l(y) = m(y) + a_x(0,y),$$

$$n(y) = -\int_0^y a_{xx}(0,\beta)d\beta + \Big(\int_0^y a_x(0,\beta)d\beta\Big)^2 + b(0,y)\int_0^y a_x(0,\beta)d\beta + b^2(0,y) - \\ - 2b_x(0,y) + 2\int_0^y k_x(0,\beta)d\beta + \int_0^y k(0,\beta)\Big[2\int_y^\beta a_x(0,\gamma)d\gamma + \int_0^\beta l(\gamma)d\gamma - b(0,y)\Big]d\beta.$$

Полученное уравнение является нагруженным. Поскольку значения $\varphi(0)$, $\psi'(0)$, $\psi''(0)$ не могут быть найдены из уравнения (6) (оно при $y=0$ обращается в тождество), то эти константы рассматриваются далее как произвольные.

Исследование (6) приводит к следующим результатам.

1. Пусть $A(0,y)\neq 0$. Тогда $\varphi(y)$ выражается через $\lambda(y)$ с помощью резольвенты уравнения (6) и может зависеть от одной, двух или трех констант. При этом зависимость от $\varphi(0)$ всегда имеет место, т. к. условие $g(y)\equiv 0$ противоречит условию $A(0,y)\neq 0$ (см. (6) при $y=0$). Зависимости же от $\psi'(0)$, $\psi''(0)$ может и не быть (напр., $m(\beta)\equiv 0$ при $f(y)\equiv 0$).

Если

$$B(\beta,y)=s_1(\beta)s_2(y), \tag{7}$$

то решение уравнения (6) представляется в явном виде

$$\varphi(y)=\frac{1}{A(0,y)}\left[C(y)-s_2(y)\int_0^y\frac{C(\beta)s_1(\beta)}{A(0,\beta)}\exp\left(\int_y^\beta\frac{s_1(\gamma)s_2(\gamma)}{A(0,\gamma)}d\gamma\right)d\beta\right].$$

Варианты реализации (7) следующие:

1) $p(\beta)+k_x(0,\beta)\int\limits_0^y m(\gamma)d\gamma=r_1(\beta)r_2(y)$, $k(0,\beta)(q(y)+r(\beta,y))=r_3(\beta)r_4(y)$ и при этом выполняется один из случаев $r_1=r_3$, $r_2=r_4$, $r_1\equiv 0$, $r_2\equiv 0$, $r_3\equiv 0$, $r_4\equiv 0$;

2) $p(\beta)+k(0,\beta)(q(y)+r(\beta,y))=r_1(\beta)r_2(y)$ и имеет место одно из условий $r_1=k_x$, $r_2=\int\limits_0^y m(\gamma)d\gamma$, $r_1\equiv 0$, $r_2\equiv 0$, $k_x\equiv 0$, $m\equiv 0$;

3) $k_x(0,\beta)\int\limits_0^y m(\gamma)d\gamma+k(0,\beta)(q(y)+r(\beta,y))=r_1(\beta)r_2(y)$ и выполняется одно из условий $p=r_1$, $p\equiv 0$, $r_1\equiv 0$, $r_2\equiv 0$.

2. Пусть теперь $A(0,y)\equiv 0$.

Если при этом выполняется (7) и $B(\beta,y)\neq 0$, то получаем

$$\varphi(y)=\left(\frac{C(y)}{s_2(y)}\right)'\frac{1}{s_1(y)E(y)}\ , \tag{8}$$

причем следует потребовать $\lambda(y)\in C^1[0,y_1]$. Функция $\varphi(y)$ из (8) может зависеть от одной–трех констант либо вовсе не зависеть от произвольных постоянных.

Если (7) не имеет места, то дифференцируем (6). Приходим к новому интегральному уравнению

$$A_1(y)E(y)\varphi(y)+\int_0^y B_1(\beta,y)E(\beta)\varphi(\beta)d\beta=C'(y), \tag{9}$$

$$A_1(y)=B(y,y)=k_{xx}(0,y)-3b(0,y)k_x(0,y)+3(b^2(0,y)-b_x(0,y))k(0,y),$$

$$B_1(\beta,y)=B_y(\beta,y)=k(0,\beta)p_1(y)+m(y)q_1(\beta),$$

$$p_1(y)=m(y)\int_0^y l(\gamma)d\gamma+m_{1x}(0,y)+h_x(0,y)-b(0,y)h(0,y),$$

$$q_1(\beta)=k_x(0,\beta)-k(0,\beta)\left[\int_0^\beta l(\gamma)d\gamma+2b(0,\beta)\right],$$

$$C'(y)=E(y)[\lambda'(y)+a(0,y)\lambda(y)]-\psi''(0)m(y)-\psi'(0)f'(y)-\varphi(0)g'(y),$$

$h=a_x+ab-c$ — второй инвариант Римана. Опять считаем, что $\lambda(y)\in C^1[0,y_1]$, полагая $A_1(y)\neq 0$. При $y=0$ уравнение (9) дает соотношение между $\psi''(0)$, $\psi'(0)$, $\varphi(0)$, а именно,

$$[A_1(0)+g'(0)]\varphi(0)+m(0)\psi''(0)+f'(0)\psi'(0)=\lambda'(0)+a(0,0)\lambda(0).$$

Рассмотрев восемь вариантов уравнения (9), получим, что $\varphi(y)$ выражается через резольвенту (9) и может как вообще не зависеть от произвольных постоянных, так и зависеть от одной, двух или трех констант.

Если $B_1(\beta, y) = s_1(\beta)s_2(y)$, то $\varphi(y)$ получаем в явном виде (имеем шесть случаев: $k \equiv 0$, $p_1 \equiv 0$, $m \equiv 0$, $q_1 \equiv 0$, $k = q_1$, $p_1 = m$).

3. Дальнейшее исследование уравнения (6) в случае, если $A_1(y) \equiv 0$, проводится аналогично п. 2. При этом рассуждения должны проводиться многократно. А именно, потребуется исследовать уравнение

$$A_i(y)E(y)\varphi(y) + \int_0^y B_i(\beta, y)E(\beta)\varphi(\beta)d\beta =$$
$$= (E(y)\lambda(y))^{(i)} - \psi''(0)m^{(i-1)}(y) - \psi'(0)f^{(i)}(y) - \varphi(0)g^{(i)}(y), \quad i = 2, 3, \ldots, \quad (10)$$

где

$$A_i(y) = B_{i-1}(y, y) = k(0, y)p_1^{(i-2)}(y) + m^{(i-2)}(y)q_1(y),$$
$$B_i(\beta, y) = B_{i-1\,y}(\beta, y) = k(0, \beta)p_1^{(i-1)}(y) + m^{(i-1)}(y)q_1(\beta),$$
$$f^{(i)}(y) = n^{(i)}(y) - b(0,0)\frac{\partial^i b(0, y)}{\partial y^i} - 2b(0,0)\frac{\partial^{i-1} a_x(0, y)}{\partial y^i},$$
$$g^{(i)}(y) = b_x(0,0)m^{(i-1)}(y) + b(0,0)n^{(i)}(y),$$

причем следует считать $\lambda(y) \in C^i[0, y_1]$, $a, b \in C^{i+1}(\overline{D})$, $c \in C^i(\overline{D})$. Уравнение (10) при данном i получается дифференцированием уравнения при $i-1$ в случае, если $A_{i-1}(y) \equiv 0$. Структура уравнений (10) совершенно аналогична структуре уравнения (9), следовательно, рассуждения п. 2 с очевидными изменениями переносятся на уравнения (10). При каждом значении $i = 2, 3, \ldots$ могут быть выделены различные случаи зависимости от произвольных постоянных.

Исследование связи между $\mu(x)$ и $\psi(x)$ проводится аналогично вышеизложенному. Чтобы получить для этого аналог (6), надо в (6) поменять ролями переменные x и y, функции a и b, и заменить $\lambda(y)$, $\psi''(0)$, $\psi'(0)$, $\varphi(0)$, $k(0, y)$ соответственно на $\mu(x)$, $\varphi''(0)$, $\varphi'(0)$, $\psi(0)$, $h(x, 0)$.

Установленные результаты позволяют исследовать для уравнения (1) вопросы разрешимости характеристических задач с нормальными производными до третьего порядка включительно в граничных условиях. Так, задача с условиями

$$u_{xxx}(0, y) = \lambda(y), \quad u_{yyy}(x, 0) = \mu(x)$$

допускает регулярное решение, которое может зависеть от одной до пяти констант либо вовсе не зависеть от констант.

В заключение заметим, что описанным выше способом можно получить уравнения, связывающие $u(x, y)$ и ее нормальные производные любого порядка на характеристиках.

Литература

1. Zhegalov V.I. *Relation between the boundary values of Goursat problem and the normal derivatives* // Conditionally Well–Posed Problems. – Moscow: TVP Sc. Publ. – 1994. – P. 346–349.
2. Котухов М.П. *О некоторых дифференциальных свойствах решений одного уравнения в частных производных* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 5. – С. 59–62.
3. Смирнов В.И. *Курс высшей математики.* Т.4. Ч.2. – 6-е изд. – М.: Наука, 1981. – 550 с.

Казанский государственный университет

Поступила 29.10.1997