ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 11 (450)

УДК 517.95

К.Б. САБИТОВ, А.А. КАРАМОВА, Г.Г. ШАРАФУТДИНОВА

К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

В работе установлены принципы экстремума решений общего линейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в областях эллиптичности, гиперболичности и в целом в смешанной области. Приводятся применения этих принципов при исследовании задач Трикоми для уравнений смешанного типа.

1. Постановка задач

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + N(x)u_{yy} + Au_x + Bu_y + Cu = F, \tag{1}$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, $xN(x) > 0$ при $x \neq 0$, $K(y)$, $N(x)$, $A(x,y)$, $B(x,y)$, $C(x,y)$ и $F(x,y)$ — заданные функции в области D, ограниченной: 1) простой кривой Жордана Γ, лежащей в первой четверти $x, y > 0$ с концами в точках $B_1 = (b_1, 0)$ и $B_2 = (0, b_2)$, $b_1, b_2 > 0$; 2) характеристиками OC_1 и C_1B_1 уравнения (1) при $x > 0$ и $y < 0$, $O = (0,0)$, $C_1 = (b_1/2, y_{C_1})$, $y_{C_1} < 0$; 3) характеристиками OC_2 и C_2B_2 уравнения (1) при $x < 0$ и $y > 0$, $C_2 = (x_{C_2}, b_2/2)$, $x_{C_2} < 0$.

В дальнейшем предположим, что

$$K(y), N(x) \in C(\overline{D}_0) \wedge C(\overline{D}_i) \wedge C^2(\overline{D}_i \setminus \overline{OB}_i),$$
$$A(x,y), B(x,y) \in C(\overline{D}_0) \wedge C(\overline{D}_i) \wedge C^1(\overline{D}_i \setminus \overline{OB}_i),$$
$$C(x,y) \in C(\overline{D}_0) \wedge C(\overline{D}_i),$$
$$F(x,y) \in C(D_0) \wedge L(D_0) \wedge C(D_i) \wedge L(D_i), \quad i = 1,2.$$

Пусть $D_0 = D \cap \{x > 0, y > 0\}$, $D_1 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$, $D_2 = D \cap \{x < 0, y > 0\}$.

В области D для уравнения (1) рассмотрим следующие задачи типа Трикоми, исследование которых представляется важным в теоретическом и прикладном аспектах [1]–[9].

Задача T_1. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \wedge C^1(D) \wedge C^2(D_0 \cup D_1 \cup D_2); \tag{2}$$
$$Lu(x,y) \equiv F(x,y), \quad (x,y) \in D_0 \cup D_1 \cup D_2; \tag{3}$$
$$u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Gamma}; \tag{4}$$
$$u(x,y) = \psi_1(x,y), \quad (x,y) \in \overline{C_1B_1 \cup C_2B_2},$$

где φ и ψ_1 — заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(B_1) = \psi_1(B_1)$, $\varphi(B_2) = \psi_1(B_2)$.

Задача T_2. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (2)–(4) и

$$u(x,y) = \psi_2(x,y), \quad (x,y) \in \overline{OC_1 \cup OC_2},$$

где φ и ψ_2 — заданные достаточно гладкие функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации, код гранта 22, и Российского фонда фундаментальных исследований, код гранта 99-01-00934.

При исследовании задач T_1 и T_2 важную роль играет принцип экстремума, установленный впервые А.В. Бицадзе в 1950 г. для уравнения Лаврентьева. Интерес к доказательству справедливости принципа экстремума для уравнения (1) объясняется тем, что, во-первых, из него сразу же следует единственность решения задач T_1 и T_2 без каких-либо ограничений на кривую Γ в довольно широком классе регулярных решений уравнения (1), а в свою очередь теорема единственности играет решающую роль при доказательстве существования решения задач T_1 и T_2 методом интегральных уравнений. Во-вторых, он позволяет построить альтернирующий процесс типа Шварца [10] для решения задач T_1 и T_2 при довольно общих предположениях относительно кривой Γ при подходе к осям координат. В-третьих, принцип экстремума находит применение при построении спектральной теории задач T_1 и T_2 и исследовании качественных свойств решений уравнения (1).

В данной работе установлены экстремальные свойства решений уравнения (1) в областях эллиптичности, гиперболичности и в целом в смешанной области D, и приводятся применения этих свойств при исследовании задач T_1 и T_2. Ранее принцип максимума решения задачи T_2 был установлен для модельных уравнений смешанного типа с использованием явных формул решения краевых задач. Отметим, что принцип максимума решения задачи T_1 здесь устанавливается впервые.

2. Экстремальные свойства уравнений в области эллиптичности

Теорема 1. *Пусть*

1) $C(x,y) \le 0$ *в области* D_0;
2) $u(x,y) \in C(\overline{D}_0) \wedge C^1(D_0 \cup OB_1 \cup OB_2) \wedge C^2(D_0)$, $Lu \equiv F(x,y) \ge 0$ (≤ 0) *в* D_0;
3) $\max\limits_{\overline{D}_0} u(x,y) = u(Q) > 0$ $(\min\limits_{\overline{D}_0} u(x,y) = u(Q) < 0)$.

Тогда, если $Q \in OB_1 \cup OB_2$,

$$\frac{\partial u}{\partial n}(Q) < 0 \ (> 0), \tag{5}$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial n} = u_x n_x + u_y n_y,$$

n_x *и* n_y *— компоненты внутренней нормали к границе области* D_0.

Доказательство. Пусть $\max\limits_{\overline{D}_0} u(x,y) = u(Q) > 0$. В силу условий 1) и 2) в области D_0 для уравнения (1) справедлив внутренний принцип экстремума, согласно которому максимум $u(Q)$ решения $u(x,y) \ne \text{const}$ не может достигаться внутри области D_0. Пусть $u(Q)$ достигается в некоторой внутренней точке $(x_0, 0)$ отрезка OB_1. Пусть К — круг радиуса $d > 0$ области D_0, граница которого касается отрезка OB_1 в точке $(x_0, 0)$; $K_1 = \{(x,y) \mid 0 < y < y_1 < d\} \cap K$, ∂K_1 — граница сегмента K_1, состоящая из отрезка S_1 $(y = y_1)$ и части окружности S $(r^2 = d^2$, $0 \le y \le y_1$, $r^2 = (x-x_0)^2 + (y-d)^2)$. В области K_1 рассмотрим барьерную функцию

$$v(x,y) = \exp(-\alpha r^2) - \exp(-\alpha d^2),$$

которая является решением уравнения

$$\begin{aligned} Lv = \exp(-\alpha r^2)\{4\alpha^2[K(y)(x-x_0)^2 + N(x)(y-d)^2] - \\ - 2\alpha[K(y) + N(x) + A(x-x_0) + B(y-d)] + C[1 - \exp(\alpha r^2 - \alpha d^2)]\}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу ограниченности коэффициентов уравнения (1) и непрерывности функции $N(x)$ в $\overline{D_0}$ и ввиду того, что коэффициент при α^2 имеет положительную нижнюю грань в замкнутой области $\overline{K_1}$, следует $Lv > 0$ при условии, когда α достаточно велико. На множестве $\overline{K_1} \backslash Q$ в силу внутреннего принципа экстремума для уравнения (1) выполняется неравенство $u(x,y) < u(x_0, 0)$. С учетом этих свойств функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ введем новую функцию

$$w(x,y) = u(x,y) + \varepsilon v(x,y), \quad \varepsilon > 0,$$

которая в области K_1 удовлетворяет эллиптическому уравнению

$$Lw = L(u + \varepsilon v) = F(x, y) + \varepsilon Lv > 0$$

и

$$w|_s = (u + \varepsilon v)|_s \le u(x_0, 0),$$
$$w|_{s_1} = (u + \varepsilon v)|_{s_1} < u(x_0, 0) = w(x_0, 0)$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Отсюда вытекает

$$\lim_{y \to 0+0} w_y(x_0, y) \le 0$$

или

$$u_y(x_0, 0+0) \le -\varepsilon v_y(x_0, 0+0) = -2\varepsilon d \exp(-\alpha d^2) < 0.$$

Тем самым доказана справедливость неравенства (5). $\square$

Замечание 1. При доказательстве теоремы 1 использованы идеи доказательства аналогичных утверждений для невырождающихся эллиптических уравнений [11]–[13].

Теорема 2. *Пусть*

1) *выполнены условия* 1)–3) *теоремы* 1;
2) *функция* $u(x, y)$ *имеет изолированный максимум* (*минимум*) $u(Q)$ *в точке* O;
3) *в малой окрестности точки* O
   а) *функции* u_x^2 *и* u_y^2 *суммируемы*;
   б) *производные* A_x *и* B_y *непрерывны вплоть до границы*;
   в) $2C - A_x - B_y \le 0$, $A(0, y) \ge 0$ *и* $B(0, x) \ge 0$.

Тогда в любой окрестности $U \subset \partial D_0$ *точки* O *найдется точка* $Q' \in U$ *такая, что*

$$\frac{\partial u}{\partial n}(Q') < 0 (> 0). \tag{6}$$

Доказательство. Допустим, что существует окрестность U' точки O такая, что для всех $P \in U' \cap \partial D_0$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} \ge 0. \tag{7}$$

Пусть $r \in (O, u(Q))$. Число r возьмем настолько близким к числу $u(Q) = u(O)$, чтобы кривая γ, составленная из линии уровня $u(x, y) = r$, целиком лежала в U' и для всех точек (x, y), принадлежащих области G, ограниченной кривой γ и отрезками OB_1 и OB_2, $u(x, y) \ge r$. Обозначим через A_1 и A_2 точки пересечения кривой γ с отрезками OB_1 и OB_2 соответственно. В области G рассмотрим функцию $v(x, y) = u(x, y) - r$, которая является решением уравнения

$$Lv \equiv K(y)v_{xx} + N(x)v_{yy} + Av_x + Bv_y + Cv = F(x, y) - rC \tag{8}$$

и удовлетворяет граничным условиям

$$v(x, y)|_\gamma = 0, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{OA_1} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{OA_1} \ge 0, \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{OA_2} = \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{OA_2} \ge 0. \tag{11}$$

Неравенства (10) и (11) следуют из допущения (7). Интегрируя тождество

$$vLv = \left(Kvv_x + \frac{1}{2}Av^2\right)_x + \left(Nvv_y + \frac{1}{2}Bv^2\right)_y - (Kv_x^2 + Nv_y^2) + v^2\left(C - \frac{1}{2}A_x - \frac{1}{2}B_y\right)$$

по области G с учетом условий (8)–(9), получим

$$\int\limits_{OA_1}\left[N(x)v(x,0)v_y(x,0)+\frac{1}{2}B(x,0)v^2(x,0)\right]dx+\int\limits_{OA_2}\left[K(y)v(0,y)v_x(0,y)+\frac{1}{2}A(0,y)v^2(0,y)\right]dy+$$

$$+\iint\limits_G\left[K(y)v_x^2+N(x)v_y^2-\left(C-\frac{1}{2}A_x-\frac{1}{2}B_y\right)v^2\right]dx\,dy+\iint\limits_G[F(x,y)-rC(x,y)]v\,dx\,dy=0. \quad (12)$$

Поскольку $v(x,y)\geq 0$ в области G, то в силу наложенных условий на коэффициенты и правую часть уравнения (1) и неравенств (10) и (11) все интегралы в левой части равенства (12) неотрицательны. Тогда из (12) следует $v(x,y)\equiv 0$ в $\overline{G}$, т. е. $u(x,y)\equiv \text{const}$ в $\overline{G}$, что противоречит условию изолированности максимума в точке O. Следовательно, в любой окрестности $U\subset\partial D_0$ точки $Q\equiv O$ существует точка $Q'\in U$ такая, что справедливо неравенство (6). $\square$

Замечание 2. Ранее аналог теоремы 2 был доказан Н.С. Надирашвили [14], [15] для равномерно эллиптических уравнений 2-го порядка методом барьерных функций. В работе [16] результат Н.С. Надирашвили был перенесен для слабо вырождающихся эллиптических уравнений 2-го порядка. Для уравнения (1) в области D_0 эти результаты неприменимы, т. к. в случае $K(0)=N(0)=0$ порядок уравнения вырождается.

3. Экстремальные свойства решений в области гиперболичности

В области D_1 перейдем к характеристическим координатам (ξ,η). Тогда уравнение (1) примет вид

$$L_0u\equiv u_{\xi,\eta}+au_\xi+bu_\eta+cu=f(\xi,\eta), \quad (13)$$

где

$$a(\xi,\eta)=\frac{1}{4K}\left(A+B\sqrt{-K}-\frac{K'}{2\sqrt{-K}}\right),\quad c(\xi,\eta)=\frac{C}{4K},$$
$$b(\xi,\eta)=\frac{1}{4K}\left(A-B\sqrt{-K}+\frac{K'}{2\sqrt{-K}}\right),\quad f(\xi,\eta)=\frac{F}{4K},$$

а область D_1 отобразится в область Δ, ограниченную отрезками OB_1 ($\eta=\xi$), B_1C_1 ($\eta=l$) и C_1O ($\xi=0$). При этом за образами точек O, B_1 и C_1 оставлены те же обозначения прообразов.

Пусть $\alpha=a\beta$, $\beta=\exp(\int b\,d\xi)$, $\alpha^*=b\beta^*$, $\beta^*=\exp(\int a\,d\eta)$; функции $a(\xi,\eta)$, $a_\xi(\xi,\eta)$, $b(\xi,\eta)$, $b_\eta(\xi,\eta)$, $c(\xi,\eta)$ непрерывны в $\overline{\Delta}$, кроме быть может отрезка $\overline{OB_1}$, и удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\begin{cases} h=a_\xi+ab-c\geq 0,\\ \alpha(0,\eta)+\displaystyle\int_0^\xi\beta(t,\eta)c(t,\eta)dt>0,\quad 0<\xi<\eta\leq l,\end{cases} \quad (A_1)$$

$$\alpha(\xi,\eta)-\int_0^\xi\beta(t,\eta)|h(t,\eta)|dt>0,\quad 0<\xi<\eta\leq l, \quad (A_2)$$

$$\begin{cases} h^*=b_\eta+ab-c\geq 0,\\ \alpha^*(\xi,l)-\displaystyle\int_\eta^l\beta^*(\xi,t)c(\xi,t)dt<0,\quad 0\leq\xi<\eta<l,\end{cases} \quad (A_1^*)$$

$$\alpha^*(\xi,\eta)+\int_\eta^l\beta^*(\xi,t)|h^*(\xi,t)|dt<0,\quad 0\leq\xi<\eta<l. \quad (A_2^*)$$

Замечание 3. Отметим, что в условиях (A_k) и (A_k^*), $k = 1, 2$, интегральные неравенства могут быть нестрогими (т. е. ≥ 0 для условий (A_k) и ≤ 0 для условий (A_k^*)), но в этом случае на каждом отрезке $[0, \xi]$ характеристики $\eta = \mathrm{const}$ и отрезке $[\eta, l]$ характеристики $\xi = \mathrm{const}$ множество точек, в которых $h(t, \eta) = 0$ и $h^*(\xi, t) = 0$ соответственно, имеет меру нуль.

Предполагается, что правая часть $f(\xi, \eta)$ непрерывна в Δ, интегрируема по ξ на каждом отрезке $[0, \xi_0]$ характеристики $\eta = \eta_0$, $0 < \xi_0 < \eta_0 \leq l$, и интегрируема по η на каждом отрезке $[\eta_0, l\,]$ характеристики $\xi = \xi_0$, $0 \leq \xi_0 < \eta_0 < l$.

Определение 1. Регулярным в Δ решением уравнения (13) назовем функцию $u(\xi, \eta)$, удовлетворяющую условиям $u(\xi, \eta) \in C(\overline{\Delta}) \wedge C^1(\overline{\Delta} \setminus \overline{OB_1})$, $u_{\xi\eta} \in C(\Delta)$, $L_0 u(\xi, \eta) \equiv f(\xi, \eta)$, $(\xi, \eta) \in \Delta$.

Теорема 3. *Пусть*

1) *коэффициенты и правая часть уравнения* (13) *обладают отмеченной выше гладкостью и* $f(\xi, \eta) \leq 0$ (≥ 0) *в* Δ;
2) $u(\xi, \eta)$ — *регулярное в* Δ *решение уравнения* (13);
3) $\max\limits_{\overline{\Delta}} u(\xi, \eta) = u(Q) > 0$ $(\min\limits_{\overline{\Delta}} u(\xi, \eta) = u(Q) < 0)$.

Если, кроме того, выполнено одно из следующих условий:

а) *коэффициенты уравнения* (13) *удовлетворяют условию* (A_1), $u(\xi, \eta) = 0$ *на характеристике* OC_1;
б) *коэффициенты уравнения* (13) *удовлетворяют условию* (A_1^*), $u(\xi, \eta) = 0$ *на характеристике* $C_1 B_1$,

то максимум (минимум) $u(Q)$ *достигается только на отрезке* $\overline{OB_1}$.

Доказательство. Пусть для определенности выполнено условие а). Рассмотрим в области Δ тождество $\beta L_0(u) = \frac{\partial}{\partial \xi}(\beta u_\eta + \alpha u) - \beta h u = f\beta$ и проинтегрируем его по отрезку NM прямой $\eta = \mathrm{const}$, принадлежащему Δ. Тогда получим

$$(\beta u_\eta + \alpha u)\big|_N^M = \int\limits_{NM} \beta h u \, d\xi + \int\limits_{NM} \beta f \, d\xi. \tag{14}$$

В равенстве (14) отрезок NM может принадлежать не только области Δ, но и $\overline{\Delta} \setminus \overline{OB_1}$. Допустим, что $\max\limits_{\overline{\Delta}} u(\xi, \eta) = u(Q) > 0$ достигается в точке $Q \in \Delta \cup C_1 B_1$. Из точки Q проведем отрезок $\eta = \mathrm{const}$ до пересечения с характеристикой OC_1 в точке P. В равенстве (14) в качестве отрезка NM возьмем PQ. Тогда будем иметь

$$\beta(Q) u_\eta(Q) = \int\limits_{PQ} \beta h u \, d\xi + \int\limits_{PQ} \beta f \, d\xi - \alpha(Q) u(Q) = \int\limits_{PQ} \beta f \, d\xi + \int\limits_{PQ} \beta h [u - u(Q)] d\xi +$$

$$+ u(Q) \int\limits_{PQ} \beta h \, d\xi - \alpha(Q) u(Q) = \int\limits_{PQ} \beta f \, d\xi + \int\limits_{PQ} \beta h [u - u(Q)] d\xi - u(Q) \Big[\alpha(P) + \int\limits_{PQ} \beta c \, d\xi\Big].$$

Отсюда в силу условия (A_1) и неравенств $f \leq 0$ в Δ, $u(Q) > 0$ следует, что $u_\eta(Q) < 0$. Но это противоречит тому, что $u_\eta(Q) \geq 0$.

Случай б) доказывается аналогично. $\square$

Замечание 4. Теорема 3 в случае а) для уравнения (13) впервые была установлена в [13] при условиях $u_\eta(O, \eta) \leq 0$ (≥ 0), $u(\xi, \eta) \in C^1(\overline{\Delta}) \wedge C^2(\Delta)$, $L_0 u \leq 0$ (≥ 0) в $\overline{\Delta} \setminus \overline{OB_1}$; $a, a'_\xi, b, c \in C(\overline{\Delta})$; $a \geq 0$, $h \geq 0$, $c \geq 0$ в $\overline{\Delta}$.

Теорема 4. *Пусть*

1) *коэффициенты уравнения* (13) *обладают отмеченной выше гладкостью и* $f(\xi, \eta) \equiv 0$ *в* Δ;
2) $u(\xi, \eta)$ — *регулярное в* Δ *решение уравнения* (13);

3) $\max\limits_{\overline{\Delta}} |u(\xi,\eta)| = |u(Q)| > 0$.

Если, кроме того, выполнено одно из условий

а) *коэффициенты уравнения* (13) *удовлетворяют условию* (A_2), $u(\xi,\eta)=0$ *на* OC_1;

б) *коэффициенты уравнения* (13) *удовлетворяют условию* (A_2^*), $u(\xi,\eta)=0$ *на* C_1B_1,

то максимум модуля $u(Q)$ *достигается только на отрезке* $\overline{OB_1}$.

Доказательство. Пусть выполняется условие б). В области Δ рассмотрим тождество

$$\beta^* L_0(u) = \frac{\partial}{\partial\eta}(\beta^* u_\xi + \alpha_* u) - \beta^* h^* u \equiv 0$$

и интегрируем его по отрезку NM прямой $\xi = \mathrm{const}$, принадлежащему Δ. Тогда получим

$$(\beta^* u_\xi + \alpha^* u)\big|_N^M = \int\limits_{NM} \beta^* h^* u\, d\eta. \tag{15}$$

Предположим, что $\max\limits_{\overline{\Delta}} |u(\xi,\eta)| = |u(Q)| > 0$ достигается в точке $Q \in \Delta \cup OC_1$. В силу линейности и однородности уравнения (13) (в этом случае $f(\xi,\eta)\equiv 0$), не теряя общности, можно считать, что $u(Q) > 0$. Тогда $\max\limits_{\overline{\Delta}} u(\xi,\eta) = u(Q) > 0$ и $|u(\xi,\eta)| \le u(Q)$ при всех $(\xi,\eta) \in \overline{\Delta}$. Из точки Q проведем отрезок $\xi = \mathrm{const}$ до пересечения с характеристикой C_1B_1 в точке P. Обозначим через E_1 множество точек отрезка QP, в которых $h^* \ge 0$, а через E_2 — множество точек отрезка QP, где $h^* < 0$. Тогда, рассуждая как в доказательстве теоремы 3, из равенства (15) получим

$$-\beta^*(Q) u_\xi(Q) = \int\limits_{QP} \beta^* h^* u\, d\eta + \alpha^*(Q) u(Q) =$$

$$= \int\limits_{E_1} \beta^* h^* [u - u(Q)] d\eta + \int\limits_{E_2} \beta^* h^* [u + u(Q)] d\eta + u(Q)\Big[\alpha^*(Q) + \int\limits_{QP} \beta^* |h^*| d\eta\Big].$$

Отсюда в силу условия (A_2^*) и неравенства $u(Q) > 0$ следует $u_\xi(Q) > 0$. Но это противоречит тому, что $u_\xi(Q) \le 0$. $\square$

Замечание 5. Теорема 4 в случае а) впервые была доказана в [17].

4. Экстремальные свойства решений в смешанной области

Определение 2. Регулярным в D решением уравнения (1) назовем функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (2), (3) и, кроме того, производные u_x и u_y непрерывны в $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$, за исключением быть может точек O, B_1 и B_2, где они могут иметь особенность порядка меньше единицы.

Теорема 5. *Пусть*

1) $C(x,y) \le 0$ *в* D_0, $F(x,y) \ge 0$ (≤ 0) *в* $D_0 \cup D_1 \cup D_2$;
2) $u(x,y)$ — *регулярное в* D *решение уравнения* (1);
3) $\max\limits_{\overline{D}} u(x,y) = u(Q) > 0$ $(\min\limits_{\overline{D}} u(x,y) = u(Q) < 0)$.

Если, кроме того, выполнено одно из следующих условий:

а) *коэффициенты уравнения* (1) *в областях* D_1 *и* D_2 *в характеристических координатах* (ξ,η) *удовлетворяют условию* (A_1), $u(x,y)=0$ *на* OC_1 *и* OC_2;

б) *коэффициенты уравнения* (1) *в областях* D_1 *и* D_2 *в характеристических координатах* (ξ,η) *удовлетворяют условию* (A_1^*), *в области* D_0 *условию* 3) *теоремы* 2 *и* $u(x,y)=0$ *на характеристиках* C_1B_1 *и* C_2B_2,

то максимум (минимум) $u(Q)$ *достигается на кривой* $\overline{\Gamma}$.

Теорема 6. *Пусть*

1) $C(x,y) \le 0$ *в* D_0, $F(x,y) \equiv 0$ *в* $D_0 \cup D_1 \cup D_2$;

2) $u(x,y)$ — *регулярное в* D *решение уравнения* (1);

3) $\max\limits_{\overline{D}} |u(x,y)| = |u(Q)| > 0$.

Если, кроме того, выполнено одно из условий:

а) *коэффициенты уравнения* (1) *в областях* D_1 *и* D_2 *в характеристических координатах* (ξ, η) *удовлетворяют условию* (A_2), $u(x,y) = 0$ *на характеристиках* OC_1 *и* OC_2;

б) *коэффициенты уравнения* (1) *в областях* D_1 *и* D_2 *в характеристических координатах* (ξ, η) *удовлетворяют условию* (A_2^*), *в области* D_0 *условию* 3) *теоремы* 2, $u(x,y) = 0$ *на характеристиках* C_1B_1 *и* C_2B_2,

то максимум модуля $|u(Q)|$ *достигается на кривой* $\overline{\Gamma}$.

Доказательство теорем 5 и 6 проводится на основании теорем 1–4.

Для примера приведем доказательство теоремы 6. Пусть $\max\limits_{\overline{D}} |u(x,y)| = |u(Q)| > 0$. В силу линейности и однородности уравнения (1) (в этом случае $F(x,y) \equiv 0$) можно считать, что $u(Q) > 0$. Тогда $\max\limits_{\overline{D}} u(x,y) = u(Q) > 0$ и $|u(x,y)| \leq u(Q)$. Поскольку выполнены условия теоремы 4, то точка $Q \in \overline{D}_0$. В силу внутреннего принципа экстремума для эллиптических уравнений точка $Q \notin \overline{D}_0$. Тогда $Q \in \overline{\Gamma} \cup OB_1 \cup OB_2 \cup O$. Пусть $Q \in OB_1$, т. е. $Q = (x_0, 0)$, $0 < x_0 < b_1$. В этой точке из теоремы 4 следует, что $u_y(x_0, 0-0) \geq 0$. А последнее согласно теореме 1 противоречит неравенству $u_y(x_0, 0+0) < 0$. Если $Q \in OB_2$, то, рассуждая аналогично, получим противоречие. При выполнении условия а) теоремы положительный максимум $u(Q)$ не может достигаться в точке O, следовательно, $Q \in \overline{\Gamma}$. Если выполнено условие б) теоремы, то максимум $u(Q)$ может достигаться в точке O. Пусть $Q \equiv O$. Тогда в малой окрестности O функция $u(x,0)$ при $x \to 0+0$ или $u(0,y)$ при $y \to 0+0$ монотонно возрастает к значению $u(Q)$. Пусть $(0,b]$, где $0 < b < b_1$, — промежуток оси $y = 0$, где $u(x,0)$ возрастает при $x \to 0+0$. Покажем, что $u_y(x,0) \geq 0$ при всех $x \in (0,b]$. Пусть ξ — любая точка из $(0,b]$. Из точки $E = (\xi, 0)$ опустим перпендикуляр с концом в точке $N \in D_1$, через точку N проведем характеристику уравнения (1) до пересечения с характеристикой C_1B_1 в точке M. Обозначим через H область, ограниченную характеристиками NM, MB_1 и отрезками B_1E, EN. Аналогично теореме 4 можно показать, что $\max\limits_{\overline{H}} u(x,y) > 0$ достигается только на отрезке $\overline{B_1E}$, а именно, в точке E ([9], с. 46). Тогда в этой точке $u_y(\xi, 0-0) \geq 0$. Следовательно, в силу произвольности точки $\xi \in (0,b]$ $u_y(x, 0-0) = u_y(x, 0+0) \geq 0$ на $(0,b]$. С другой стороны, в силу теоремы 2 на $(0,b]$ найдется точка $x' \in (0,b)$ такая, что $u_y(x', 0) < 0$, что противоречит неравенству $u_y(x,0) \geq 0$ на $(0,b]$. Следовательно, и в случае выполнения условия б) точка $Q \in \overline{\Gamma}$.

Следствие 1. а) Если выполнены условия теоремы 5 и $F(x,y) \equiv 0$, то $\forall\,(x,y) \in \overline{D}$ $\min\limits_{\overline{\Gamma}} u(x,y) \leq u(x,y) \leq \max\limits_{\overline{\Gamma}} u(x,y)$.

б) Если выполнены условия теоремы 6, то $\forall\,(x,y) \in \overline{D}$ $|u(x,y)| \leq \max\limits_{\overline{\Gamma}} |u(x,y)|$.

в) Если коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям теоремы 5 или 6 и в классе регулярных в D решений уравнения (1) существует решение задач T_1 и T_2, то оно единственно.

Следствие 2. Пусть коэффициенты уравнения (1) и функция $u(x,y)$ удовлетворяют условиям теоремы 5 (кроме условия 3)) и $F(x,y) \leq 0 (\geq 0)$ на множестве $D_0 \cup D_1 \cup D_2$. Тогда

а) если $u \geq 0$ (≤ 0) на $\overline{\Gamma}$, то $u(x,y) \geq 0$ (≤ 0) в $\overline{D}$;

б) если $u > 0$ (< 0) на Γ, то $u > 0$ (< 0) в D_0.

5. Пример

В качестве примера рассмотрим модельное уравнение смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения

$$\operatorname{sgn} y |y|^n u_{xx} + \operatorname{sgn} x |x|^m u_{yy} = F(x,y), \tag{16}$$

где $n \geq 0$, $m \geq 0$, в области D, изученное многими математиками ([6], [8], [9], с. 17–26).

В области D_1 перейдем к характеристическим координатам (ξ, η)

$$\xi = \frac{2}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}} - \frac{2}{n+2}(-y)^{\frac{n+2}{2}}, \quad \eta = \frac{2}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}} + \frac{2}{n+2}(-y)^{\frac{n+2}{2}}.$$

Тогда уравнение (16) принимает вид

$$L_1(u) \equiv u_{\xi\eta} + \frac{p_1}{\eta - \xi}(u_\xi - u_\eta) + \frac{q_1}{\eta + \xi}(u_\xi + u_\eta) = f_1, \tag{17}$$

где

$$f_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{4q_1}\left(\frac{4}{n+2}\right)^{4p_1}(\eta - \xi)^{-4p_1}(\eta + \xi)^{-4q_1}F(x, y),$$
$$p_1 = \frac{n}{2(n+2)}, \quad q_1 = \frac{m}{2(m+2)},$$

а область D_1 отобразится в область $\triangle$ (см. п. 3, $l = l_1 = \frac{2}{m+2}b_1^{\frac{m+2}{2}}$).

В области D_2 также перейдем к характеристическим координатам (ξ, η)

$$\xi = \frac{2}{n+2}y^{\frac{n+2}{2}} - \frac{2}{m+2}(-x)^{\frac{m+2}{2}}, \quad \eta = \frac{2}{n+2}y^{\frac{n+2}{2}} + \frac{2}{m+2}(-x)^{\frac{m+2}{2}}.$$

Тогда уравнение (16) принимает вид

$$L_2(u) \equiv u_{\xi\eta} + \frac{p_2}{\eta - \xi}(u_\xi - u_\eta) + \frac{q_2}{\eta + \xi}(u_\xi + u_\eta) = f_2, \tag{18}$$

где

$$f_2(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{4p_2}\left(\frac{4}{n+2}\right)^{4q_1}(\eta - \xi)^{-4p_2}(\eta + \xi)^{-4q_2}F(x, y),$$
$$p_2 = \frac{m}{2(m+2)}, \quad q_2 = \frac{n}{2(n+2)},$$

область отобразится в $\triangle$ (где только $l = l_2 = \frac{2}{n+2}b_2^{\frac{n+2}{2}}$).

В случае уравнения (17)

$$a(\xi, \eta) = \frac{q_1}{\eta + \xi} + \frac{p_1}{\eta - \xi}, \quad b(\xi, \eta) = \frac{q_1}{\eta + \xi} - \frac{p_1}{\eta - \xi}, \quad c(\xi, \eta) \equiv 0,$$
$$h(\xi, \eta) = \frac{p_1 - p_1^2}{(\eta - \xi)^2} + \frac{q_1^2 - q_1}{(\eta + \xi)^2}, \quad \beta(\xi, \eta) = (\xi + \eta)^{q_1}(\eta - \xi)^{p_1},$$
$$\alpha(\xi, \eta) = a(\xi, \eta)\beta(\xi, \eta) = p_1(\eta - \xi)^{p_1 - 1}(\xi + \eta)^{q_1} + q_1(\eta + \xi)^{q_1 - 1}(\eta - \xi)^{p_1}.$$

Легко заметить, что $h'_\xi > 0$ при $0 < \xi \leq \eta \leq l_1$, поэтому, когда $0 < \eta = \mathrm{const} \leq l_1$,

$$h_{\min} = \eta^{-2}(p_1 - q_1)(1 - p_1 - q_1) \leq h(\xi, \eta) \leq +\infty.$$

Отсюда ясно, что при $p_1 \geq q_1$ функция $h(\xi, \eta) \geq 0$ в $\overline{\triangle}$, а при $p_1 < q_1$ на сегменте $[0, \eta]$ меняет свой знак с минуса на плюс, обращаясь в нуль в единственной точке из интервала $]0, \eta[$.

Пусть $p_1 \geq q_1$. В этом случае $h(\xi, \eta) \geq 0$ в $\overline{\triangle}$ и по этой причине для выполнения (A_1) достаточно, чтобы $\alpha(0, \eta) > 0$ при $0 < \eta \leq l_1$. Очевидно, $\alpha(\xi, \eta) = a(\xi, \eta)\beta(\xi, \eta) > 0$ в $\overline{\triangle}$.

Пусть $p_1 < q_1$ и (ξ, η) — произвольная, но фиксированная точка из $\triangle \cup C_1B_1$. Пусть $t_0 \in (0, \xi)$ — точка, в которой $h(t_0, \eta) = 0$. При этих условиях рассмотрим левую часть неравенства (A_2)

$$G(\xi, \eta) = \alpha(\xi, \eta) - \int_0^\xi \beta(t, \eta)|h(t, \eta)|dt = \alpha(\xi, \eta) + \int_0^{t_0} \beta h\, dt - \int_{t_0}^\xi \beta h\, dt = 2\alpha(t_0, \eta) - \alpha(0, \eta) =$$

$$= \eta^{p_1+q_1-1}\left[2q_1\left(1+\frac{t_0}{\eta}\right)^{q_1-1}\left(1-\frac{t_0}{\eta}\right)^{p_1} + 2p_1\left(1+\frac{t_0}{\eta}\right)^{q_1}\left(1-\frac{t_0}{\eta}\right)^{p-1} - p_1 - q_1\right].$$

Покажем, что $G(\xi,\eta) > 0$. Введем функцию

$$\varphi(x) = 2q_1(1+x)^{q_1-1}(1-x)^{p_1} + 2p_1(1+x)^{q_1}(1-x)^{p_1-1} - p_1 - q_1$$

на сегменте $[0,1]$. Вычислим производную функции $\varphi(x)$

$$\varphi'(x) = 2(1+x)^{q_1}(1-x)^{p_1}h(x,1).$$

Отсюда видно, что $\varphi'(x_0) = 0 \iff h(x_0,1) = 0 \iff x_0 = \frac{t_0}{\eta} \in (0,1)$. Очевидно, x_0 является точкой наименьшего значения функции $\varphi(x)$ на $[0,1]$. Значение x_0 найдем из равенства $h(x_0,1) = 0$:

$$x_0 = \frac{1-n_0}{1+n_0}, \quad n_0^2 = \frac{p_1-p_1^2}{q_1-q_1^2}, \quad 0 < n_0 < 1.$$

Таким образом, при всех $x \in [0,1]$

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) = \varphi\left(\frac{1-n_0}{1+n_0}\right) = 2^{p_1+q_1}(1+n_0)^{1-p_1-q_1}\frac{q_1n_0+p_1}{n_0^{1-p_1}} - p_1 - q_1.$$

Используя неравенство $a^\alpha \leq \alpha a + 1 - \alpha$, где $a > 0$, $0 < \alpha < 1$, оценим $n_0^{1-p_1}$ и $\varphi(x_0)$

$$\varphi(x_0) > \frac{q_1n_0+p_1}{p_1+(1-p_1)n_0} - p_1 - q_1 = \frac{p_1(1-p_1-q_1)(1-n_0)}{p_1+(1-p_1)n_0} > 0.$$

Следовательно, $G(\xi,\eta) > 0$ в $\overline{\triangle}$ при всех $p_1, q_1 \geq 0$, $p_1 + q_1 > 0$, тем самым выполнено условие (A_2).

Теперь для уравнения (18) проверим условия (A_1) и (A_2). В этом случае

$$a(\xi,\eta) = \frac{q_2}{\eta+\xi} + \frac{p_2}{\eta-\xi}, \quad b(\xi,\eta) = \frac{q_2}{\eta+\xi} - \frac{p_2}{\eta-\xi}, \quad c(\xi,\eta) \equiv 0,$$
$$h(\xi,\eta) = \frac{p_2-p_2^2}{(\eta-\xi)^2} + \frac{q_2^2-q_2}{(\eta+\xi)^2}, \quad \beta(\xi,\eta) = (\xi+\eta)^{q_2}(\eta-\xi)^{p_2},$$
$$\alpha(\xi,\eta) = a\beta = p_2(\eta-\xi)^{p_2-1}(\xi+\eta)^{q_2} + q_2(\eta+\xi)^{q_2-1}(\eta-\xi)^{p_2}.$$

Рассуждая аналогично, как и в случае уравнения (17), получим $h(\xi,\eta) \geq 0$ в $\overline{\triangle}$ при $p_2 \geq q_2$, следовательно, выполнено условие (A_1). А при всех $p_2, q_2 \geq 0$ и $p_2 + q_2 > 0$ справедливо (A_2). Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 7. *Если $n = m > 0$, $F(x,y) \geq 0$ (≤ 0) в $D_0 \cup D_1 \cup D_2$, $u(x,y)$ — регулярное в D решение уравнения* (16)*, равное нулю на характеристиках OC_1 и OC_2, то положительный* (*отрицательный*) *максимум* (*минимум*) *функции $u(x,y)$ по $\overline{D}$ достигается только на $\overline{\Gamma}$.*

Если $n,m \geq 0$, $n+m > 0$, $F(x,y) \equiv 0$ в $D_0 \cup D_1 \cup D_2$, $u(x,y)$ — регулярное в D решение уравнения (16)*, равное нулю на характеристиках OC_1 и OC_2, то максимум модуля $|u(x,y)|$ по $\overline{D}$ достигается только на $\overline{\Gamma}$.*

Из этой теоремы следует единственность решения задачи T_2 при всех $n,m \geq 0$, $n+m > 0$.

Теперь проверим условия б) теорем 5 и 6 для уравнения (16). Для этого достаточно проверить условия (A_1^*) и (A_2^*) для уравнений (17) и (18) в области $\triangle$.

Для уравнения (17)

$$h^*(\xi,\eta) = b_\eta + ab - c = h(\xi,\eta), \quad \beta^* = \beta,$$
$$\alpha^*(\xi,\eta) = b\beta^* = q_1(\xi+\eta)^{q_1-1}(\eta-\xi)^{p_1} - p_1(\eta-\xi)^{p_1-1}(\eta+\xi)^{q_1}.$$

Отсюда легко видеть, что $h^*(\xi,\eta) \geq 0$ в $\overline{\Delta}$ и $\alpha^*(\xi,l_1) < 0$ на $(0,l_1)$ при $p_1 \geq q_1$. Если $p_1 = q_1$, то $h(0,\eta) = 0$ и $\alpha^*(0,\eta) = 0$ на $(0,l_1]$ и $h(\xi,\eta) > 0$ и $\alpha^*(\xi,\eta) < 0$ при $0 < \xi < \eta \leq l_1$. Следовательно, условие (A_1^*) для уравнения (17) выполнено при $p_1 > q_1$, а при $p_1 = q_1$ условие (A_1^*) нарушается на отрезке $\xi = 0$, $0 < \eta \leq l_1$. Таким образом, при $0 < \varepsilon \leq \xi < \eta < l_1$, где ε — достаточно малое число, для уравнения (17) справедливо условие (A_1^*) при $p_1 \geq q_1$. В этом случае можно показать, что если $u = 0$ на характеристике $\overline{C_1B_1}$, то положительный максимум $u(Q)$ решения $u(\xi,\eta)$ уравнения (17) по $\overline{\Delta}$ достигается на отрезке $\overline{OB_1}$. Допустим, что $Q \notin \overline{OB_1}$. Тогда ясно, что $Q \notin \Delta \cup \overline{C_1B_1}$, и $Q \in OC_1$. В силу непрерывности $u(\xi,\eta)$ в $\overline{\Delta}$ в некоторой окрестности точки Q существует точка $Q_1 = (\xi_1,\eta_1) \in \Delta$ такая, что

$$u(Q_1) > \max_{\overline{OB_1}} u(\xi,\eta). \tag{19}$$

Из точки Q_1 проведем прямую $\xi = \xi_1 > 0$ и точку пересечения с отрезком OB_1 обозначим через O_1. Пусть $\Delta_1 = \Delta \cap \{\xi > \xi_1\}$. Тогда на множестве $0 < \xi_1 \leq \xi < \eta < l_1$ для уравнения (17) выполнено условие (A_1^*) при $p_1 \geq q_1$. Поэтому в силу теоремы 3 $\max\limits_{\overline{\Delta}} u(\xi,\eta)$ достигается только на отрезке $\overline{O_1B_1}$. Тогда

$$u(Q_1) < \max_{\overline{O_1B_1}} u(\xi,\eta) \leq \max_{\overline{OB_1}} u(\xi,\eta),$$

что противоречит неравенству (19).

В случае уравнения (18) аналогично показывается, что если $u = 0$ на $\overline{C_1B_1}$, то положительный максимум $u(Q)$ решения $u(\xi,\eta)$ уравнения (18) по $\overline{\Delta}$ достигается на отрезке $\overline{OB_1}$ при $p_2 \geq q_2$. Следовательно, справедлива следующая

Теорема 8. *Если $n = m > 0$, $F(x,y) \geq 0$ (≤ 0) в $D_0 \cup D_1 \cup D_2$, $u(x,y)$ — регулярное в D решение уравнения* (16)*, равное нулю на характеристиках C_1B_1 и C_2B_2, то положительный* (*отрицательный*) *максимум* (*минимум*) *функции $u(x,y)$ по $\overline{D}$ достигается на $\overline{\Gamma}$.*

Замечание 6. Отметим, что задача T_1 изучалась в работах [18], [19], где единственность решения задачи T_1 доказана для уравнения (16) при $m = n = 1$ методом интегральных тождеств. Задача T_2 для уравнения (16) в области D при $F(x,y) \equiv 0$ изучалась в работах [6], [8], [9], [17]–[26]. В диссертациях [20], [27] при $n = m > 0$ доказан принцип экстремума задачи T_2 в иной формулировке, исходя из формулы решения задачи Дарбу для уравнения (16) в области D_1, а в статьях [18], [19], [21] аналогичный принцип доказан соответственно при $m = n = 1$, m и n — натуральные числа и $m = n$. В работах [22]–[26] доказана теорема единственности решения задачи T_2 при $n = m > 0$ методом интегральных тождеств.

Литература

1. Берс Л. *Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики.* – М.: Ин. лит., 1961. – 208 с.
2. Франкль Ф.И. *Избранные труды по газовой динамике.* – М.: Наука, 1973. – 712 с.
3. Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.
4. Крикунов Ю.М. *К задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе* // Изв. вузов. Математика. – 1974. – № 2. – С. 76–81.
5. Жегалов В.И. *Исследование краевых задач со смещениями для уравнений смешанного типа*: Автореф. дис. ... докт. физ.-матем. наук. – ИМ СО АН СССР, 1989. – 28 с.
6. Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа.* – М.: Высш. школа, 1985. – 304 с.
7. Моисеев Е.И. *Уравнения смешанного типа со спектральным параметром.* – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 150 с.
8. Кузьмин А.Г. *Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. – 208 с.
9. Сабитов К.Б. *Некоторые вопросы качественной и спектральной теории уравнений смешанного типа*: Дис. ... докт. физ.-матем. наук. – М., 1991. – 313 с.

10. Сабитов К.Б. *Альтернирующий метод типа Шварца в теории уравнений смешанного типа* // Докл РАН. – 1992. – Т.322. – № 3. – С. 476–480.
11. Олейник О.А. *О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа* // Матем. сб. – 1952. – Т.30. – № 3. – С. 695–702.
12. Hopf E.A. *A remark on linear elliptic differential equations of second order* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – V. 3. – P. 791–793.
13. Agmon S., Nirenberg L., Protter M.N. *A maxitum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type* // Comm. Appl. Math. – 1953. – V. 6. – № 4. – P. 455–470.
14. Надирашвили Н.С. *Лемма о внутренней производной и единственность решения второй краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка* // ДАН СССР. – 1981. – Т. 261. – № 4. – С. 804–809.
15. Надирашвили Н.С. *К вопросу о единственности решения второй краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка* // Матем. сб. – 1983. – Т. 122. – С. 341–359.
16. Камынин Л.И. *Теорема о внутренней производной для слабо вырождающегося эллиптического уравнения 2-го порядка* // Матем. сб. – 1985. – Т. 126. – № 3. – С. 307–326.
17. Сабитов К.Б. *О принципе максимума для уравнений смешанного типа* // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 11. – С. 1967–1976.
18. Зайнулабидов М.М. *О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения* // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5. – № 1. – С. 91–99.
19. Зайнулабидов М.М. *Краевая задача для уравнений смешанного типа с двумя пересекающимися линиями вырождения* // Дифференц. уравнения. – 1970. – Т.6. – № 1. – С. 99–108.
20. Волкодавов В.Ф. *Принцип локального экстремума и его применение к решению краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными*: Дис. ... докт. физ.-матем. наук. – Казань, 1969. – 228 с.
21. Маричев О.И. *Краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. – 1970. – № 5. – С. 21–29.
22. Хе Кан Чер. *О единственности решения задачи Трикоми для уравнения с двумя линиями вырождения* // Дифференц. уравнения с частн. производными. – Новосибирск, 1980. – С. 64–67.
23. Хе Кан Чер. *О сингулярной задаче Трикоми для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения* // Препринт. ИМ СО АН СССР. – 1970. – 16 с.
24. Исамухамедов С.С., Орамов Ж. *О краевых задачах для уравнения смешанного типа второго рода с негладкой линией вырождения* // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 2. – С. 324–334.
25. Салахитдинов М.С., Хасанов А. *Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения* // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19. – № 1. – С. 110–119.
26. Салахитдинов М.С., Исламов Б. *Задача Трикоми для общего линейного уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения* // ДАН СССР. – 1986. – Т. 289. – № 3. – С. 549–553.
27. Макаров С.И. *Применение обобщенных интегродифференциальных операторов произвольного порядка к исследованию краевых задач для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения*: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Л., 1987. – 137 с.

Стерлитамакский государственный педагогический институт

Стерлитамакский филиал АН Республики Башкортостан

Поступила
14.04.1998