ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 2 (525)

УДК 517.544

Е.А. ШИРОКОВА

ЦЕПИ ПОДЧИНЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССА РОСТА ПОЛОСТЕЙ

1. Определение и примеры

Цепью подчинения, следуя [1], будем называть однопараметрическое семейство регулярных в области $D \subset \overline{\mathbf{C}}$ функций $\{F(z,t)\}$, $z \in D$, $t \in [0,1]$, если выполняются следующие условия:

1) $z_0 \in \overline{D}$, $F(z_0,t') = F(z_0,t'')$ $\forall t',t'' \in [0,1]$;
2) $t_1, t_2 \in [0,1]$, $t_1 < t_2$, существует однолистная регулярная в D функция $\phi(z)$, $\phi(z_0) = z_0$, $\phi(D) \subset D$, $F(z,t_1) = F(\phi(z),t_2)$.

а) Пусть D — единичный круг, $z_0 = 0$. Тогда семейство регулярных в единичном круге функций $\{F(z,t)\}$, $t \in [0,1]$, с нормировкой $F(0,t) = 0$, $t \in [0,1]$, будет цепью подчинения, если выполняется условие

$$\operatorname{Re} z\frac{F'_z}{F'_t} > 0, \quad |z| < 1, \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

согласно [2].

б) Пусть D — верхняя полуплоскость, $z_0 = \infty$. Тогда семейство регулярных в верхней полуплоскости функций $\{F(z,t)\}$, $t \in [0,1]$, отображающих верхнюю полуплоскость в себя с нормировкой $f(\infty,t) = \infty$, $t \in [0,1]$, будет цепью подчинения, если выполняется условие

$$\operatorname{Im} \frac{F'_z}{F'_t} > 0, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad t \in [0,1],$$

согласно [3], [4].

Очевидно, что “листность” функций семейства с ростом параметра t не может убывать. Поэтому, если $F(z,1)$ однолистна в D, то однолистными являются все функции семейства, в том числе и $F(z,0)$. На этом свойстве цепей подчинения основаны доказательства многих достаточных условий однолистности (напр., [5], [6]).

2. Получение подклассов класса S с использованием цепей подчинения

Применим условие последовательного подчинения (1) для получения достаточных условий однолистности функций, регулярных в единичном круге и имеющих в окрестности нуля разложение $f(z) = z + a_2z^2 + \cdots$, $|z| < 1$.

Частным случаем результата из [7] является

Лемма 1. *Пусть регулярная при* $|z| < 1$ *функция* $p(z)$, $\operatorname{Re} p(0) > 0$, *удовлетворяет неравенству*

$$\operatorname{Re}\left[ap(z) + z\frac{p'(z)}{p(z)}\right] > 0, \quad |z| < 1, \quad a > 0.$$

Тогда $\operatorname{Re} p(z) > 0$, $|z| < 1$.

Теорема 1 ([8]). *Пусть функция $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ регулярна при $|z| < 1$. Если существуют такие $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbf{R}$, $c > 1$ и такая регулярная при $|z| < 1$ функция $f_0(z) = z + b_2 z^2 + \cdots$, что*

$$\operatorname{Re}\left[(\alpha + i\beta - 1) z \frac{f_0'}{f_0} + \left(1 + z\frac{f_0''}{f_0'}\right)\right] > 0, \quad |z| < 1, \tag{2}$$

и выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} z \frac{(f^{\alpha+i\beta})'}{c f_0^{\alpha+i\beta} - f^{\alpha+i\beta}} > 0, \quad |z| < 1 \tag{3}$$

(*при выборе определенной ветви степени*), *то $f(z)$ однолистна при $|z| < 1$.*

Доказательство. Заметим, что для однопараметрического семейства

$$F(z,t) = [(1-t) f(z)^{\alpha+i\beta} + t c f_0(z)^{\alpha+i\beta}]^{1/(\alpha+i\beta)}, \quad t \in [0,1],$$

функция $F(z,1) = c^{1/(\alpha+i\beta)} f_0(z)$ согласно [9] является однолистной спиралеобразной. Для доказательства однолистности $f(z) = F(z,0)$ достаточно обеспечить выполнение неравенства (1) при $|z| < 1$. В данном случае оно превращается в неравенство

$$\operatorname{Re}\left[(1-t) z \frac{(f(z)^{\alpha+i\beta})'}{c f_0^{\alpha+i\beta} - f^{\alpha+i\beta}} + t c z \frac{(f_0(z)^{\alpha+i\beta})'}{c f_0^{\alpha+i\beta} - f^{\alpha+i\beta}}\right] > 0.$$

Для выполнения последнего условия при всех $t \in [0,1]$ необходимо и достаточно, чтобы при $|z| < 1$ были справедливы неравенства (3) и

$$\operatorname{Re}\left[z \frac{(f_0(z)^{\alpha+i\beta})'}{c f_0^{\alpha+i\beta} - f^{\alpha+i\beta}}\right] > 0. \tag{4}$$

Покажем, что условия (2) и (3) обеспечивают выполнение неравенства (4). Обозначим

$$z \frac{(f_0(z)^{\alpha+i\beta})'}{c f_0^{\alpha+i\beta} - f^{\alpha+i\beta}} = \frac{p(z)}{c-1},$$

имеем

$$z \frac{(f(z)^{\alpha+i\beta})'}{c f_0^{\alpha+i\beta} - f^{\alpha+i\beta}} = \frac{c p(z)}{c-1} + z\frac{p'}{p} - \left[(\alpha + i\beta - 1) z \frac{f_0'}{f_0} + \left(1 + z\frac{f_0''}{f_0'}\right)\right].$$

Следовательно, согласно (2) и (3)

$$\operatorname{Re}\left[\frac{cp}{c-1} + z\frac{p'}{p}\right] > \operatorname{Re}\left[(\alpha + i\beta - 1) z \frac{f_0'}{f_0} + \left(1 + z\frac{f_0''}{f_0'}\right)\right] > 0, \quad |z| < 1.$$

Применяя лемму 1, получим $\operatorname{Re} p(z) > 0$, $|z| < 1$, т. е. неравенство (4) выполняется. Таким образом, изучаемое семейство функций удовлетворяет условию (1), что и доказывает однолистность всех функций семейства, в том числе и $f(z)$, $|z| < 1$. $\square$

Теорема 2 ([8]). *Пусть для функции $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$, регулярной при $|z| < 1$, и $c > 1$ справедливо неравенство*

$$\operatorname{Re} z \frac{f'}{f \ln(cz/f(z))} > 0, \quad |z| < 1. \tag{5}$$

Тогда функция $f(z)$ однолистна при $|z| < 1$, причем $|f(z)| < c$.

Доказательство. Рассмотрим однопараметрическое семейство

$$F(z,t) = f(z)\left(\frac{cz}{f(z)}\right)^t, \quad t \in [0,1],$$

где ветвь у степени выбирается так, что $c^t \in \mathbf{R}^+$. Имеем $F(z,0) = f(z)$, $F(z,1) = cz$. Условие последовательной подчиненности (1) сводится к неравенству

$$\mathrm{Re}\left[t\frac{1}{\ln(cz/f(z))} + (1-t)z\frac{f'}{f\ln(cz/f(z))}\right] > 0, \quad |z| < 1.$$

Последнее неравенство выполняется при всех $t \in [0,1]$, если выполняются условия (5) и

$$\mathrm{Re}[\ln(cz/f(z))] > 0, \quad |z| < 1. \tag{6}$$

Покажем, что условие (5) обеспечивает выполнение неравенства (6). Действительно, обозначим

$$p^{-1}(z) = \ln(cz/f(z)),$$

тогда (5) запишется

$$\mathrm{Re}\left[p + z\frac{p'}{p}\right] > 0.$$

Отсюда, применяя лемму 1, убедимся в выполнении условия последовательного подчинения (1), т. е. в однолистности $f(z)$. Кроме того, из (6) следует $|f(z)| < c$, $|z| < 1$. □

3. Получение подклассов класса Σ

С целью дальнейшего применения к моделированию роста полостей в вязких телах рассмотрим семейство бесконечных последовательно вложенных друг в друга односвязных областей D_t, $t \in [0,1]$. Пусть каждая область D_t является образом внешности единичного круга $E^- = \{\zeta \,|\, |\zeta| > 1\}$ при отображении регулярной при $\infty > |\zeta| > 1$ функцией $z = \omega(\zeta, t)$ с простым полюсом в бесконечно удаленной точке, непрерывной при $|\zeta| \geq 1$. Будем считать все функции $\omega(\zeta, t)$ дифференцируемыми по t при всех $t \in [0,1]$ и $|\zeta| \geq 1$. Прежде всего, установим, когда при любых $t \in [0,1]$ области D_t однолистны и $D_{t_2} \subset D_{t_1}$ при $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in [0,1]$.

Рассмотрим семейство функций

$$\Phi(\widetilde{\zeta}, \tau) = \frac{1}{\omega(\widetilde{\zeta}^{-1}, 1-\tau)}, \quad |\widetilde{\zeta}| < 1, \quad \tau \in [0,1].$$

Очевидно, что для образов D'_τ единичного круга $|\widetilde{\zeta}| < 1$ при отображениях функциями $\Phi(\widetilde{\zeta}, \tau)$ справедливо $D'_{\tau_1} \subset D'_{\tau_2}$ при $\tau_1 < \tau_2$ тогда и только тогда, когда $D_{t_2} \subset D_{t_1}$ при $t_1 < t_2$. Кроме того, области D'_τ будут однолистными тогда и только тогда, когда однолистны D_t. Для вновь введенного семейства регулярных в единичном круге функций, переводящих нуль в нуль, можно применить принцип последовательного подчинения П.П. Куфарева [2], использованный в примере а): если для семейства регулярных по $\widetilde{\zeta}$ при $|\widetilde{\zeta}| < 1$ и дифференцируемых по τ при $\tau \in [0,1]$ функций $\Phi(\widetilde{\zeta}, \tau)$ таких, что $\Phi(0, \tau) = 0$, справедливо неравенство

$$\mathrm{Re}\,\widetilde{\zeta}\frac{\Phi'_{\widetilde{\zeta}}}{\Phi'_\tau} > 0, \quad |\widetilde{\zeta}| < 1, \quad \tau \in [0,1],$$

причем функция $\Phi(\widetilde{\zeta}, 1)$ однолистна, то однолистны все функции семейства $\Phi(\widetilde{\zeta}, \tau)$.

Нетрудно проверить справедливость равенства

$$\widetilde{\zeta}\frac{\Phi'_{\widetilde{\zeta}}}{\Phi'_\tau} = \zeta\frac{\omega'_\zeta}{\omega'_t}.$$

Таким образом, получили условие однолистности для функций, аналитических при $|\zeta| > 1$ и с простым полюсом в бесконечно удаленной точке: если функция $\omega(\zeta, 0)$ однолистна и при всех $|\zeta| > 1$, $t \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} \zeta \frac{\omega'_\zeta}{\omega'_t} > 0, \tag{7}$$

то все функции этого семейства $\omega(\zeta, t)$ однолистны.

В качестве примера рассмотрим получение достаточных условий однолистности функции с помощью включения ее в параметрическое семейство. Аналогом леммы 1 является

Лемма 2. *Пусть функция $p(\zeta)$ аналитична при $|\zeta| > 1$, $\operatorname{Re} p(\infty) > 0$ и пусть выполняется неравенство*

$$\operatorname{Re} \left[ap(\zeta) - \zeta \frac{p'(\zeta)}{p(\zeta)}\right] > 0, \quad |\zeta| > 1, \quad a > 0.$$

Тогда справедливо неравенство $\operatorname{Re} p(\zeta) > 0$, $|\zeta| > 1$.

Приведенное утверждение становится очевидным, если заметить, что оно сводится к лемме 1 заменой $\zeta = 1/z$.

Теорема 3. *Пусть функция $h(\zeta)$ аналитична при $|\zeta| > 1$ и имеет простой полюс в бесконечности, в окрестности которой справедливо представление $h(\zeta) = c\zeta + O(1)$, $c > 1$. Если существуют такое $\alpha > 0$ и такая аналитическая при $|\zeta| > 1$ функция $h_0(\zeta)$, $h_0(\zeta) = \zeta + O(1)$, с простым полюсом в бесконечности, что*

$$\operatorname{Re} \left[(\alpha + 1)\zeta \frac{h'_0}{h_0} - \left(1 + \zeta \frac{h''_0}{h'_0}\right)\right] > 0, \quad |\zeta| > 1, \tag{8}$$

и выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} \zeta \frac{h' h_0^\alpha}{h(h^\alpha - h_0^\alpha)} > 0, \quad |\zeta| > 1, \tag{9}$$

то $h(\zeta)$ однолистна при $|\zeta| > 1$.

Доказательство. Для однопараметрического семейства

$$\omega(\zeta, t) = [(1 - t)h_0(\zeta)^{-\alpha} + th(\zeta)^{-\alpha}]^{-1/\alpha}$$

неравенство (7) можно записать в виде

$$\alpha \operatorname{Re} \left[(1 - t)\zeta \frac{h'_0 h^\alpha}{h_0(h^\alpha - h_0^\alpha)} + t\zeta \frac{h' h_0^\alpha}{h(h^\alpha - h_0^\alpha)}\right] > 0.$$

Для выполнения последнего условия при всех $t \in [0, 1]$ необходимо и достаточно, чтобы при всех $|\zeta| > 1$ были справедливы неравенства (9) и

$$\operatorname{Re} \left[\zeta \frac{h'_0 h^\alpha}{h_0(h^\alpha - h_0^\alpha)}\right] > 0. \tag{10}$$

Покажем, что условие (8) совместно с (9) обеспечивают выполнение неравенства (10). Обозначим

$$\zeta \frac{h'_0 h^\alpha}{h_0(h^\alpha - h_0^\alpha)} = p(\zeta).$$

Функция $p(\zeta)$ аналитична при $|\zeta| > 1$, $\operatorname{Re} p(\infty) = c^\alpha/(c^\alpha - 1) > 0$. Имеем

$$\alpha\zeta \frac{h' h_0^\alpha}{h(h^\alpha - h_0^\alpha)} = -(\alpha + 1)\zeta \frac{h'_0}{h_0} + \left(1 + \zeta \frac{h''_0}{h'_0}\right) + \alpha p(\zeta) - \zeta \frac{p'}{p}.$$

Следовательно, согласно (9) и (8)

$$\operatorname{Re}\left[\alpha p-\zeta\frac{p'}{p}\right]>\operatorname{Re}\left[(\alpha+1)\zeta\frac{h_0'}{h_0}-\left(1+\zeta\frac{h_0''}{h_0'}\right)\right]>0,\quad |\zeta|>1.$$

Применяя лемму 2, получим $\operatorname{Re}p(\zeta)>0, |\zeta|>1$, т.е. неравенство (10) выполняется. Таким образом, изучаемое семейство функций удовлетворяет условию (7). Теперь для доказательства однолистности всех функций семейства (и функции $h(\zeta)$ в том числе) достаточно показать, что функция $h_0(\zeta)$ однолистна при $|\zeta|>1$.

Для функции $p(\zeta)=\zeta h_0'/h_0$ неравенство (8) примет вид $\operatorname{Re}[\alpha p(\zeta)-\zeta p'/p]>0$, $|\zeta|>1$. Применяя лемму 2, убеждаемся в том, что условие (8) обеспечивает принадлежность функции $h_0(\zeta)$ известному классу звездообразных функций — подклассу однолистных функций [10]. □

Аналогично доказывается

Теорема 4. *Пусть функция $h(\zeta)$ аналитична при $|\zeta|>1$ и имеет простой полюс в бесконечности, в окрестности которой справедливо представление $h(\zeta)=c\zeta+O(1)$, $c>1$. При выполнении неравенства*

$$\operatorname{Re}\zeta\frac{h'}{h\ln\frac{h}{\zeta}}>0,\quad |\zeta|>1, \tag{11}$$

функция $h(\zeta)$ однолистна при $|\zeta|>1$.

Доказательство. Рассмотрим однопараметрическое семейство

$$\omega(\zeta,t)=\left(\frac{h(\zeta)}{\zeta}\right)^t\zeta,\quad t\in[0,1],$$

где ветвь у степени выбирается так, что $c^t\in\mathbf{R}^+$. Имеем $\omega(\zeta,1)=h(\zeta)$, $\omega(\zeta,0)=\zeta$. Условие последовательной вложимости соответствующих областей (7) сводится к неравенству

$$\operatorname{Re}\left[t\zeta\frac{h'}{h\ln\frac{h}{\zeta}}+(1-t)\frac{1}{\ln\frac{h}{\zeta}}\right]>0,\quad |\zeta|>1.$$

Это неравенство выполняется при всех $t\in[0,1]$, если выполняется условие (11) и неравенство

$$\operatorname{Re}[p(\zeta)]>0,\quad |\zeta|>1,$$

с $p(\zeta)=1/\ln\frac{h}{\zeta}$. Выполнение последнего неравенства обеспечивает условие (11), записанное в виде

$$\operatorname{Re}\left[p-\zeta\frac{p'}{p}\right]>0.$$

Теперь, применяя лемму 2, убеждаемся, что условие последовательного вложения областей (7) выполняется. В совокупности с однолистностью функции $\omega(\zeta,0)=\zeta$, $|\zeta|>1$, это дает однолистность всех функций семейства, в том числе и $\omega(\zeta,1)=h(\zeta)$. □

4. Применение семейств последовательно вложенных областей для моделирования процесса роста полостей в вязких телах

Рассмотрим плоскую задачу определения напряжений в бесконечном вязком теле с непрерывно расширяющейся полостью. Пусть области, занимаемые телом, представляют собой семейство последовательно вложенных друг в друга областей D_t, $t\in[0,1]$, о которых шла речь выше. В [11] задача определения напряжений в таких областях сводится к определению семейств аналитических в E^- с полюсами в ∞ функций $f(\zeta,t)$ и $g(\zeta,t)$ с заданным поведением в окрестности ∞

$$\begin{aligned} f(\zeta,t) &= \Gamma(t)\zeta + O(1),\\ g(\zeta,t) &= \Gamma'(t)\zeta + O(1), \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \frac{\omega'_\zeta(\infty,t)}{4}[\sigma_{11}(t)|_\infty + \sigma_{22}(t)|_\infty],\\ \Gamma'(t) &= \frac{\omega'_\zeta(\infty,t)}{4}[\sigma_{11}(t)|_\infty - \sigma_{22}(t)|_\infty]. \end{aligned}$$

В терминах этих функций вектор граничных усилий представим в виде

$$F(\theta,t) = -i\Big[f(\zeta,t) + \frac{\omega(\zeta,t)}{\overline{\omega'_\zeta(\zeta,t)}}\overline{f'_\zeta} + \overline{g(\zeta,t)}\Big]\Big|_{\zeta=\exp(i\theta)}. \tag{13}$$

Пусть $(\dot u,\dot v)$ — вектор скорости материальной частицы. Тогда он имеет следующее представление с использованием введенных функций [11]:

$$2\mu(\dot u,\dot v) = f(\zeta,t) - \frac{\omega(\zeta,t)}{\overline{\omega'_\zeta(\zeta,t)}}\overline{f'_\zeta} - \overline{g(\zeta,t)}, \tag{14}$$

где 2μ — коэффициент сдвиговой вязкости. На границах полостей движение материальной частицы, соответствующее фиксированному значению параметра θ, с ростом t приведет к получению траектории $L_\theta = \{\omega(\exp(i\theta),t),\ t\in[0,1]\}$. Следовательно, на границе $(\dot u,\dot v) = \omega'_t(\zeta,t)$, т. е. скорость движения материальной частицы совпадает с кинетической скоростью. Последнее обеспечивает согласно (14) граничное соотношение

$$2\mu\omega'_t(\exp(i\theta),t) = \Big[f(\zeta,t) - \frac{\omega(\zeta,t)}{\overline{\omega'_\zeta(\zeta,t)}}\overline{f'_\zeta} - \overline{g(\zeta,t)}\Big]\Big|_{\zeta=\exp(i\theta)}. \tag{15}$$

Таким образом, если задать параметрическое семейство функций $\omega(\zeta,t)$, $\omega(\infty,t)=\infty$, $t\in[0,1]$, отображающих E^- на семейство последовательно вложенных областей D_t, $t\in[0,1]$, и изменение компонент напряжений в бесконечности $\sigma_{11}(t)|_\infty$, $\sigma_{22}(t)|_\infty$, то из условия (15), аналогичного граничному условию основных задач теории упругости, можно найти функции $f(\zeta,t)$, $g(\zeta,t)$. В случае, когда $\omega(\zeta,t)$ — рациональная дробь, нетрудно так же, как в [12], получить точное решение. Теперь, зная граничные значения функций $f(\zeta,t)$, $g(\zeta,t)$, легко определить с помощью (13) те граничные напряжения, при наличии которых и развиваются полости, дополняющие D_t, $t\in[0,1]$, до плоскости.

Приведем пример развития полости с гладкой границей в полость с границей, имеющей касп. Рассмотрим семейство

$$\omega(\zeta,t) = \frac{6\zeta(\zeta+1)}{(3\zeta-1)t + 6\zeta(1-t)},\quad |\zeta|>1,\quad t\in[0,1].$$

Имеем $h_0(\zeta)\equiv\omega(\zeta,0)=\zeta+1$ — однолистная в E^- функция, отображающая внешность единичного круга на плоскость с круговым вырезом, причем

$$\operatorname{Re}\Big[2\zeta\frac{h'_0}{h_0} - \Big(1+\zeta\frac{h''_0}{h'_0}\Big)\Big] = \operatorname{Re}\frac{\zeta-1}{\zeta+1} > 0,\quad |\zeta|>1.$$

Кроме того, функции $h(\zeta)\equiv\omega(\zeta,1)$ и $h_0(\zeta)$ связывает соотношение

$$\operatorname{Re}\zeta\frac{h'h_0}{h(h-h_0)} = \operatorname{Re}\frac{\zeta-1}{\zeta+1} > 0,\quad |\zeta|>1.$$

Следовательно, для построенного однопараметрического семейства выполняются условия теоремы 3, и, значит, области, получаемые отображением E^- при помощи функций семейства, однолистны и последовательно вложены друг в друга. Иначе говоря, полости, дополняющие эти области до плоскости, имеют простые границы и расширяются с ростом параметра t. Заметим еще, что $h'(1)=0$. Это свидетельствует о наличии каспа на границе области, последней в семействе. Решим для этого семейства задачу нахождения функций (12) по краевому условию (15).

В данном случае краевое условие (15) может быть записано в виде

$$\operatorname{Re}\left[f(\zeta)-f_0(\zeta,t)-g(\zeta)\right]\Big|_{\zeta=\exp(i\theta)}=12\mu\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{3\zeta(2-t)^2}+g_0(\zeta,t)\right\}\Big|_{\zeta=\exp(i\theta)},$$

$$\operatorname{Im}\left[f(\zeta)+f_0(\zeta,t)+g(\zeta)\right]\Big|_{\zeta=\exp(i\theta)}=12\mu\operatorname{Im}\left\{-\frac{1}{3\zeta(2-t)^2}+g_0(\zeta,t)\right\}\Big|_{\zeta=\exp(i\theta)},$$

где

$$f_0(\zeta,t)=\frac{[6\zeta-(3\zeta+1)t]^2(\zeta+1)f'(\zeta)}{\zeta(6-3t-\zeta t)\{(2\zeta+1)[6\zeta-(3\zeta+1)t]-3\zeta(\zeta+1)(2-t)\}},$$

$$g_0(\zeta,t)=\frac{[2+4(2-t)^{-1}]\zeta^2+[1-t^2(2-t)^{-2}/3]\zeta}{[6\zeta-(3\zeta+1)t]^2}.$$

Восстанавливая мероморфные функции по граничным значениям их действительной или мнимой частей, получим

$$f(\zeta)-f_0(\zeta,t)-g(\zeta)=12\mu\left\{\frac{1}{3\zeta(2-t)^2}+g_0(\zeta,t)\right\}+(\Gamma-\Gamma')\zeta-\frac{\Gamma-\Gamma'}{\zeta}+C\frac{1-\zeta\zeta_0}{\zeta-\zeta_0}-\overline{C}\frac{\zeta-\zeta_0}{1-\zeta\zeta_0},$$

$$f(\zeta)+f_0(\zeta,t)+g(\zeta)=12\mu\left\{-\frac{1}{3\zeta(2-t)^2}+g_0(\zeta,t)\right\}+(\Gamma+\Gamma')\zeta+\frac{\Gamma+\Gamma'}{\zeta}-C\frac{1-\zeta\zeta_0}{\zeta-\zeta_0}-\overline{C}\frac{\zeta-\zeta_0}{1-\zeta\zeta_0},$$

где $\zeta_0=6t^{-1}-3$. Последние два соотношения дают

$$f(\zeta)=12\mu g_0(\zeta,t)+\Gamma\zeta+\frac{\Gamma'}{\zeta}-\overline{C}\frac{\zeta-\zeta_0}{1-\zeta\zeta_0},$$

$$g(\zeta)=f(\zeta)-f_0(\zeta,t)-12\mu\left\{\frac{1}{3\zeta(2-t)^2}+g_0(\zeta,t)\right\}-$$

$$-(\Gamma-\Gamma')\zeta+\frac{\Gamma-\Gamma'}{\zeta}-C\frac{1-\zeta\zeta_0}{\zeta-\zeta_0}+\overline{C}\frac{\zeta-\zeta_0}{1-\zeta\zeta_0}. \qquad (16)$$

Теперь подберем неизвестный пока коэффициент C так, чтобы функция $g(\zeta)$ из (16) была аналитичной, приравнивая нулю коэффициент при $(\zeta-\zeta_0)^{-1}$ в выражении (16) для $g(\zeta)$.

В результате подсчетов получим

$$C=\frac{16t(2-t)(3-t)(2t-3)}{[4t^3(2-t)+3(2t-3)^2(t-3)(11t-21)]}\left\{\frac{3\mu t}{32(2-t)^6}[45(16-20t+8t^2-t^3)+\right.$$

$$\left.+6t-6t^2+t^3]+\Gamma-\frac{\Gamma' t^2}{9(2-t)^2}\right\}. \qquad (17)$$

Теперь вектор граничных усилий в любой точке $\zeta=\exp(i\theta)$ согласно (13) может быть вычислен по формуле

$$F(\theta,t)=i\frac{4\mu}{(2-t)^2}e^{i\theta}-12i\mu g_0(e^{i\theta},t)-2i\Gamma e^{i\theta}-i\Gamma' e^{-i\theta}+iC\frac{e^{i\theta}-(6/t-3)}{1-e^{i\theta}(6/t-3)},$$

где C из (17).

Рассмотрим случай $\Gamma=\Gamma'=0$, что соответствует отсутствию напряжений в бесконечности.

Согласно [13] вектор граничных усилий связан с вектором напряжений (X_n, Y_n), действующим на границу области со стороны внешней нормали, с помощью соотношения

$$X_n(\theta,t) + iY_n(\theta,t) = \frac{F'(\theta,t)_\theta}{|\omega'_\zeta(e^{i\theta},t)|}. \tag{18}$$

Проследим за точками на изменяющихся с ростом t контурах, соответствующими значениям параметров $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. При $\theta = 0$ получим с ростом t точки, движущиеся вправо, причем последняя при $t = 1$ становится вершиной каспа. При $\theta = \pi$ имеем точки, остающиеся на месте с ростом t. Нетрудно заметить, что $Y_n(0,t) \equiv Y_n(\pi,t) \equiv 0$, $t \in [0,1]$. Учитывая, что $\omega'(1,1) = 0$, а значит, $\lim\limits_{t\to 1} X_n(0,t) = \infty$ согласно (18), сделаем вывод о том, что процесс образования каспа так же, как в случае упругих тел, связан с обращением в бесконечность компоненты вектора напряжений.

Литература

1. Pommerenke C. *Über die Subordination analytischer Funktionen* // J. Reine und Angew. Math. – 1965. – № 218. – P. 159–173.
2. Куфарев П.П. *Теорема о решениях одного дифференциального уравнения* // Учен. зап. ТГУ. Изд-во ТГУ. – Томск, 1947. – № 5. – С. 20–21.
3. Широкова Е.А. *О применении метода площадей к построению параметрических семейств однолистных функций.* – Казан. ун-т. – Казань, 1977. – 16 с. – Деп. в ВИНИТИ 5.05.1977, № 1792-77.
4. Куфарев П.П., Соболев В.В., Спорышева Л.В. *Об одном методе исследования экстремальных задач для функций, однолистных в полуплоскости* // Тр. ТГУ. Изд-во ТГУ. – Томск, 1968. – № 200. – С. 142–164.
5. Becker J. *Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlicht Funktionen* // J. Reine und Angew. Math. – 1972. – № 255. – P. 23–43.
6. Базилевич И.Е. *Об одном случае интегрируемости в квадратурах уравнения Левнера–Куфарева* // Матем. сб. – 1955. – Т. 37. – № 3. – С. 471–476.
7. Eenigenburg P.T., Miller S.S., Mocanu P.T., Reade M.O. *On a Briot–Bouquet differential subordination* // Rev. Roum. math. pures et appl. – 1984. – V. 29. – № 7. – P. 567–573.
8. Широкова Е.А. *О расширении подкласса функций Базилевича и о свойствах интеграла Бернарди.* – Казан. ун-т. – Казань, 1977. – 8 с. – Деп. в ВИНИТИ 12.09.1977, № 3623-77.
9. Eenigenburg P.T., Miller S.S., Mocanu P.T., Reade M.O. *On a subclass of Bazilevic functions* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1974. – V. 45. – № 1. – P. 88–93.
10. Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А. *Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций* // УМН. – 1975. – Т. 30. – Вып. 4. – С. 3–60.
11. Черепанов Г.П. *Механика хрупкого разрушения.* – М.: Наука, 1974. – 640 с.
12. Shirokova E.A., Ivan'shin N.A. *The exact solution of the plane elasticity problems for the airfoil crack with two cusps* // Mech. Res. Com. – 1998. – V. 25. – № 2. – P. 179–182.
13. Мусхелишвили Н.И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения. Плоская теория упругости. Кручения и изгиб.* – М.: Наука, 1966. – 707 с.

Казанский государственный университет

Поступила
04.02.2004