ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 5 (540)

УДК 517.958:535.4

И.Н. ПЛЕЩИНСКИЙ, Н.Б. ПЛЕЩИНСКИЙ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ПОЛУОТКРЫТЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

Задача дифракции электромагнитной волны на стыке полуоткрытых диэлектрических волноводов сведена к интегральным уравнениям различного вида, в том числе к регулярному интегральному уравнению относительно коэффициентов разложения поля по гармоникам непрерывного и дискретного спектра. Использован метод вспомогательной переопределенной граничной задачи. Необходимые и достаточные условия разрешимости переопределенных задач для уравнения Гельмгольца в четверти плоскости, в полуполосе и в полубесконечных слоистых областях найдены в форме зависимостей между граничными функциями.

Введение

Задачи сопряжения волноводных структур образуют один из основных разделов волноводной электродинамики. К этой группе относятся как задачи о собственных волнах в сложных средах, так и задачи дифракции электромагнитных волн на неоднородностях различных типов, в том числе на стыках полубесконечных волноводов. В задачах дифракции задается набегающая на стык собственная волна одной из частей структуры. Нужно найти электромагнитное поле, расходящееся от стыка по отдельным волноводам (обычно в виде суммы собственных волн). При этом практически важно, например, рассчитать такой режим согласования двух волноводов, при котором энергия волн одного из них оптимально преобразуется в энергию волн другого.

Ссылки на первые публикации, посвященные теоретическим и экспериментальным исследованиям открытых диэлектрических структур, имеются в [1]. Теория диэлектрических волноводов была построена относительно недавно. До работ Хондроса и Дебая считалось, что волноводные свойства имеют только структуры с идеально проводящими элементами границ. Математические основы интегральной оптики и оптоэлектроники, свойства планарных волноводов и оптических волокон, а также перспективы их использования в различного рода устройствах изложены в монографиях и сборниках обзорных работ (напр., [2]–[5]).

Для однослойных волноводов с металлическими стенками одинакового сечения (закрытых волноводов) задача сопряжения решается достаточно просто, поскольку компоненты их собственных волн одинаково зависят от поперечных координат. Поэтому каждой собственной волне, приходящей с бесконечности, соответствует пара волн, расходящихся от стыка. Для задач сопряжения электромагнитных полей в открытых диэлектрических волноводах это не так. Такие задачи являются существенно более сложными еще и потому, что соответствующие дифференциальные операторы имеют не только дискретный, но и непрерывный спектр.

В самом общем случае условия сопряжения на стыке волноводов могут быть сведены к системе интегральных уравнений относительно искомых функций — коэффициентов разложения поля по волнам непрерывного спектра, в этих уравнениях содержатся также и искомые постоянные — коэффициенты разложения по волнам дискретного спектра. Аналитические решения таких систем уравнений построить не удается, а стандартные приближенные методы, как следует из анализа известных нам работ в данном направлении, оказываются слишком сложными и мало эффективными.

В [6] в разложении электромагнитных полей в волноводах слева и справа от стыка учитывались только волны дискретного спектра. В [7] использовалось приближение поверхностных волн, т. е. отраженная волна была представлена в виде суммы направляемых мод. Более строгий подход принят в [8] (также [1], гл. 9, § 5), здесь искомые амплитуды разложены по ортогональным функциям (полиномам Лагерра) и исходная задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Аналогичный метод использован в [9] при исследовании задачи дифракции электромагнитной ТЕ-волны на скачке в поперечном сечении плоского симметричного волновода, в этой работе волны непрерывного спектра были представлены в виде ряда по функциям Лагерра. При решении системы функциональных уравнений, полученной из условий сопряжения полей, применялся метод Галёркина–Ритца.

Цель данной работы — распространить метод вспомогательной переопределенной задачи на задачу о стыке диэлектрических волноводов. Этот метод был применен в [10] при исследовании задачи о ступенчатой неоднородности в волноводе с металлическими стенками, а также некоторых других задач. Обзор публикаций, посвященных различным обобщениям метода, имеется в [11]. В ([12], § 14) задача о стыке планарных диэлектрических волноводов сведена к бисингулярному интегральному уравнению, но вопрос о возможных методах его исследования остался открытым.

Основная идея метода вспомогательной переопределенной задачи состоит в следующем. Разделим сложную волноводную структуру на простые подобласти, как это принято в рамках общего метода частичных областей (или метода сшивания). В каждой подобласти построим решение вспомогательной краевой задачи для системы уравнений, описывающих электромагнитное поле. Но на части границы подобласти, вдоль которой эта подобласть сопрягается с другими, зададим больше граничных условий, чем нужно для корректной постановки задачи. Необходимые и достаточные условия разрешимости таких переопределенных задач устанавливают связи между граничными функциями. Эти условия существенно используются в дальнейшем, в [10] они были названы интегральными (или сумматорными) тождествами. Такие тождества удобно использовать при сведении исходной задачи сопряжения к интегральным уравнениям 2-го рода или при регуляризации интегральных уравнений 1-го рода.

Как известно, собственные волны планарного диэлектрического волновода разделяются на три группы: волноводные моды, излучательные моды подложки и подложково-покровные излучательные моды, причем в последней группе выделяются моды четные и моды нечетные. Волноводные моды образуют дискретный спектр, а излучательные — непрерывный. Чтобы упростить рассуждения, рассмотрим случай, когда сопрягаемые волноводы являются полуоткрытыми (металлодиэлектрическими). Пусть центральный волноводный слой ограничен снизу идеально проводящей поверхностью, а сверху — неограниченной покровной средой. Будем предполагать, что волноводная структура является однородной вдоль одной из пространственных координат и электромагнитное поле не зависит от этой координаты. Тогда задача сопряжения волноводов может быть сформулирована как граничная задача для уравнения Гельмгольца.

1. Задача сопряжения для уравнения Гельмгольца

Рассмотрим следующую задачу для уравнения Гельмгольца с кусочно-постоянным коэффициентом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2(x, z)u = 0. \tag{1}$$

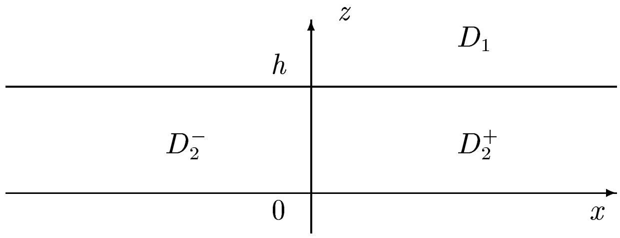

Рис. 1.

В областях D_1, D_2^- и D_2^+ (см. рис. 1) найти решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям и условиям сопряжения

$$
\begin{gathered}
u(x,0) = 0, \\
u(x,h+0) - u(x,h-0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x,h+0) - \frac{\partial u}{\partial z}(x,h-0) = 0, \\
u(z,0+0) - u(z,0-0) = u_0^0(z), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(z,0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(z,0-0) = u_1^0(z),
\end{gathered} \tag{2}
$$

а также условиям на бесконечности. Пусть коэффициент $k(x,z)$ в различных частях плоскости принимает вещественные значения k_1, k_2^+, k_2^-, причем $k_1 < k_2^+$ и $k_1 < k_2^-$.

Задача (1)–(2) представляет собой математическую модель процесса дифракции двумерной ($\partial/\partial y = 0$) TE-поляризованной собственной волны, набегающей по волноводам на стык ($x = 0$). Будем считать, что зависимость компонент поля от времени имеет вид $e^{-i\omega t}$. Выразим ненулевые компоненты через потенциальную функцию

$$
E_y = u, \quad H_x = \frac{-1}{i\omega\mu_0\mu}\frac{\partial u}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu}\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{3}
$$

Заданные функции $u_0^0(z)$, $u_1^0(z)$ — следы потенциальной функции $u^0(x,z)$ (набегающей на стык волны) и ее производной по нормали на стыке (касательных составляющих векторов E и H). Искомая комплекснозначная функция $u(x,z)$ — потенциальная функция рассеянного поля. Будем обозначать ее следы на стыке

$$
u_0^{\pm}(z) = u(z, 0 \pm 0), \quad u_1^{\pm}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z, 0 \pm 0).
$$

Тогда условия сопряжения на стыке волноводов имеют вид

$$
u_0^+(z) - u_0^-(z) = u_0^0(z), \quad u_1^+(z) - u_1^-(z) = u_1^0(z). \tag{4}
$$

Условия на бесконечности примем следующие: искомое решение должно быть ограничено при $z \to +\infty$ и распространяться (как волна) в направлениях $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ в полуплоскостях $x > 0$ и $x < 0$ соответственно. Волну назовем распространяющейся в некотором направлении, если она переносит энергию в этом направлении или (и) затухает.

В дальнейшем будут решаться две вспомогательные задачи для левой ($x < 0$) и правой ($x > 0$) частей рассматриваемой структуры. Эти задачи являются переопределенными, т. к. на полуоси $z > 0$ заданы значения как решений $u_0^{\pm}(z)$, так и их производных по нормали $u_1^{\pm}(z)$. Связь между этими граничными функциями в переопределенных задачах будет использована при сведении исходной задачи дифракции к интегральным уравнениям различного вида.

2. Моды полуоткрытого диэлектрического волновода

Рассмотрим бесконечный в направлении оси x полуоткрытый волновод, состоящий из областей D_1 и D_2 (предполагается, что слой $0 < z < h$ заполнен однородным диэлектриком, $k_2^- = k_2^+ = k_2$). Найдем потенциальные функции его собственных волн вида $u(x,z) = X(x)Z(z)$ (метод разделения переменных). В каждой из областей D_j, $j = 1,2$, должно выполняться равенство

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k_j^2 = 0.$$

Введем комплексную постоянную разделения α так, что

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \alpha^2 = 0, \quad \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k_j^2 - \alpha^2 = 0. \tag{5}$$

В дальнейшем достаточно считать, что α принадлежит верхней или нижней полуплоскости вместе с одной из вещественных полуосей. Тогда значения α^2 заполняют всю комплексную плоскость. В фундаментальной системе решений первого уравнения из (5) содержатся функции $e^{-i\alpha x}$ и $e^{i\alpha x}$.

Рассмотрим подробно случай, когда при α из третьего квадранта, дополненного ограничивающими его полуосями,

$$X(x) = e^{-i\alpha x}.$$

При выбранной зависимости компонент электромагнитного поля от времени вида $e^{-i\omega t}$ эта функция определяет волну, распространяющуюся вдоль оси x (переносящую энергию при $\mathrm{Re}\,\alpha < 0$ и затухающую при $\mathrm{Im}\,\alpha < 0$). Если изменить знак у параметра α (перевести α в первый квадрант), то направление распространения решения меняется на противоположное.

Выберем однозначную непрерывную ветвь функции

$$\gamma_j(\alpha) = \sqrt{k_j^2 - \alpha^2}, \quad j = 1,2,$$

так, чтобы в одной из точек положительной мнимой полуоси в комплексной плоскости, разрезанной по отрезку вещественной оси $[-k_j, k_j]$, значение ее было положительным (напр., пусть $\gamma_j(i) = \sqrt{k_j^2 + 1}$). Тогда $\gamma_j(\alpha)$ переводит третий квадрант во второй, на рис. 2 показано соответствие границ при этом отображении.

При чисто мнимом α или при $\alpha \in (-k_j, 0)$ значения $\gamma_j(\alpha)$ вещественные и отрицательные, а при $\alpha \in (-\infty, -k_j)$ чисто мнимые с положительной мнимой частью.

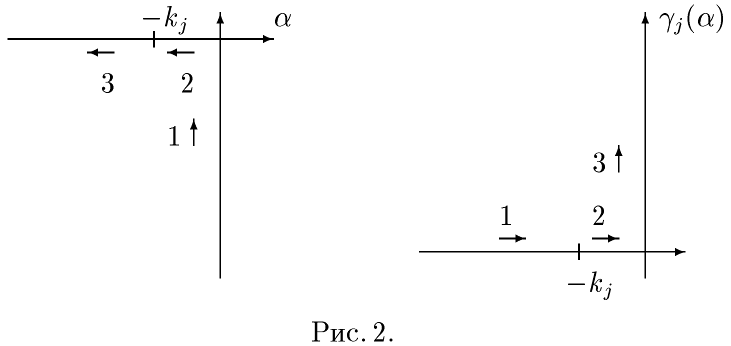

Рис. 2.

В фундаментальной системе решений второго уравнения из (5) содержатся функции $e^{-i\gamma_j(\alpha)z}$ и $e^{i\gamma_j(\alpha)z}$, поэтому $Z(z) = c_1 e^{-i\gamma_2(\alpha)z} + c_2 e^{i\gamma_2(\alpha)z}$ в области D_2. В области D_1 при вещественном $\gamma_1(\alpha)$ также имеем $Z(z) = c_1 e^{-i\gamma_1(\alpha)z} + c_2 e^{i\gamma_1(\alpha)z}$ (отдельные слагаемые определяют уходящие и приходящие решения, но каждое из них ограничено на бесконечности). При $\mathrm{Im}\,\gamma_1(\alpha) \neq 0$ в общем решении остается только второе слагаемое, затухающее на бесконечности.

Пусть $\alpha \in (-i\infty, i0)$ или $\alpha \in (-k_1, 0)$. При этом значения $\gamma_1(\alpha)$ и $\gamma_2(\alpha)$ вещественные (по предположению $k_1 < k_2$). Тогда $Z(z) = Ae^{-i\gamma_1(\alpha)(z-h)} + Be^{i\gamma_1(\alpha)(z-h)}$ при $z > h$ (смещение z на h введено для удобства) и $Z(z) = Ce^{-i\gamma_2(\alpha)z} + De^{i\gamma_2(\alpha)z}$ при $0 < z < h$. Из граничного условия при $z = 0$ следует $C + D = 0$, тогда $Z(z) = -2iC\sin\gamma_2(\alpha)z$ при $0 < z < h$. Условия сопряжения при $z = h$ сводится к равенствам

$$A + B = -2iC\sin\gamma_2(\alpha)h, \quad -A + B = -2C\frac{\gamma_2(\alpha)}{\gamma_1(\alpha)}\cos\gamma_2(\alpha)h.$$

Поэтому

$$Z(z) = -2iC(\alpha)f(\alpha; z) \quad \text{и} \quad u(x,z) = -2iC(\alpha)f(\alpha; z)e^{-i\alpha x}, \tag{6}$$

где

$$f(\alpha; z) = \begin{cases} z > h: & \frac{\gamma_2(\alpha)}{\gamma_1(\alpha)}\cos\gamma_2(\alpha)h\sin\gamma_1(\alpha)(z-h) + \sin\gamma_2(\alpha)h\cos\gamma_1(\alpha)(z-h); \\ 0 < z < h: & \sin\gamma_2(\alpha)z. \end{cases} \tag{7}$$

Пусть теперь α принадлежит $(-\infty, -k_1)$ или третьему квадранту. При этом $\operatorname{Im}\gamma_1(\alpha) \neq 0$ и значения $\gamma_2(\alpha)$ тоже в общем случае комплексные (они вещественные только при $\alpha \in (-k_2, -k_1)$). В этом случае также $Z(z) = -2iC\sin\gamma_2(\alpha)z$ при $0 < z < h$, но $Z(z) = Be^{-\gamma_1(\alpha)(z-h)}$ при $z > h$. Условия сопряжения при $z = h$ дают

$$B = -2iC\sin\gamma_2(\alpha)h, \quad i\gamma_1(\alpha)B = -2iC\cos\gamma_2(\alpha)h\gamma_2(\alpha).$$

У этой системы уравнений ненулевое решение существует тогда и только тогда, когда

$$i\gamma_1(\alpha)\sin\gamma_2(\alpha)h - \gamma_2(\alpha)\cos\gamma_2(\alpha)h = 0. \tag{8}$$

Можно показать, что характеристическое уравнение (8) имеет только конечное число вещественных корней $\alpha_j \in (-k_2, -k_1)$, $j = 1, \ldots, n$. При этом значения $\gamma_1(\alpha_j)$ чисто мнимые с положительной мнимой частью, а значения $\gamma_2(\alpha_j)$ вещественные. Обозначим $i\gamma_1(\alpha_j) = -\delta_1(\alpha_j)$, $\delta_1(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - k_1^2}$. Таким образом, при $\alpha = \alpha_j \in (-k_2, -k_1)$ в формуле (6)

$$f(\alpha; z) = \begin{cases} z > h: & \sin\gamma_2(\alpha)he^{-\delta_1(\alpha)(z-h)} \quad \text{или} \quad -\frac{\gamma_2(\alpha)}{\delta_1(\alpha)}\cos\gamma_2(\alpha)he^{-\delta_1(\alpha)(z-h)}; \\ 0 < z < h: & \sin\gamma_2(\alpha)z. \end{cases} \tag{9}$$

В дальнейшем не будем писать множитель $-2i$ в формуле (6), т.к. $C(\alpha)$ — произвольная функция параметра α.

Теорема 1. *Решение задачи о стыке волноводов может быть найдено в виде*

$$u^{\pm}(x,z) = \int\limits_{\ddot{\urcorner}} C^{\pm}(\alpha)f^{\pm}(\alpha; z)e^{\mp i\alpha x}\,d\alpha, \tag{10}$$

где $C^{\pm}(\alpha)$ — некоторые функции.

В формулах (10) верхний знак относится к правой части волноводной структуры, а нижний — к левой. Направления распространения волн соответствуют условиям излучения — от стыка на бесконечность. Зависимость $f^{\pm}(\alpha; z)$ от поперечной координаты задается формулой (7) для волн непрерывного спектра (двух типов) и формулой (9) для волн дискретного спектра, при этом $k_2 = k_2^{\pm}$. Знаком $\ddot{\urcorner}$ ("клюшка с шайбами") обозначен сложный контур на комплексной плоскости, состоящий из мнимой отрицательной полуоси, интервала $(-k_1, 0)$ и конечного числа точек $\alpha_j \in (-k_2, -k_1)$, $j = 1, \ldots, n$. Поэтому функции на $\ddot{\urcorner}$ нужно рассматривать как функции на непрерывном спектре, дополненные конечным числом значений на дискретном спектре. Интегралы по $\ddot{\urcorner}$ следует понимать так:

$$\int\limits_{\ddot{\urcorner}} C(\alpha) f(\alpha; z) e^{\mp i\alpha x}\, d\alpha = \int\limits_{\urcorner} C(\alpha) f(\alpha; z) e^{\mp i\alpha x}\, d\alpha + \sum_{j=1}^{n} C_j f(\alpha_j; z) e^{\mp i\alpha_j x},$$

где $C_j = C(\alpha_j)$.

Обсудим, насколько правомерно искать потенциальные функции поля в полубесконечных волноводах в виде (10). Во-первых, действительно ли эти формулы дают общее решение уравнения Гельмгольца в слоистой области в классе решений, распространяющихся вправо и влево? Во-вторых, можно ли искать поле в полубесконечном волноводе в том виде, в каком оно было найдено в волноводе бесконечном?

Доказательство полноты системы собственных волн полуоткрытого волновода может быть получено и общим методом теории спектральных задач (напр., [13], гл. VI), но этот путь достаточно сложен при наличии и дискретного, и непрерывного спектра. Переход от бесконечного волновода к полубесконечному корректен в силу того, что искомое решение уравнения Гельмгольца всегда можно аналитически продолжить через прямолинейную границу (в нашем случае ось z) ([13], с. 333).

Положительный ответ на оба поставленных вопроса получим после того, как построим общее решение уравнение Гельмгольца в полубесконечной слоистой области (смещенная четверть плоскости и полуполоса) методом интегрального преобразования Фурье. В [14] и [15] этим методом были найдены общие представления решений уравнения Гельмгольца в четверти плоскости и в слоистой плоско-параллельной среде.

3. Переопределенная граничная задача для уравнения Гельмгольца в смещенной четверти плоскости

Получим общее представление решений уравнения Гельмгольца в четверти плоскости

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k_1^2 u = 0, \quad x > 0, \quad z > h. \tag{11}$$

Зададим переопределенные граничные условия (следы решения и его нормальной производной на границе, рис. 3)

$$u(0+0, z) = a_0(z), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0+0, z) = a_1(z), \quad u(x, h+0) = b_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, h+0) = b_1(x). \tag{12}$$

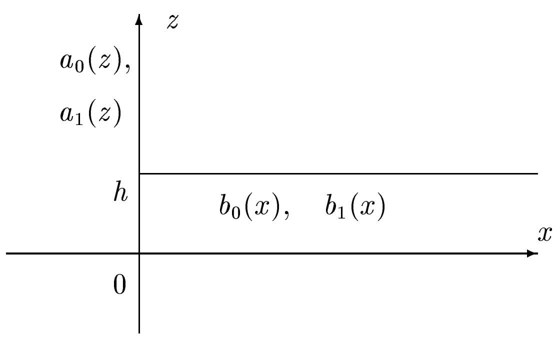

Рис. 3.

Уточним и дополним некоторые результаты, полученные в работе [14] при исследовании свойств решений уравнения Гельмгольца в квадранте.

Доопределим искомое решение нулем вне четверти плоскости и будем рассматривать как распределение медленного роста на бесконечности. Перейдем в уравнении (11) от классических производных к обобщенным и применим преобразование Фурье по всем переменным: $x \to \xi$ и $z \to \zeta$. Получим, что образ Фурье искомого распределения должен удовлетворять уравнению

$$2\pi(k_1^2 - \xi^2 - \zeta^2)u(\xi,\zeta) = a_1(\zeta) - i\xi a_0(\zeta) + e^{ih\zeta}[b_1(\xi) - i\zeta b_0(\xi)]. \tag{13}$$

Это уравнение нужно решить так, чтобы получилось $u(x,z) = 0$ при $x < 0$ и $z < h$ (или, что одно и то же в соответствии с теоремой Винера–Пэли, чтобы $u(\xi,\zeta)$ было аналитически продолжимо по ξ и ζ в верхние полуплоскости комплексных плоскостей переменных $\dot{\xi}$ и $\dot{\zeta}$ соответственно).

Теорема 2. *Распределение $u(x,z)$ есть решение переопределенной граничной задачи* (11), (12) *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} a_1(\gamma_1(\xi)) - i\xi a_0(\gamma_1(\xi)) + e^{i\gamma_1(\xi)h}[b_1(\xi) - i\gamma_1(\xi)b_0(\xi)] = 0, \quad \xi \in (-\infty,-k_1)\cup(-k_1,0),\\ a_1(-\gamma_1(\xi)) - i\xi a_0(-\gamma_1(\xi)) + e^{-i\gamma_1(\xi)h}[b_1(\xi) + i\gamma_1(\xi)b_0(\xi)] = 0, \quad \xi \in (0,k_1)\cup(k_1,+\infty)\end{aligned} \tag{14}$$

и

$$\begin{aligned} a_1(\zeta) - i\gamma_1(\zeta)a_0(\zeta) + e^{ih\zeta}[b_1(\gamma_1(\zeta)) - i\zeta b_0(\gamma_1(\zeta))] = 0, \quad \zeta \in (-\infty,-k_1)\cup(-k_1,0),\\ a_1(\zeta) + i\gamma_1(\zeta)a_0(\zeta) + e^{ih\zeta}[b_1(-\gamma_1(\zeta)) - i\zeta b_0(-\gamma_1(\zeta))] = 0, \quad \zeta \in (0,k_1)\cup(k_1,+\infty).\end{aligned} \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $u(x,z)$ — решение задачи. Тогда его образ Фурье удовлетворяет уравнению (13). Поделим обе части (13) на $k_1^2 - \xi^2 - \zeta^2$. Получим

$$\frac{b_1(\xi) - i\zeta b_0(\xi)}{k_1^2 - \xi^2 - \zeta^2} = \frac{B_1(\xi)}{\zeta - \gamma_1(\xi)} + \frac{B_2(\xi)}{\zeta + \gamma_1(\xi)},$$

где

$$B_1(\xi) = \frac{-b_1(\xi) + i\gamma_1(\xi)b_0(\xi)}{2\gamma_1(\xi)}, \quad B_2(\xi) = \frac{b_1(\xi) + i\gamma_1(\xi)b_0(\xi)}{2\gamma_1(\xi)}.$$

При комплексных корнях $\pm\gamma_1(\xi)$ полинома дроби $\frac{1}{\zeta \mp \gamma_1(\xi)}$ — обычные функции, а при вещественных корнях ($-k_1 < \xi < k_1$) — распределения $\frac{1}{\zeta + i0 \mp \gamma_1(\xi)}$. Во втором случае деление проводится методом выхода в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости $\dot{\zeta}$.

Так как

$$a_j(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_h^{+\infty} a_j(z_1) e^{iz_1\zeta}\, dz_1,$$

то в силу формулы

$$\frac{1}{k_1^2 - \xi^2 - \zeta^2} = \frac{1}{2\gamma_1(\xi)}\Big[-\frac{1}{\zeta - \gamma_1(\xi)} + \frac{1}{\zeta + \gamma_1(\xi)}\Big]$$

имеем

$$\frac{a_1(\zeta) - i\xi a_0(\zeta)}{k_1^2 - \xi^2 - \zeta^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_h^{+\infty} \frac{a_1(z_1) - i\xi a_0(z_1)}{2\gamma_1(\xi)} \Big[-\frac{1}{\zeta - \gamma_1(\xi)} + \frac{1}{\zeta + \gamma_1(\xi)}\Big] e^{iz_1\zeta}\, dz_1.$$

Выполним обратное преобразование Фурье по $\zeta \to z$ и найдем выражения для $u(\xi,z)$ при $z < h$ для различных диапазонов изменения ξ. Получим при $\xi < -k_1$

$$u(\xi,z) = -ie^{-i\gamma_1(\xi)z}\,\frac{1}{2\gamma_1(\xi)}\big[a_1(\gamma_1(\xi)) - i\xi a_0(\gamma_1(\xi)) + e^{i\gamma_1(\xi)h}[b_1(\xi) - i\gamma_1(\xi)b_0(\xi)]\big]$$

и при $\xi > k_1$

$$u(\xi,z) = ie^{i\gamma_1(\xi)z}\,\frac{1}{2\gamma_1(\xi)}\big[a_1(-\gamma_1(\xi)) - i\xi a_0(-\gamma_1(\xi)) + e^{-i\gamma_1(\xi)h}[b_1(\xi) + i\gamma_1(\xi)b_0(\xi)]\big]$$

(и нуль в остальных случаях). Следовательно, если $u(\xi, z) = 0$ при $z < h$, то условия (14) выполняются при $\xi < -k_1$ и $\xi > k_1$.

Аналогично, если $u(x, \zeta) = 0$ при $x < 0$, то условия (15) выполняются при $\zeta < -k_1$ и $\zeta > k_1$ соответственно. Чтобы убедиться в этом, достаточно переставить местами x и y, ξ и ζ, a и b, A и B.

Продолжим полученные равенства на интервалы $(-k_1, 0)$ и $(0, k_1)$. Покажем, что условия (14) при $|\xi| > k_1$ и условия (15) при $|\zeta| > k_1$ равносильны. Для этого уточним некоторые свойства функции $\gamma_1(\dot\xi)$. На рис. 4 показано, как преобразуются квадранты комплексной плоскости и их границы при преобразовании $\pm\gamma_1(\dot\xi)$.

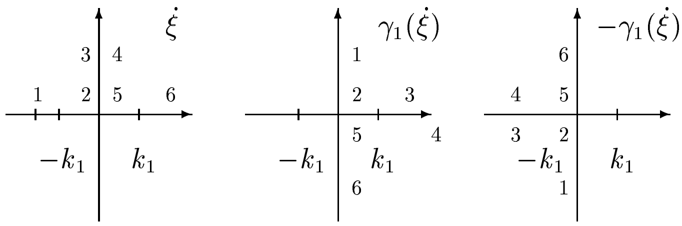

Рис. 4.

Рассмотрим первое равенство из (14) при $\xi < -k_1$ и продолжим его по ξ в верхнюю полуплоскость $\dot\xi$, точнее, в квадрант II. (Но не дальше, т. к. при $\dot\xi \in \mathrm{II}$ имеем $\gamma_1(\dot\xi) \in \mathrm{I}$; нельзя продолжить $\dot\xi$ в квадрант I, т. к. при этом $\gamma_1(\dot\xi)$ попадет в квадрант IV.) Поэтому

$$a_1(\gamma_1(\dot\xi)) - i\dot\xi a_0(\gamma_1(\dot\xi)) + e^{i\gamma_1(\dot\xi)h}[b_1(\dot\xi) - i\gamma_1(\dot\xi)b_0(\dot\xi)] = 0, \quad \dot\xi \in \mathrm{II} \quad \{\text{и тогда } \ \gamma_1(\dot\xi) \in \mathrm{I}\}.$$

Здесь и дальше римскими цифрами обозначены квадранты комплексной плоскости. Если $\dot\xi \to \xi \in (-k_1, 0)$, то получим первое равенство из (14) при $\xi \in (-k_1, 0)$. Теперь переведем $\dot\xi$ на мнимую положительную полуось (рис. 4, участок границы 3), пусть $\dot\xi \to -\gamma_1(\zeta)$, $\zeta > k_1$. При этом $\gamma_1(-\gamma_1(\zeta)) = \zeta$ (только если $\zeta > k_1$). Таким образом, получили второе равенство из (14):

$$a_1(\zeta) + i\gamma_1(\zeta)a_0(\zeta) + e^{i\zeta h}[b_1(-\gamma_1(\zeta)) - i\zeta b_0(-\gamma_1(\zeta))] = 0, \quad \zeta > k_1.$$

Другие случаи рассматриваются аналогично.

С другой стороны, если условия (14) и (15) выполнены (хотя бы в малой части соответствующих интервалов), то решение уравнения (13) будет образом Фурье некоторой функции $u(x, z)$, равной нулю при $x < 0$ и $z < h$. Эта функция, в свою очередь, является решением исходной переопределенной задачи.

Заметим, что в [14] условия разрешимости переопределенной задачи в квадранте $x > 0$, $z > 0$ были записаны в комплексной области при $\dot\xi \in \mathrm{I}$ и $\dot\xi \in \mathrm{II}$.

Рассмотрим теперь структуру решения $u(x, z)$ задачи Коши при $x > 0$, $z > h$. Так как

$$2\pi u(\xi, \zeta) = \frac{A_1(\zeta)}{\xi - \gamma_1(\zeta)} + \frac{A_2(\zeta)}{\xi + \gamma_1(\zeta)} + e^{ih\zeta}\frac{B_1(\xi)}{\zeta - \gamma_1(\xi)} + e^{ih\zeta}\frac{B_2(\xi)}{\zeta + \gamma_1(\xi)},$$

то при $x > 0$, $z > h$ (обратные преобразования Фурье можно проводить в любом порядке)

$$\sqrt{2\pi} i u(x, z) = \int_{-\infty}^{-k_1} A_2(\zeta)e^{i\gamma_1(\zeta)x}e^{-i\zeta z}\,d\zeta + \int_{k_1}^{+\infty} A_1(\zeta)e^{-i\gamma_1(\zeta)x}e^{-i\zeta z}\,d\zeta + \int_{-k_1}^{k_1} [A_1(\zeta)e^{-i\gamma_1(\zeta)x} +$$
$$+ A_2(\zeta)e^{i\gamma_1(\zeta)x}]e^{-i\zeta z}\,d\zeta + \int_{-\infty}^{-k_1} B_2(\xi)e^{i\gamma_1(\xi)(z-h)}e^{-i\xi x}\,d\xi +$$
$$+ \int_{k_1}^{+\infty} B_1(\xi)e^{-i\gamma_1(\xi)(z-h)}e^{-i\xi x}\,d\xi + \int_{-k_1}^{k_1} [B_1(\xi)e^{-i\gamma_1(\xi)(z-h)} + B_2(\xi)e^{i\gamma_1(\xi)(z-h)}]e^{-i\xi x}\,d\xi.$$

В отдельных слагаемых в правой части собраны элементарные гармоники с различным поведением при $z \to +\infty$ и $x \to +\infty$. Четыре "длинных" интеграла (по бесконечным промежуткам) содержат затухающие волны: первые два при $z \to +\infty$ и другие два при $x \to +\infty$. В "коротких" интегралах по промежутку от $-k_1$ до k_1 содержатся волны, распространяющиеся в различных направлениях.

"Короткие" интегралы можно переписать в виде

$$\int_{-k_1}^{0} \left\{ \left[e^{i\gamma_1(\xi)h} B_1(\xi) - A_2(\gamma_1(\xi)) \frac{\xi}{\gamma_1(\xi)} \right] e^{-i\gamma_1(\xi)z} + \right.$$
$$\left. + \left[e^{-i\gamma_1(\xi)h} B_2(\xi) - A_2(-\gamma_1(\xi)) \frac{\xi}{\gamma_1(\xi)} \right] e^{i\gamma_1(\xi)z} \right\} e^{-i\xi x}\, d\xi +$$
$$+ \int_{0}^{k_1} \left\{ \left[e^{i\gamma_1(\xi)h} B_1(\xi) + A_1(\gamma_1(\xi)) \frac{\xi}{\gamma_1(\xi)} \right] e^{-i\gamma_1(\xi)z} + \right.$$
$$\left. + \left[e^{-i\gamma_1(\xi)h} B_2(\xi) + A_1(-\gamma_1(\xi)) \frac{\xi}{\gamma_1(\xi)} \right] e^{i\gamma_1(\xi)z} \right\} e^{-i\xi x}\, d\xi.$$

Делается это с помощью замены переменных в интегралах. Например,

$$\int_{-k_1}^{0} A_1(\zeta) e^{-i\gamma_1(\zeta)x} e^{-i\zeta z}\, d\zeta = \int_{0}^{k_1} A_1(-\gamma_1(\xi)) \frac{\xi}{\gamma_1(\xi)} e^{i\gamma_1(\xi)z} e^{-i\xi x}\, d\xi,$$

т. к. при $\zeta \in (-k_1, 0)$ и $\xi = \gamma_1(\zeta) = \sqrt{k_1^2 - \zeta^2} \in (0, k_1)$ имеем $\zeta = -\gamma_1(\xi) = -\sqrt{k_1^2 - \xi^2}$ и $d\zeta = \xi\, d\xi/\gamma_1(\xi)$.

Аналогично,

$$\int_{0}^{k_1} A_2(\zeta) e^{i\gamma_1(\zeta)x} e^{-i\zeta z}\, d\zeta = -\int_{-k_1}^{0} A_2(\gamma_1(\xi)) \frac{\xi}{\gamma_1(\xi)} e^{-i\gamma_1(\xi)z} e^{-i\xi x}\, d\xi,$$

т. к. при $\zeta \in (0, k_1)$ и $\xi = -\gamma_1(\zeta) = -\sqrt{k_1^2 - \zeta^2} \in (-k_1, 0)$ имеем $\zeta = \gamma_1(\xi) = \sqrt{k_1^2 - \xi^2}$ и $d\zeta = -\xi\, d\xi/\gamma_1(\xi)$.

"Длинные" интегралы тоже можно преобразовать к виду, близкому к формуле обратного преобразования Фурье. Например,

$$\int_{-\infty}^{-k_1} A_2(\zeta) e^{i\gamma_1(\zeta)x} e^{-i\zeta z}\, d\zeta = -\int_{-i\infty}^{-i0} A_2(\gamma_1(\alpha)) \frac{\alpha}{\gamma_1(\alpha)} e^{-i\gamma_1(\alpha)z} e^{-i\alpha x}\, d\alpha,$$

т. к. при $\zeta \in (-\infty, -k_1)$ и $\alpha = -\gamma_1(\zeta) \in (-i\infty, -i0)$ имеем $\zeta = \gamma_1(\alpha) = \sqrt{k_1^2 - \alpha^2}$ и $d\zeta = -\alpha\, d\alpha/\gamma_1(\alpha)$.

Аналогично,

$$\int_{k_1}^{+\infty} A_1(\zeta) e^{-i\gamma_1(\zeta)x} e^{-i\zeta z}\, d\zeta = -\int_{-i\infty}^{-i0} A_1(-\gamma_1(\alpha)) \frac{\alpha}{\gamma_1(\alpha)} e^{i\gamma_1(\alpha)z} e^{-i\alpha x}\, d\alpha,$$

т. к. при $\zeta \in (k_1, +\infty)$ и $\alpha = \gamma_1(\zeta) \in (-i\infty, -i0)$ имеем $\zeta = -\gamma_1(\alpha) = -\sqrt{k_1^2 - \alpha^2}$ и $d\zeta = \alpha\, d\alpha/\gamma_1(\alpha)$.

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Любое решение уравнение Гельмгольца в четверти плоскости можно записать в виде*

$$u(x, z) = \int_{\top} U(\alpha; z) e^{-i\alpha x}\, d\alpha, \tag{16}$$

где интегрирование идет по контуру $\top$*, составленному из границ третьего и четвертого квадрантов комплексной плоскости. Плотность* $U(\alpha; z)$ *на отдельных частях контура определяет амплитуды гармоник с различным поведением, распространяющихся и затухающих.*

4. Переопределенная граничная задача для уравнения Гельмгольца в полуполосе

Рассмотрим переопределенную граничную задачу для уравнения Гельмгольца в полуполосе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k_2^2\, u = 0, \quad x > 0, \quad 0 < z < h, \tag{17}$$

с граничными условиями (см. рис. 3)

$$\begin{gathered} u(0+0, z) = c_0(z), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0+0, z) = c_1(z), \\ u(x, h-0) = b_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, h-0) = b_1(x), \quad u(x, 0+0) = d_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0+0) = d_1(x). \end{gathered} \tag{18}$$

Будем искать решения, распространяющиеся в полуполосе в направлении оси x.

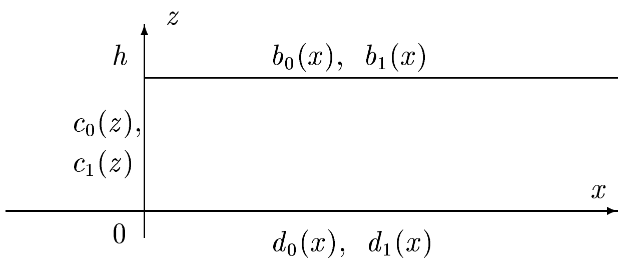

Рис. 5.

Как и в случае четверти плоскости, используем метод интегрального преобразования Фурье. Можно предвидеть, какой вид будут иметь условия разрешимости переопределенной задачи, а также какова структура ее решения, поскольку полуполоса — часть четверти плоскости.

Теорема 4. *Распределение $u(x, z)$ — решение переопределенной граничной задачи* (17), (18) *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered} d_1(\xi) - i\gamma_2(\xi) d_0(\xi) - e^{i\gamma_2(\xi)h}[b_1(\xi) - i\gamma_2(\xi) b_0(\xi)] + c_1(\gamma_2(\xi)) - i\xi c_0(\gamma_2(\xi)) = 0, \\ d_1(\xi) + i\gamma_2(\xi) d_0(\xi) - e^{-i\gamma_2(\xi)h}[b_1(\xi) + i\gamma_2(\xi) b_0(\xi)] + c_1(-\gamma_2(\xi)) - i\xi c_0(-\gamma_2(\xi)) = 0, \end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered} -c_1(\zeta) + i\gamma_2(\zeta) c_0(\zeta) + e^{ih\zeta}[b_1(\gamma_2(\zeta)) - i\zeta b_0(\gamma_2(\zeta))] - d_1(\gamma_2(\zeta)) + i\zeta d_0(\gamma_2(\zeta)) = 0, \quad \zeta < -k_2, \\ c_1(\zeta) + i\gamma_2(\zeta) c_0(\zeta) - e^{ih\zeta}[b_1(-\gamma_2(\zeta)) - i\zeta b_0(-\gamma_2(\zeta))] + d_1(-\gamma_2(\zeta)) - i\zeta d_0(-\gamma_2(\zeta)) = 0, \quad \zeta > k_2. \end{gathered} \tag{20}$$

Теорема 5. *Любое решение уравнения Гельмгольца в полуполосе можно записать в виде*

$$u(x, z) = \int_{\top} U(\alpha; z) e^{-i\alpha x}\, d\alpha. \tag{21}$$

Докажем оба этих утверждения. В случае полуполосы уравнение для образа Фурье имеет вид

$$2\pi(k_2^2 - \xi^2 - \zeta^2) u(\xi, \zeta) = c_1(\zeta) - i\xi c_0(\zeta) - e^{ih\zeta}[b_1(\xi) - i\zeta\, b_0(\xi)] + d_1(\xi) - i\zeta d_0(\xi). \tag{22}$$

Найдем условия на граничные функции, при которых $u(x, z) = 0$ при $z < 0$, $z > h$ и $x < 0$.

В правой части (22) содержится три группы слагаемых (с общим множителем). В первой группе слагаемых перейдем к прообразам Фурье

$$c_1(\zeta) - i\xi c_0(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^h [c_1(z_1) - i\xi c_0(z_1)] e^{iz_1\zeta}\, dz_1.$$

Поделим на $k_2^2-\xi^2-\zeta^2$ и получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^h \frac{c_1(z_1)-i\xi c_0(z_1)}{2\gamma_2(\xi)}\Big[-\frac{1}{\zeta-\gamma_2(\xi)}+\frac{1}{\zeta+\gamma_2(\xi)}\Big]e^{iz_1\zeta}\,dz_1.$$

Вторая и третья группы слагаемых такие же, как в случае полосы. Эти группы после деления на $k_2^2-\xi^2-\zeta^2$ принимают вид

$$\frac{D_1(\xi)}{\zeta-\gamma_2(\xi)}+\frac{D_2(\xi)}{\zeta+\gamma_2(\xi)}-e^{ih\zeta}\frac{B_1(\xi)}{\zeta-\gamma_2(\xi)}-e^{ih\zeta}\frac{B_2(\xi)}{\zeta+\gamma_2(\xi)}.$$

Тогда после обратного преобразования Фурье по $\zeta\to z$ имеем

$$\begin{aligned}2\pi u(\xi,z)=&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{D_1(\xi)}{\zeta-\gamma_2(\xi)}e^{-i\zeta z}\,d\zeta+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{D_2(\xi)}{\zeta+\gamma_2(\xi)}e^{-i\zeta z}\,d\zeta-\\&-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{B_1(\xi)}{\zeta-\gamma_2(\xi)}e^{-i\zeta(z-h)}\,d\zeta-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{B_2(\xi)}{\zeta+\gamma_2(\xi)}e^{-i\zeta(z-h)}\,d\zeta+\\&+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^h\frac{c_1(z_1)-i\xi c_0(z_1)}{2\gamma_2(\xi)}\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[-\frac{1}{\zeta-\gamma_2(\xi)}+\frac{1}{\zeta+\gamma_2(\xi)}\Big]e^{-i\zeta(z-z_1)}\,d\zeta\Big\}\,dz_1.\end{aligned}$$

Вычислим интегралы. Получим для $z<0$ при $\xi<-k_2$

$$\begin{aligned}u(\xi,z)=&\,ie^{-i\gamma_2(\xi)z}\frac{1}{2\gamma_2(\xi)}\times\\&\times\{-d_1(\xi)+i\gamma_2(\xi)d_0(\xi)-e^{i\gamma_2(\xi)h}[-b_1(\xi)+i\gamma_2(\xi)b_0(\xi)]-c_1(\gamma_2(\xi))+i\xi c_0(\gamma_2(\xi))\}\end{aligned}$$

и при $\xi>k_2$

$$\begin{aligned}u(\xi,z)=&\,ie^{i\gamma_2(\xi)z}\frac{1}{2\gamma_2(\xi)}\times\\&\times\{d_1(\xi)+i\gamma_2(\xi)d_0(\xi)-e^{-i\gamma_2(\xi)h}[b_1(\xi)+i\gamma_2(\xi)b_0(\xi)]+c_1(-\gamma_2(\xi))-i\xi c_0(-\gamma_2(\xi))\}.\end{aligned}$$

Точно так же, для $z>h$ при $\xi>-k_2$

$$\begin{aligned}u(\xi,z)=&-ie^{-i\gamma_2(\xi)z}\frac{1}{2\gamma_2(\xi)}\times\\&\times\{-d_1(\xi)+i\gamma_2(\xi)d_0(\xi)-e^{i\gamma_2(\xi)h}[-b_1(\xi)+i\gamma_2(\xi)b_0(\xi)]-c_1(\gamma_2(\xi))+i\xi c_0(\gamma_2(\xi))\}\end{aligned}$$

и при $\xi<k_2$

$$\begin{aligned}u(\xi,z)=&-ie^{i\gamma_2(\xi)z}\frac{1}{2\gamma_2(\xi)}\times\\&\times\{d_1(\xi)+i\gamma_2(\xi)d_0(\xi)-e^{-i\gamma_2(\xi)h}[b_1(\xi)+i\gamma_2(\xi)b_0(\xi)]+c_1(-\gamma_2(\xi))-i\xi c_0(-\gamma_2(\xi))\}.\end{aligned}$$

Поэтому $u(\xi,z)=0$ при $z<0$ и при $z>h$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (19).

При $x<0$ обратные преобразования Фурье выполним в другом порядке. Первую группу слагаемых после деления на полином запишем в виде

$$\frac{C_1(\zeta)}{\xi-\gamma_2(\zeta)}+\frac{C_2(\zeta)}{\xi+\gamma_2(\zeta)}.$$

После обратного преобразования Фурье по $\xi\to x$ получим

$$ie^{-i\gamma_2(\zeta)x}C_1(\zeta)\quad\text{при}\quad\zeta<-k_2\quad\text{и}\quad ie^{i\gamma_2(\zeta)x}C_2(\zeta)\quad\text{при}\quad\zeta>k_2.$$

Во второй группе слагаемых перейдем к прообразам Фурье

$$-e^{ih\zeta}\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{b_1(x_1)-i\zeta b_0(x_1)}{2\gamma_2(\zeta)}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[-\frac{1}{\xi-\gamma_2(\zeta)}+\frac{1}{\xi+\gamma_2(\zeta)}\Big]e^{-i\xi(x-x_1)}\,d\xi\Big)\,dx_1.$$

После обратного преобразования Фурье внутренние интегралы (т. к. $x<0$, $x_1>0$, то $x-x_1<0$) дают

$$-2\pi i e^{-i\gamma_2(\zeta)(x-x_1)} \quad \text{при} \quad \zeta<-k \quad \text{и} \quad 2\pi i e^{i\gamma_2(\zeta)(x-x_1)} \quad \text{при} \quad \zeta>k.$$

Таким же образом преобразуем и третью группу слагаемых. Тогда для $x<0$ при $\zeta<-k_2$

$$u(x,\zeta)=ie^{-i\gamma_2(\zeta)x}\frac{1}{2\gamma_2(\zeta)}\times$$
$$\times\{-c_1(\zeta)+i\gamma_2(\zeta)c_0(\zeta)+e^{ih\zeta}[b_1(\gamma_2(\zeta))-i\zeta b_0(\gamma_2(\zeta))]-d_1(\gamma_2(\zeta))+i\zeta d_0(\gamma_2(\zeta))\}$$

и при $\zeta>k_2$

$$u(x,\zeta)=ie^{i\gamma_2(\zeta)x}\frac{1}{2\gamma_2(\zeta)}\times$$
$$\times\{c_1(\zeta)+i\gamma_2(\zeta)c_0(\zeta)-e^{ih\zeta}[b_1(-\gamma_2(\zeta))-i\zeta b_0(-\gamma_2(\zeta))]+d_1(-\gamma_2(\zeta))-i\zeta d_0(-\gamma_2(\zeta))\}.$$

Отсюда следует, что связи между граничными функциями должны иметь вид (20).

Чтобы найти решение задачи при $x>0$ и $0<z<h$, образ Фурье искомого решения запишем в виде

$$2\pi\, u(\xi,\zeta)=\frac{D_1(\xi)}{\zeta-\gamma_2(\xi)}+\frac{D_2(\xi)}{\zeta+\gamma_2(\xi)}-e^{ih\zeta}\frac{B_1(\xi)}{\zeta-\gamma_2(\xi)}-e^{ih\zeta}\frac{B_2(\xi)}{\zeta+\gamma_2(\xi)}+\frac{C_1(\zeta)}{\xi-\gamma_2(\zeta)}+\frac{C_2(\zeta)}{\xi+\gamma_2(\zeta)}$$

и выполним обратные преобразования Фурье (в разном порядке).

Рассмотрим отдельные слагаемые в решении задачи $u(x,z)$. Первая пара дробей при $z>0$ дает

$$\int_{k_2}^{+\infty} D_1(\xi)e^{-i\gamma_2(\xi)z}e^{-i\xi x}\,d\xi+\int_{-\infty}^{-k_2} D_2(\xi)e^{i\gamma_2(\xi)z}e^{-i\xi x}\,d\xi+$$
$$+\int_{-k_2}^{k_2}\left[D_1(\xi)e^{-i\gamma_2(\xi)z}+D_2(\xi)e^{i\gamma_2(\xi)z}\right]e^{-i\xi x}\,d\xi,$$

вторая пара при $z<h$ (т.е. $z-h<0$) —

$$\int_{-\infty}^{-k_2} B_1(\xi)e^{-i\gamma_2(\xi)(z-h)}e^{-i\xi x}\,d\xi+\int_{k_2}^{+\infty} B_2(\xi)e^{i\gamma_2(\xi)(z-h)}e^{-i\xi x}\,d\xi$$

и третья пара при $x>0$ —

$$\int_{k_2}^{+\infty} C_1(\zeta)e^{-i\gamma_2(\zeta)x}e^{-i\xi z}\,d\zeta+\int_{-\infty}^{-k_2} C_2(\zeta)e^{i\gamma_2(\zeta)x}e^{-i\zeta z}\,d\zeta+$$
$$+\int_{-k_2}^{k_2}\left[C_1(\zeta)e^{-i\gamma_2(\zeta)x}+C_2(\zeta)e^{i\gamma_2(\zeta)x}\right]e^{-i\zeta z}\,d\zeta.$$

Интегралы, содержащие только распространяющиеся гармоники, можно объединить (так, как это было сделано в случае квадранта)

$$\int_{-k_2}^{0}\left\{\left[D_1(\alpha)-C_2(\gamma_2(\alpha))\frac{\alpha}{\gamma_2(\alpha)}\right]e^{-i\gamma_2(\alpha)z}+\left[D_2(\alpha)-C_2(-\gamma_2(\alpha))\frac{\alpha}{\gamma_2(\alpha)}\right]e^{i\gamma_2(\alpha)z}\right\}e^{-i\alpha x}\,d\alpha+$$
$$+\int_{0}^{k_2}\left\{\left[D_1(\alpha)+C_1(\gamma_2(\alpha))\frac{\alpha}{\gamma_2(\alpha)}\right]e^{-i\gamma_2(\alpha)z}+\left[D_2(\alpha)+C_1(-\gamma_2(\alpha))\frac{\alpha}{\gamma_2(\alpha)}\right]e^{i\gamma_2(\alpha)z}\right\}e^{-i\alpha\, x}\,d\alpha.$$

Интегралы по бесконечным промежуткам преобразуются в интегралы по отрицательной мнимой полуоси точно таким же образом, что и в случае четверти плоскости.

Из теорем 3 и 5 следует, что интегральные представления (10) дают общие решения уравнения Гельмгольца в полубесконечных слоистых областях. С одной стороны доказано, что эти решения могут быть записаны как интегралы по параметру α (обоснован метод разделения переменных). С другой стороны, представления (10) можно получить из формул (16) и (21), если исключить из условий разрешимости вспомогательных переопределенных задач (теоремы 2 и 4) образы Фурье $b_0(\xi)$ и $b_1(\xi)$ и оставить в решении только волны, распространяющиеся вправо.

5. Ортогональность мод и потоки энергии

Вернемся к исследованию свойств мод полуоткрытого волновода, потенциальные функции которых были найдены в п. 2.

Для двух распространяющихся в одном и том же направлении мод с потенциальными функциями $u(\alpha; x, z)$ и $u(\beta; x, z)$ определим скалярное произведение через их следы на сечении волновода $x = 0$ следующим образом:

$$F(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} f(\alpha; z) f^*(\beta; z)\, dz, \tag{23}$$

здесь * — знак комплексного сопряжения. Хотя функции $f(\alpha; z)$ вещественнозначные, рассмотрим здесь самый общий случай. Для вычисления таких скалярных произведений удобно использовать формулу Грина (знаком $'$ будем обозначать производную по переменной z):

$$\int_0^{+\infty} f(\alpha; z) f^*(\beta; z)\, dz = \frac{1}{\alpha^2 - {\beta^*}^2} \lim_{A \to +\infty} [f'(\alpha; A) f^*(\beta; A) - f(\alpha; A) {f^*}'(\beta; A)]. \tag{24}$$

Действительно, пусть $f(\alpha; z)$ и $f(\beta; z)$ — решения уравнений $f'' + (k^2 - \alpha^2) f = 0$ и $f'' + (k^2 - \beta^2) f = 0$ соответственно. Первое уравнение умножим на $f^*(\beta; z)$ и вычтем из него комплексно-сопряженное ко второму уравнению, умноженное на $f(\alpha; z)$ (по предположению значения k вещественные). Получим после ряда элементарных преобразований тождество Лагранжа

$$(f'(\alpha; z) f^*(\beta; z))' - (f(\alpha; z) {f^*}'(\beta; z))' = (\alpha^2 - {\beta^*}^2) f(\alpha; z) f^*(\beta; z).$$

Следовательно,

$$(\alpha^2 - {\beta^*}^2) \int_0^A f(\alpha; z) f^*(\beta; z)\, dz = [f'(\alpha; z) f^*(\beta; z) - f(\alpha; z) {f^*}'(\beta; z)]\Big|_{z=0}^{z=A}.$$

При этом нужно учесть, что $f(\alpha; 0) = 0$ и $f(\alpha; h + 0) = f(\alpha; h - 0)$, $f'(\alpha; h + 0) = f'(\alpha; h - 0)$.

Из формулы (24) следует

Теорема 6. *Моды полуоткрытого волновода образуют ортогональную систему функций относительно скалярного произведения* (23).

Обозначим также

$$G(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} f^+(\alpha; z) f^-(\beta; z)\, dz.$$

В случае волноводных мод

$$F_{kj} = F(\alpha_k, \alpha_j) = \{k \neq j : 0, \quad k = j : N_k = N(\alpha_k)\},$$

где

$$N(\alpha) = \frac{1}{2}\left(h + \frac{1}{\delta_1(\alpha)}\right)$$

и

$$G_{kj} = G(\alpha_k, \alpha_j) = \left(\frac{\delta_1(\alpha_k^+) - \delta_1(\alpha_j^-)}{{\gamma_2^+}^2(\alpha_k^+) - {\gamma_2^-}^2(\alpha_j^-)} + \frac{1}{\delta_1(\alpha_k^+) + \delta_1(\alpha_j^-)}\right) \sin \gamma_2^+(\alpha_k^+) h \sin \gamma_2^-(\alpha_k^-) h.$$

Вычислим поток энергии моды через поперечное сечение волновода. Среднее по времени значение вектора Пойнтинга

$$\overline{\Pi} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(E_y H_z^*, 0, -E_y H_x^*),$$

как следует из формул (3), имеет единственную ненулевую компоненту

$$\overline{\Pi}_x = \frac{-\operatorname{Re}\alpha}{2\omega\mu_0\mu}|C(\alpha)|^2|f(\alpha;z)|^2 e^{2\operatorname{Im}\alpha x}.$$

При вещественных α энергия переносится (вправо при отрицательных α и влево при положительных), а при чисто мнимых α — нет. Поток энергии через сечение волновода $x = 0$ равен

$$P(\alpha) = \frac{-\operatorname{Re}\alpha}{2\omega\mu_0\mu}|C(\alpha)|^2 \int_0^{+\infty} |f(\alpha;z)|^2\, dz = \frac{-\operatorname{Re}\alpha}{2\omega\mu_0\mu}|C(\alpha)|^2 N(\alpha).$$

6. Вспомогательные переопределенные задачи

Рассмотрим теперь две вспомогательные граничные задачи в правой и в левой половинах полуоткрытой волноводной структуры (см. рис. 1).

В области $x > 0$, $z > 0$ нужно найти решение уравнения Гельмгольца с кусочно-постоянным коэффициентом в классе решений, распространяющихся вдоль оси x (вправо), при граничных условиях

$$u(x, 0+0) = 0, \quad u(0+0, z) = u_0^+(z), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0+0, z) = u_1^+(z).$$

Эта задача переопределенная, т. к. на границе $x = 0$ условий задано больше, чем нужно.

В силу того, что искомое решение может быть аналитически продолжено в область $x < 0$, можно считать, что требуется найти общее представление волн в бесконечном полуоткрытом волноводе, распространяющихся вправо, по следам потенциальной функции на поперечном сечении $x = 0$.

Теорема 7. *Решение переопределенной задачи существует тогда и только тогда, когда*

$$u_1^+(z) = \int_0^{+\infty} u_0^+(z_1)\, K_0^+(z_1, z)\, dz_1, \tag{25}$$

где

$$K_0^+(z_1, z) = -i \int\limits_{\cdot\cdot\urcorner} \frac{\alpha}{N^+(\alpha)} f^+(\alpha; z_1) f^+(\alpha; z)\, d\alpha$$

или

$$u_0^+(z) = \int_0^{+\infty} u_1^+(z_1) K_1^+(z_1, z)\, dz_1, \tag{26}$$

где

$$K_1^+(z_1, z) = i \int\limits_{\cdot\cdot\urcorner} \frac{1}{\alpha N^+(\alpha)} f^+(\alpha; z_1) f^+(\alpha; z)\, d\alpha.$$

Доказательство. Из формулы (10) следует

$$u_0^+(z) = \int\limits_{\cdot\cdot\urcorner} C^+(\alpha) f^+(\alpha; z)\, d\alpha, \quad u_1^+(z) = -i \int\limits_{\cdot\cdot\urcorner} \alpha C^+(\alpha) f^+(\alpha; z)\, d\alpha.$$

Получим связь между этими функциями с помощью свойства ортогональности мод. Легко видеть, что

$$C^+(\alpha) = \frac{1}{N^+(\alpha)} \int_0^{+\infty} u_0^+(z_1) f^+(\alpha; z_1)\, dz_1 \tag{27}$$

и тогда

$$u_1^+(z) = -\int \alpha\left(\frac{1}{N^+(\alpha)}\int_0^{+\infty} u_0^+(z_1)f^+(\alpha;z_1)\,dz_1\right)f^+(\alpha;z)\,dz = \int_0^{+\infty} u_0^+(z_1)K_0^+(z_1,z)\,dz_1.$$

С другой стороны,

$$C^+(\alpha) = \frac{i}{\alpha N^+(\alpha)}\int_0^{+\infty} u_1^+(z_1)f^+(\alpha;z_1)\,dz_1.$$

Вторая вспомогательная задача ставится аналогично. В области $x < 0$, $z > 0$ нужно найти решение уравнения Гельмгольца с кусочно-постоянным коэффициентом в классе решений, распространяющихся влево, при граничных условиях

$$u(x,0) = 0, \quad u(0,z) = u_0^-(z), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,z) = u_1^-(z).$$

Ясно, что в случае волны, распространяющейся в направлении, противоположном направлению оси x, нужно изменить знак в правых частях формул (25) и (26). Тогда условия разрешимости этой задачи имеют вид

$$u_1^-(z) = -\int_0^{+\infty} u_0^-(z_1)K_0^-(z,z_1)\,dz_1, \quad u_0^-(z) = -\int_0^{+\infty} u_1^-(z_1)K_1^-(z,z_1)\,dz_1. \tag{28}$$

Для волны, падающей из области $x < 0$ на стык, имеем

$$u_1^0(z) = \int_0^{+\infty} u_0^0(z_1)K_0^-(z,z_1)\,dz_1, \quad u_0^0(z) = \int_0^{+\infty} u_1^0(z_1)K_1^-(z,z_1)\,dz_1. \tag{29}$$

7. Интегральные уравнения задачи сопряжения

Задача сопряжения двух полубесконечных полуоткрытых волноводов с помощью полученных в п. 6 связей (25), (26), (28) и (29) между граничными функциями во вспомогательных граничных задачах может быть сведена к интегральным уравнениям различного вида.

Интегральные уравнения можно получить относительно любой из граничных функций. Например, непосредственно из условий сопряжения (4) следует

$$\int_0^{+\infty} u_0^+(z_1)[K_0^+(z,z_1) + K_0^-(z,z_1)]\,dz_1 = 2u_1^0(z), \quad z \in (0,+\infty). \tag{30}$$

Получим интегральное уравнение 2-го рода относительно функции $u_1^+(z)$ в ходе следующих рассуждений:

$$u_1^+(z) = u_1^0(z) + u_1^-(z) = u_1^0(z) - \int_0^{+\infty} u_0^-(z_1)\,K_0^-(z_1,z)\,dz_1 =$$
$$= u_1^0(z) - \int_0^{+\infty} [u_0^+(z_1) - u_0^0(z_1)]K_0^-(z_1,z)\,dz_1 = 2u_1^0(z) - \int_0^{+\infty} u_0^+(z_1)\,K_0^-(z_1,z)\,dz_1 =$$
$$= 2u_1^0(z) - \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u_1^+(z_2)K_1^+(z_2,z_1)\,dz_2\right)K_0^-(z_1,z)\,dz_1.$$

Таким образом,

$$u_1^+(z) = 2u_1^0(z) - \int_0^{+\infty} u_1^+(z_2)\,L(z_2,z)\,dz_2, \tag{31}$$

где

$$L(z_2,z) = \int_0^{+\infty} K_1^+(z_2,z_1)K_0^-(z_1,z)\,dz_1.$$

Удобнее в качестве неизвестной функции рассматривать, например, $C^+(\alpha)$ на $\ddot{\neg}$. Соответствующее интегральное уравнение легко получить из (31), т. к.

$$C^+(\alpha) = \frac{i}{\alpha N^+(\alpha)} \int_0^{+\infty} u_1^+(z_1) f^+(\alpha; z_1)\, dz_1.$$

Но можно это уравнение вывести и независимо. Действительно, из (27) и первого условия сопряжения

$$C^+(\alpha) = \frac{1}{N^+(\alpha)} \int_0^{+\infty} [u_0^0(z) + u_0^-(z)] f^+(\alpha; z)\, dz.$$

Из (28) и второго условия сопряжения

$$C^+(\alpha) = \frac{1}{N^+(\alpha)} \int_0^{+\infty} u_0^0(z) f^+(\alpha; z)\, dz + \\ + \frac{1}{N^+(\alpha)} \int_0^{+\infty} \left(- \int_0^{+\infty} [u_1^+(z_1) - u_1^0(z_1)] K_1^-(z, z_1)\, dz_1 \right) f^+(\alpha; z)\, dz.$$

В силу (29) первое слагаемое в правой части удваивается, а второе преобразуется к виду

$$- \frac{1}{N^+(\alpha)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(-i \int\limits_{\ddot{\neg}} \alpha_1 C^+(\alpha_1) f^+(\alpha_1; z_1)\, d\alpha_1 \right) \times \\ \times \left(i \int\limits_{\ddot{\neg}} \frac{1}{\alpha_2 N^-(\alpha_2)} f^-(\alpha_2; z_1) f^-(\alpha_2; z)\, d\alpha_2 \right) f^+(\alpha; z)\, dz.$$

Следовательно,

$$C^+(\alpha) = \frac{2}{N^+(\alpha)} \int_0^{+\infty} u_0^0(z) f^+(\alpha; z)\, dz - \frac{1}{N^+(\alpha)} \int\limits_{\ddot{\neg}} C^+(\alpha_1) M(\alpha, \alpha_1)\, d\alpha_1, \quad \alpha \in \ddot{\neg}, \tag{32}$$

где

$$M(\alpha, \alpha_1) = \alpha_1 \int\limits_{\ddot{\neg}} \frac{1}{\alpha_2 N^-(\alpha_2)} G(\alpha, \alpha_2) G(\alpha_1, \alpha_2)\, d\alpha_2.$$

Таким образом, имеет место

Теорема 8. *Задача сопряжения двух полубесконечных полуоткрытых волноводов равносильна интегральному уравнению* (30) ((31) *или* (32)).

8. Приближение волноводных мод

Интегральное уравнение (32) существенно упрощается, если при решении задачи сопряжения волноводов учитывать только волноводные моды дискретного спектра. Предположим, что на стык волноводов набегает слева собственная волна с номером l, ее потенциальная функция

$$u^0(x, z) = C_l^0 f^-(\alpha_l^-; z) e^{-i\alpha_l^- x}.$$

Будем искать потенциальные функции рассеянного поля в виде

$$u^+(x, z) = \sum_{j=1}^{n^+} C_j^+ f^+(\alpha_j^+; z) e^{-i\alpha_j^+ x}, \quad u^-(x, z) = \sum_{j=1}^{n^-} C_j^- f^-(\alpha_j^-; z) e^{i\alpha_j^- x}.$$

Для поля, распространяющегося в правом полубесконечном волноводе, при $x \to +0$

$$u_0^+(z) = \sum_{j=1}^{n^+} C_j^+ f^+(\alpha_j^+; z), \quad u_1^+(z) = -i \sum_{j=1}^{n^+} C_j^+ \alpha_j^+ f^+(\alpha_j^+; z).$$

Из условия ортогональности волноводных мод следует

$$\int_0^{+\infty} u_0^+(z_1) f^+(\alpha_k^+; z_1)\, dz_1 = N_k^+ C_k^+, \quad \int_0^{+\infty} u_1^+(z_1) f^+(\alpha_k^+; z_1)\, dz_1 = -i\alpha_k^+ N_k^+ C_k^+. \tag{33}$$

Связь между граничными функциями вспомогательной переопределенной задачи имеет вид (25), (26), где

$$K_0^+(z_1, z) = -i \sum_{j=1}^{n^+} \frac{\alpha_j^+}{N_j^+} f^+(\alpha_j^+; z_1) f^+(\alpha_j^+; z), \quad K_1^+(z_1, z) = i \sum_{j=1}^{n^+} \frac{1}{\alpha_j^+ N_j^+} f^+(\alpha_j^+; z_1) f^+(\alpha_j^+; z).$$

Аналогично в формулах (28)

$$K_0^-(z_1, z) = -i \sum_{j=1}^{n^-} \frac{\alpha_j^-}{N_j^-} f^-(\alpha_j^-; z_1) f^-(\alpha_j^-; z), \quad K_1^-(z_1, z) = i \sum_{j=1}^{n^-} \frac{1}{\alpha_j^- N_j^-} f^-(\alpha_j^-; z_1) f^-(\alpha_j^-; z).$$

Для падающей волны

$$u_0^0(z) = C_l^0 f^-(\alpha_l^-; z), \quad u_1^0(z) = -iC_l^0 \alpha_l^- f^-(\alpha_l^-; z).$$

Легко видеть, что интегральные тождества (29) сводятся в рассматриваемом частном случае к простым равенствам

$$u_1^0(z) = -i\alpha_l^- u_0^0(z), \quad u_0^0(z) = \frac{i}{\alpha_l^-} u_1^0(z).$$

Теорема 9. *В приближении волноводных мод задача сопряжения полуоткрытых волноводов эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений*

$$N_k^+ C_k^+ + \sum_{j=1}^{n^+} \left(\alpha_j^+ \sum_{m=1}^{n^-} \frac{G_{jm} G_{km}}{\alpha_m^- N_m^-} \right) C_j^+ = 2G_{kl} C_l^0, \quad k = 1, \ldots, n^+. \tag{34}$$

Доказательство. По аналогии с рассуждениями предыдущего пункта, из (33) и первого условия сопряжения

$$C_k^+ = \frac{1}{N_k^+} \int_0^{+\infty} u_0^+(z) f^+(\alpha_k^+; z)\, dz = \frac{1}{N_k^+} \int_0^{+\infty} [u_0^0(z) + u_0^-(z)] f^+(\alpha_k^+; z)\, dz,$$

здесь

$$\int_0^{+\infty} u_0^0(z) f^+(\alpha_k^+; z)\, dz = G_{kl} C_l^0.$$

Из второго условия сопряжения и условия (28) следует

$$\int_0^{+\infty} u_0^-(z) f^+(\alpha_k^+; z)\, dz = \int_0^{+\infty} \left(-\int_0^{+\infty} [u_1^+(z) - u_1^0(z)] K_1^-(z_1, z)\, dz_1 \right) f^+(\alpha_k^+; z)\, dz.$$

Но

$$\int_0^{+\infty} u_1^0(z_1) K_1^-(z, z_1)\, dz_1 = u_0^0(z)$$

и

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(-i \sum_{j=1}^{n^+} C_j^+ \alpha_j^+ f^+(\alpha_j^+; z_1) \right) \left(i \sum_{m=1}^{n^-} \frac{1}{\alpha_m^- N_m^-} f^-(\alpha_m^-; z_1) f^-(\alpha_m^-; z) \right) f^+(\alpha_k^+; z)\, dz\, dz_1 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n^+} C_j^+ \alpha_j^+ \sum_{m=1}^{n^-} \frac{1}{\alpha_m^- N_m^-} \int_0^{+\infty} f^+(\alpha_j^+; z_1) f^-(\alpha_m^-; z_1)\, dz_1 \int_0^{+\infty} f^+(\alpha_k^+; z) f^-(\alpha_m^-; z)\, dz.$$

Поэтому

$$C_k^+ = \frac{2}{N_k^+} G_{kl} C_l^0 - \frac{1}{N_k^+} \sum_{j=1}^{n^+} C_j^+ \alpha_j^+ \sum_{m=1}^{n^-} \frac{1}{\alpha_m^- N_m^-} G_{jm} G_{km}, \quad k = 1, \ldots, n^+.$$

Как показал вычислительный эксперимент, решение СЛАУ (34) дает приближенное решение задачи сопряжения с хорошей точностью (пока приближение волноводных мод имеет физический смысл).

Литература

1. Гончаренко А.М., Карпенко В.А. *Основы теории оптических волноводов.* – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 240 с.
2. Маркузе Д. *Оптические волноводы.* – М.: Мир, 1974. – 574 с.
3. *Введение в интегральную оптику* / Под ред. М. Барноски. – М.: Мир, 1977. – 368 с.
4. *Интегральная оптика* / Под. ред. Т. Тамира. – М.: Мир, 1978. – 344 с.
5. Адамс М. *Введение в теорию оптических волноводов.* – М.: Мир, 1984. – 512 с.
6. Clarricoats P.I.B., Sharpe A.B. *Modal matching applied to a discontinuity in a planar surface waveguide* // Electr. Lett. – 1972. – V. 8. – № 1. – P. 28–32.
7. Hockham G.A., Sharpe A.B. *Dielectric-waveguide discontinuities* // Electr. Lett. – 1972. – V. 8. – № 9. – P. 230–231.
8. Карпенко В.А. *Дифракция поверхностных волн на стыке двух тонкопленочных волноводов* // Докл. АН БССР. – 1977. – Т. 21. – № 8. – С. 687–690.
9. Rozzi T.E. *Rigorous analysis of the step discontinuity in a planar dielectric waveguide* // IEEE Trans. Microwave Theory and Techn. – 1978. – V. 26. – № 10. – P. 738–746.
10. Плещинский Н.Б., Тумаков Д.Н. *Метод частичных областей для скалярных координатных задач дифракции электромагнитных волн в классах обобщенных функций* // Препринт 2000-1. Казанское матем. об-во. – Казань, 2000. – 50 с.
11. Плещинская И.Е., Плещинский Н.Б. *Переопределенные граничные задачи для эллиптических уравнений с частными производными и их применение в теории дифракции волн* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 2005. – Т. 147. – Кн. 3. – С. 4–32.
12. Тумаков Д.Н. *Задачи сопряжения решений уравнения Гельмгольца в координатных областях.* – Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 2002. – 127 с.
13. Курант Р., Гильберт Д. *Методы математической физики.* Т. 1. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1951. – 476 с.
14. Плещинский Н.Б., Тумаков Д.Н. *Граничные задачи для уравнения Гельмгольца в квадранте и в полуплоскости, составленной из двух квадрантов* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 7. – С. 63–74.
15. Махер А., Плещинский Н.Б. *Задача о скачке для уравнения Гельмгольца в плоскослоистой среде и ее приложения* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 1. – С. 45–56.

Казанский государственный университет

Поступила 31.10.2006