ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 11 (450)

УДК 517.982

В.Л. КРЕПКОГОРСКИЙ

О МНОГОМЕРНЫХ МЕТОДАХ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Известен ряд работ, в которых авторы предлагают вещественные методы, аналогичные обычным, но с функторами, действующими не на пару пространств, а на набор из n или 2^n пространств. Будем называть такие методы многомерными. Многомерные аналоги вещественного K-метода рассматривались в [1]–[4]. Заметим, что целесообразность введения многомерных методов до сих пор не продемонстрирована достаточно убедительно, т. к. эти методы реализованы только в очень редких случаях. В данной работе рассматривается простейший многомерный метод. Его функторы $\mathcal{F}_{\Theta,Q}$ составлены из обычных функторов K-метода. В классах пространств с двумя параметрами этот метод удобно реализовать, интерполируя сначала по одному параметру, а затем — по другому. Например, при интерполяции в классе пространств Бесова будем сначала интерполировать по параметру p, а затем — по s. При этом на первом этапе получаются пространства, которые не принадлежат даже расширенному классу пространств Бесова $B^s_{p,q,(r)}$. Однако на следующем этапе снова возвращаемся в класс пространств Бесова. Этот класс оказывается стабильным относительно функторов $\mathcal{F}_{\Theta,Q}$, хотя при одномерной интерполяции с изменением параметра p мы, вообще говоря, покидаем класс пространств Бесова.

С помощью многомерных функторов получена интерполяционная теорема для пространств B^s_p, использующая слабые условия вида

$$T: B^s_{p,1,(1)} \to B^{\widetilde{s}}_{\widetilde{p},\infty,(\infty)}. \tag{1}$$

Заметим, что одномерная теорема для пространств B^s_p со слабыми условиями вида (1), вообще говоря, неверна. Известен пример оператора, который удовлетворяет слабым условиям при любых (p,s), $(\widetilde{p},\widetilde{s})$, для которых выполняются условия $-\infty < s < +\infty$, $1 < p < \infty$, $s = \widetilde{s} = 1/p$, $p = \widetilde{p}$, но $T \notin \mathcal{L}(B^{1/r}_r, B^{1/r}_r)$ ни при каком $r \in (1,\infty)$.

Отметим, наконец, что в [5] содержится утверждение о якобы имеющем место совпадении методов $\mathcal{F}_{\Theta,Q}$ и Фернандеса. Однако целый ряд авторов [6], [7], [8], [4] привели примеры, показывающие что, вообще говоря, это не так.

1. Основные определения и обозначения

Пусть даны четыре банаховых пространства $A_{0,0}$, $A_{1,0}$, $A_{0,1}$, $A_{1,1}$, вложенных в одно хаусдорфово ТВП $\mathcal{A}$. На четверке пространств $A_{i,k}$ определим многомерный функтор

$$\mathcal{F}_{\Theta,Q}((A_{i,k})_{k=0,1})_{i=0,1} := ((A_{0,0}, A_{0,1})_{\theta_1,q_1}, (A_{1,0}, A_{1,1})_{\theta_1,q_1})_{\theta_2,q_2};$$

$\Theta = (\theta_1,\theta_2)$, $Q = (q_1,q_2)$, $0 < \theta_1,\theta_2 < 1$, $1 < q_1,q_2 < \infty$.

Назовем квазинормированной (банаховой) решеткой квазинормированное (банахово) пространство функций E, норма которого обладает свойством монотонности

$$|f(x)| \le |g(x)| \ \ \forall x \Rightarrow \|f \mid E\| \le \|g \mid E\|.$$

Говорят, что банахова решетка E обладает свойством Фату, если для монотонно возрастающей последовательности $f_n \uparrow f$ из условия $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n \mid E\| < \infty$ следует $f \in E$ и $\|f \mid E\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n \mid E\| < \infty$.

Пусть даны две квазинормированные решетки $E(X)$ и $G(Y)$, а также функция двух переменных $f(x,y)$, $x \in X$, $y \in Y$. Смешанной квазинормой назовем функционал $\|f \mid G[E]\| = \|\|f(x,y) \mid E(X)\| \mid G(Y)\|$.

Обозначим через $L_{p,q}$ пространство Лоренца, через $B^s_{p,q,(r)}(R_n)$ — пространство Бесова и $F^s_{p,q,(r)}(R_n)$ — пространство Лизоркина–Трибеля с нормами

$$\|(a_j)_{j=0}^{\infty} \mid \ell_q^s\| := \|a_j \cdot 2^{js} \mid \ell_q\|;$$

$$\|f \mid L_{p,q}\| := \left(\int_0^{\infty} (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

где f^* — невозрастающая равноизмеримая перестановка функции f;

$$\|f \mid B^s_{p,q,(r)}\| := \|F^{-1}\varphi_j F f \mid \ell_q^s[L_{p,r}]\| \quad (\varphi_j) \in \Phi;$$

$$\|f \mid F^s_{p,q,(r)}\| := \|F^{-1}\varphi_j F f \mid L_{p,r}[\ell_q^s]\| \quad (\varphi_j) \in \Phi.$$

Здесь Φ — специальный класс последовательностей функций ([8], с. 203). Для функций двух переменных $f(x_1,x_2)$ через f_1^* (f_2^*) обозначим равноизмеримую невозрастающую перестановку функции одной переменной, которая получается если фиксировать переменную x_2 (x_1).

Если функция $f(x)$ определена на множестве, на котором рассматриваются две различные меры μ и λ, то для определенности будем писать $f^{*(\mu)}$ в случае, когда перестановка сделана равноизмеримой относительно меры μ.

При интерполяции пространств Бесова получаются пространства $BL^{s,k}_{p,q}$ [9]

$$(B^{s_0}_{p_0}, B^{s_1}_{p_1})_{\theta,q} = BL^{s,k}_{p,q} = \{f \in S' : \|f \mid BL\| = \|(f * \varphi_j) \mid L^{s,k}_{p,q}\| < \infty\},$$

где $L^{s,k}_{p,q} = L_{p,q}(2^{j(s-k/p)}, m_n \times (2^{jk}\nu))$ — пространство Лоренца $L_{p,q}$ с весом $2^{j(s-k/p)}$, m_n — лебегова мера на R_n, $2^{jk}\nu\{j\}$ — значение атомической меры, и $-\infty < s < \infty$, $-\infty < k < \infty$, $1 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$, $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$, k — угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $(1/p_i, s_i)$, $i = 0, 1$.

2. Реализация метода $\mathcal{F}_{\Theta,Q}$ в классах пространств Бесова и Лизоркина–Трибеля

Сформулируем в виде леммы два простых утверждения.

Лемма 1. *Пусть E — банахова структура с нормой, обладающей свойством Фату, тогда*

$$\text{a)} \quad \| \|f_n(y) \mid \ell_1(N)\| \mid E(Y)\| \le \| \|f_n(y) \mid E(Y)\| \mid \ell_1(N)\|;$$

$$\text{b)} \quad \| \|f_n(y) \mid \ell_\infty(N)\| \mid E(Y)\| \ge \| \|f_n(y) \mid E(Y)\| \mid \ell_\infty(N)\|.$$

Пространства $\ell_q^s[L_{p,r}]$ хорошо интерполируются по "внешним" параметрам s и q. Опишем, что получается при интерполяции пространств со смешанной нормой по "внутренним" параметрам.

Лемма 2. *Пусть ℓ — банахова структура последовательностей и (a_j), $a_j \in R^1$, $1 \le r_0, r_1 \le \infty$, $1 < p_0, p_1 < \infty$, тогда*

$$K(t, (\psi_j), \ell[L_{p_0,r_0}], \ell[L_{p_1,r_1}]) \sim \|K(t, (\psi_j), L_{p_0,r_0}, L_{p_1,r_1}) \mid \ell\|.$$

Доказательство. Оценим K-функционал

$$K(t, (\psi_j), \ell[L_{p_0,r_0}], \ell[L_{p_1,r_1}]) = \inf_{\psi_j^0 + \psi_j^1 = \psi_j} (\| \|\psi_j^0 \mid L_{p_0,r_0}\| \mid \ell\| + \| \|\psi_j^1 \mid L_{p_1,r_1}\| \mid \ell\|) \ge$$

$$\ge \inf_{\psi_j^0 + \psi_j^1 = \psi_j} (\| (\|\psi_j^0 \mid L_{p_0,r_0}\| + \|\psi_j^1 \mid L_{p_1,r_1}\|) \mid \ell\|) \ge \| \inf_{\psi_j^0 + \psi_j^1 = \psi_j} (\|\psi_j^0 \mid L_{p_0,r_0}\| + \|\psi_j^1 \mid L_{p_1,r_1}\|) \mid \ell\| =$$

$$= \|K(t, (\psi_j), L_{p_0,r_0}, L_{p_1,r_1}) \mid \ell\|.$$

С другой стороны, выбирая при фиксированном j пару ψ_j^0 и ψ_j^1 таким образом, чтобы выполнялись условия $\psi_j^0 + \psi_j^1 = \psi_j$ и

$$\|\psi_j^0 \mid L_{p_0,r_0}\| + t\|\psi_j^1 \mid L_{p_1,r_1}\| \le 2K(t,(\psi_j), L_{p_0,r_0}, L_{p_1,r_1}),$$

получим оценку

$$\|\,(\|\psi_j^0 \mid L_{p_0,r_0}\| + t\|\psi_j^1 \mid L_{p_1,r_1}\|) \mid \ell\| \le 2\|K(t,(\psi_j), L_{p_0,r_0}, L_{p_1,r_1}) \mid \ell\|,$$

откуда следует

$$\begin{aligned}\|\,\|\psi_j^0 \mid L_{p_0,r_0}\| \mid \ell\| + t\|\,\|\psi_j^1 \mid L_{p_1,r_1}\| \mid \ell\| \le 2\|\max(\|\psi_j^0 \mid L_{p_0,r_0}\|;\ t\|\psi_j^1 \mid L_{p_1,r_1}\|) \mid \ell\| \le \\ \le 2\|(\|\psi_j^0 \mid L_{p_0,r_0}\| + t\|\psi_j^1 \mid L_{p_1,r_1}\|) \mid \ell\| \le 4\|K(t,(\psi_j), L_{p_0,r_0}, L_{p_1,r_1}) \mid \ell\|. \quad \square\end{aligned}$$

Применим функтор $\mathcal{F}_{\Theta,Q}$ к пространствам $\ell_q^s[L_{p,r}]$.

Лемма 3. *Пусть* $\Theta = (\theta_1, \theta_2)$, $Q = (q_1, q_2)$, $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$, $1 \le q_1, q_2 \le \infty$, $-\infty < s_k < \infty$, $1 < p < \infty$, $i = 0,\,1$; $k = 0,\,1$. *Если* $1/p = (1-\theta_1)/p_0 + \theta_1/p_1$, $s = (1-\theta_2) + \theta_2 s_1$, *то*

$$\mathcal{F}_{\Theta,Q}((\ell_{q_{i,k}}^{s_k}[L_{p_i,r_{i,k}}])_{i=0,\,1,\ k=\mathrm{const}})_{k=0,\,1} = \ell_{q_2}^s[L_{p,q_1}].$$

Доказательство. Как известно, $\ell_1^s \subset \ell_q^s \subset \ell_\infty^s$ и $L_{p,1} \subset L_{p,r} \subset L_{p,\infty}$, поэтому $\ell_1^s[L_{p,1}] \subset \ell_q^s[L_{p,r}] \subset \ell_\infty^s[L_{p,\infty}]$. Следовательно, достаточно показать, что

$$\mathcal{F}_{\Theta,Q}((\ell_1^{s_k}[L_{p_i,1}])_{i=0,\,1})_{k=0,\,1} = \mathcal{F}_{\Theta,Q}((\ell_\infty^{s_k}[L_{p_i,\infty}])_{i=0,\,1})_{k=0,\,1} = \ell_{q_2}^s[L_{p,q_1}].$$

Положим $u = 1$ или ∞. Тогда с помощью леммы 2 можно описать норму, получающуюся на первом этапе

$$\|(\psi_j) \mid (\ell_u^{s_k}[L_{p_0,u}],\ \ell_u^{s_k}[L_{p_1,u}])_{\theta_1,q_1}\| \sim \Phi_{\theta_1,q_1}(\|K(t,\psi_j, L_{p_0,u}, L_{p_1,u}) \mid \ell_u^{s_k}\|).$$

Обозначим кратко структуру с такой нормой через E_{s_k}. По лемме 1

$$\begin{aligned}\|(\psi_j) \mid \ell_\infty^{s_k}[L_{p,q}]\| = \|\Phi_{\theta_1,q_1}(K(t,(\psi_j), L_{p_0,u}, L_{p_1,u})) \mid \ell_\infty^{s_k}\| \le C\Phi_{\theta_1,q_1}(\|K(t,(\psi_j), L_{p_0,u}, L_{p_1,u})|\ell_\infty^{s_k}\|) \le \\ \le C\|(\psi_k) \mid E_{s_k}\| \le C\Phi_{\theta_1,q_1}(\|K(t,(\psi_j), L_{p_0,u}, L_{p_1,u}) \mid \ell_1^{s_k}\|) \le \\ \le C\|\Phi_{\theta_1,q_1}(K(t,(\psi_j), L_{p_0,u}, L_{p_1,u})) \mid \ell_1^{s_k}\| \sim C\|(\psi_j) \mid \ell_1^{s_k}[L_{p,q}]\|,\end{aligned}$$

т. е. $\ell_1^{s_k}[L_{p,q}] \subset E_{s_k} \subset \ell_\infty^{s_k}[L_{p,q}]$. Поэтому из равенства

$$(\ell_1^{s_0}[L_{p,q}], \ell_1^{s_1}[L_{p,q}])_{\theta_2,q_2} = (\ell_\infty^{s_0}[L_{p,q}], \ell_\infty^{s_1}[L_{p,q}])_{\theta_2,q_2} = \ell_{q_2}^s[L_{p,q_1}]$$

следует $(E_{s_0}, E_{s_1})_{\theta_2,q_2} = \ell_{q_2}^s[L_{p,q}]$ и

$$\begin{aligned}\mathcal{F}((\ell_{q_{i,k}}^{s_k}[L_{p_i,r_{i,k}}])_{i=0,\,1})_{k=0,\,1} = \\ ((\ell_u^{s_0}[L_{p_0,u}], \ell_u^{s_0}[L_{p_1,u}])_{\theta_1,q_1}, (\ell_u^{s_1}[L_{p_0,u}], \ell_u^{s_1}[L_{p_1,u}])_{\theta_1,q_1})_{\theta_2,q_2} = (E_{s_0}, E_{s_1})_{\theta_2,q_2} = \ell_{q_2}^s[L_{p,q_1}].\end{aligned}$$

Сформулируем теперь интерполяционную теорему $\mathcal{F}_{\Theta,Q}$–метода для пространств Бесова.

Теорема 1. *Пусть* $\Theta = (\theta_1, \theta_2)$, $Q = (q_1, q_2)$, $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$, $1 \le q_1, q_2 \le \infty$, $-\infty < s_k < \infty$, $1 \le q_{i,k} \le \infty$, $1 < p < \infty$, $i = 0,\,1$; $k = 0,\,1$. *Если* $1/p = (1-\theta_1)/p_0 + \theta_1/p_1$, $s = (1-\theta_2)s_0 + \theta_2 s_1$, *то*

$$\mathcal{F}_{\Theta,Q}((B_{p_i,q_{i,k},(r_{i,k})}^{s_k})_{i=0,\,1,\ k=\mathrm{const}})_{k=0,\,1} = B_{p,q_2,(q_1)}^s.$$

Доказательство этого утверждения следует из леммы 3 и теоремы об интерполяции ретракций.

По лемме 2 на первом этапе применения функторов $(\cdot,\cdot)_{\theta,q}$ получаем интерполяционные пространства с нормами вида

$$\|f\| = \Phi_{\theta_1,q_1}(\|K(t,(\psi_j), L_{p_0,u}, L_{p_1,u}) \mid \ell_1^{s_k}\|).$$

Такие пространства уже не принадлежат классу пространств $B_{p,q,(r)}^s$ и только после повторного применения функторов $(\cdot,\cdot)_{\theta,q}$ снова возвращаемся в класс пространств Бесова.

Таким образом, при покоординатной интерполяции класс пространств Бесова оказывается стабильным относительно функторов $\mathcal{F}_{\Theta,Q}$. В то же время класс пространств Бесова, вообще говоря, нестабилен относительно функторов $(\cdot,\cdot)_{\theta,q}$. Пространства Бесова при одномерной интерполяции получаем только в частных случаях а) $(B_p^{s_0}, B_p^{s_1})_{\theta,q}$ и б) $(B_{p_0}^{s_0}, B_{p_1}^{s_1})_{\theta,\widetilde{q}}$ при единственном значении параметра $\widetilde{q}$, при котором $1/\widetilde{q} = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$. В общем случае при одномерной интерполяции получаем пространства типа $BL_{p,q}^{s,k}$. Теорема 1 позволяет получить интерполяционную теорему со слабыми условиями типа (1)

$$T : B_{p,1,(1)}^s \to B_{\widetilde{p},\infty,(\infty)}^{\widetilde{s}}.$$

Очевидно, можно рассмотреть другие типы слабых условий, например, $T : F_{p,1}^s \to F_{\widetilde{p},\infty}^{\widetilde{s}}$ или $T : BL_{p,1}^{s,k} \to BL_{\widetilde{p},\infty}^{\widetilde{s},\widetilde{k}}$.

Следующая теорема показывает, что условия (1) самые слабые, которые можно сформулировать в терминах банаховых пространств типов B, F, BL.

Теорема 2. *При любых* $1 < p, \widetilde{p} < \infty$, $-\infty < s, \widetilde{s}, k < \infty$ *имеют место вложения*

$$\begin{array}{llll} \text{а)} & B_{p,1,(1)}^s \subset BL_{p,1}^{s,k}; & \text{б)} & BL_{p,\infty}^{s,k} \subset B_{p,\infty,(\infty)}^s; \\ \text{в)} & B_{p,1,(1)}^s \subset F_{p,1}^s; & \text{г)} & F_{p,\infty}^s \subset B_{p,\infty,(\infty)}^s. \end{array}$$

Доказательство. Вложения б) и г) следуют из очевидных вложений

$$\begin{array}{l} \text{б}')\ \ell_1^s[L_{p,1}] \subset \ell_1^s[L_p] \subset L_p[\ell_1^s]; \\ \text{г}')\ \ L_p[\ell_\infty^s] \subset \ell_\infty^s[L_p] \subset \ell_\infty^s[L_{p,\infty}]. \end{array}$$

Для проверки вложений а) и в) достаточно доказать вложения

$$\text{а}')\ \ell_1^s[L_{p,1}] \subset L_{p,1}^{s,k} \quad \text{и} \quad \text{б}')\ L_{p,\infty}^{s,k} \subset \ell_\infty^s[L_{p,\infty}].$$

Проверим справедливость а$'$). Пространство $\ell_1^s[L_{p,1}]$ состоит из последовательностей функций $\{\psi_j\}_{j=0}^\infty$. Любую положительную, измеримую функцию ψ можно представить в виде предела монотонно возрастающей последовательности простых функций $\xi_k = \sum\limits_{i-1}^{m} C_{i,k}\chi_{H_{i,k}}(x)$, $C_{i,k} > 0$, $C_{i,k} = \text{const}$, $x \in R_n$. Тогда $\xi_k \uparrow \psi$ и

$$\|\psi \mid L_{p,1}\| = \lim_{k\to\infty} \|\xi_k \mid L_{p,1}\| = \lim_{k\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{m(k)} C_{i,k}\chi_{H_{ik}}(x) \mid L_{p,1} \right\| = \sum_{i=1}^{m(k)} C_{i,k} \|\chi_{H_{ik}}(x) \mid L_{p,1}\|.$$

Можно считать, что последовательность $\{\psi_j\}_{j=0}^\infty \in \ell_1^s[L_{p,1}]$ состоит из положительных функций. Тогда существует последовательность простых функций $\xi_{ik} \uparrow \psi_j$ при $k \to \infty$. В этом случае

$$\begin{aligned} &\|(\psi_j) \mid \ell_1^s[L_{p,1}]\| = \lim_{k\to\infty} \|\xi_{jk} \mid \ell_1^s[L_{p,1}]\| = \\ &\qquad = \lim_{k\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{m(j,k)} C_{i,j,k}\chi_{H_{i,j,k}}(x) \mid \ell_1^s[L_{p,1}] \right\| = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m(j,k)} C_{i,j,k} \|\chi_{H_{i,j,k}}(x) \mid \ell_1^s[L_{p,1}]\|. \end{aligned}$$

Оценим нормы характеристических функций

$$\begin{aligned} &\|\chi_{(j)\times H}(j,x) \mid L_{p,1}^{s,k}\| = \|2^{j(s-k/p)}\chi_{[0,\mu(H)\cdot 2^{jk}]}(t) \mid L_{p,1}\| = \\ &\qquad = M(p)\mu^{1/p}(H)2^{jk/p}2^{j(s-k/p)} = M(p)\,2^{js}\mu^{1/p}(H) \end{aligned}$$

и

$$\|\chi_{(j)\times H} \mid \ell_1^s[L_{p,1}]\| = M(p)\|\mu^{1/p}(H)\chi_{(j)} \mid \ell_1^s\| = M(p)2^{js}\mu^{1/p}(H).$$

Здесь $M(p) = \|\chi_{[0,a]} \mid L_{p,1}\|/a^{1/p} = p^2/(p-1)$. Значит, $\|\chi_{(j)\times H} \mid \ell_1^s[L_{p,1}]\| = \|\chi_{(j)\times H} \mid L_{p,1}^{s,k}\|$. Тогда можно сделать окончательную оценку

$$\|(\psi_j)|L_{p,1}^{s,k}\| = \lim_{k\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{m(j,k)} C_{i,j,k}\chi_{H_{i,j,k}}(x) \mid L_{p,1}^{s,k} \right\| \le$$

$$\le \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m(j,k)} C_{i,j,k}\|\chi_{H_{i,j,k}}(x) \mid L_{p,1}^{s,k}\| = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m(j,k)} C_{i,j,k}\|\chi_{H_{i,j,k}}(x) \mid \ell_1^s[L_{p,1}]\| = \|(\psi_j) \mid \ell_1^s[L_{p,1}]\|.$$

Таким образом, вложение a$'$) доказано.

Для банаховой структуры E через E^1 обозначим ассоциированное пространство всех линейных функционалов, имеющих интегральное представление. Очевидно, что из вложения $E \subset G$ следует $G^1 \subset E^1$. Положим $1/p + 1/p' = 1$. Известно [9], что $(L_{p',1}^{-s,k})^1 = L_{p,\infty}^{s,k}$ и $(\ell_1^{-s}[L_{p',1}])^1 = \ell_\infty^s[L_{p,\infty}]$. Поэтому из вложения $\ell_1^{-s}[L_{p',1}] \subset L_{p',1}^{-s,k}$ следует $L_{p,\infty}^{s,k} \subset \ell_\infty^s[L_{p,\infty}]$. $\square$

Пусть преобразование $A : R_2 \to R_2$ определено формулой

$$A(x,y) := \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2, h_1, h_2 \in R_1.$$

Обозначим координаты образа $A(1/p,\, s)$ через $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{s}$. Пусть также $\widetilde{p} = 1/\widetilde{\alpha}$. Преобразование A переводит прямые в прямые, сохраняет соотношение отрезков и параллельность осям координат.

Сформулируем теорему, связывающую сильные и слабые условия для точек $(1/p, s)$ и $A(1/p, s) = (1/\widetilde{p}, \widetilde{s})$.

Теорема 3. *Пусть* $\Theta = (\theta_1, \theta_2)$, $Q = (q_1, q_2)$, $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$, $1 \le q_1, q_2 \le \infty$, $1 < p_i, \widetilde{p}_i < \infty$, $-\infty < s_j, \widetilde{s}_j < \infty$, $i = 0,\, 1$,j= 0, 1;

$$1/p = (1-\theta_1)/p_0 + \theta_1/p_1, \quad s = (1-\theta_2)s_0 + \theta_2 s_1. \tag{2}$$

Если линейный оператор

$$T : B_{p_i,1,(1)}^{s_j} \to B_{\widetilde{p}_i,\infty,(\infty)}^{\widetilde{s}_j}, \tag{3}$$

то $T : B_{p,q,(r)}^{s} \to B_{\widetilde{p},q,(r)}^{\widetilde{s}}$. *Если, кроме того,* $p \le \widetilde{p}$, *то* $T : B_p^s \to B_{\widetilde{p}}^{\widetilde{s}}$.

Доказательство. Заметим, что условия (2) выполняются не только для $(1/p_i, s_j)$, но и для параметров $(1/\widetilde{p}_i, \widetilde{s}_j)$. Тогда по теореме 1

$$\mathcal{F}_{\Theta,Q}((B_{p_{i,j},1,(1)}^{s_j})_{i=0,\,1,\,j=\mathrm{const}})_{j=0,\,1} = B_{p,q_2,(q_1)}^{s}$$

и

$$\mathcal{F}_{\Theta,Q}((B_{\widetilde{p}_{i,j},\infty,(\infty)}^{\widetilde{s}_j})_{i=0,\,1,\,j=\mathrm{const}})_{j=0,\,1} = B_{\widetilde{p},q_2,(q_1)}^{\widetilde{s}}.$$

Выбирая $q_1 = q_2 = p$, получим утверждение $T : B_{p,p,(p)}^{s} \to B_{\widetilde{p},p,(p)}^{\widetilde{s}}$, но в силу неравенства $p \le \widetilde{p}$

$$B_{\widetilde{p},p,(p)}^{\widetilde{s}} \subset B_{\widetilde{p},\widetilde{p},(\widetilde{p})}^{\widetilde{s}_j} = B_{\widetilde{p}}^{\widetilde{s}} \Rightarrow T : B_p^s \to B_{\widetilde{p}}^{\widetilde{s}}. \quad \square$$

Теорема остается верной, если слабые условия типа (3) заменить на слабые условия одного из следующих типов:

а) $T: BL^{s_i,k_j}_{p_j,1} \to BL^{\widetilde{s_i},\widetilde{k_j}}_{\widetilde{p_j},\infty}$, $\quad k_j,\ \widetilde{k}_j$ — любые числа;

б) $\quad T: B^{s_i}_{p_j,1} \to B^{\widetilde{s_i}}_{\widetilde{p_j},\infty}$;

в) $\quad T: F^{s_i}_{p_j,1} \to F^{\widetilde{s_i}}_{\widetilde{p_j},\infty}$;

г) $\quad T: W^{s_i}_{p_j} \to W^{\widetilde{s_i}}_{\widetilde{p_j}}$.

Для любого множества $G \subset R_2$ обозначим через G^0 внутренность выпуклой оболочки множества G.

Теорема 4. *Пусть в любой точке множества $G \subset (0,\, 1) \times R_1$ выполняются слабые условия типа (3). Тогда для любой внутренней точки $(1/p, s)$ множества G выполняются условия*

$$T: B^s_{p,q_2,(q_1)} \to B^{\widetilde{s}}_{\widetilde{p},q_2,(q_1)}.$$

Если, кроме того, $p \le \widetilde{p}$, то

$$T: B^s_p \to B^{\widetilde{s}}_{\widetilde{p}}.$$

Доказательство. Выберем любые точки $(1/p_0,\, s_0)$, $(1/p_1,\, s_1) \in G$. По хорошо известным формулам ([8], теорема 2.4.1) при $p_0 = p_1$ $(B^{s_0}_{p_0,u}, B^{s_1}_{p_1,u})_{\theta,u} = B^s_{p,u,(u)}$ или $B^s_{p,u}$. Очевидно,

$$(B^{s_0}_{p_0,1,(1)}, B^{s_1}_{p_1,1,(1)})_{\theta,1} \subset (B^{s_0}_{p_0,1}, B^{s_1}_{p_1,1})_{\theta,1},$$
$$(B^{\widetilde{s_0}}_{\widetilde{p_0},\infty}, B^{\widetilde{s_1}}_{\widetilde{p_1},\infty})_{\theta,\infty} \subset (B^{\widetilde{s_0}}_{\widetilde{p_0},\infty,(\infty)}, B^{\widetilde{s_1}}_{\widetilde{p_1},\infty,(\infty)})_{\theta,\infty}.$$

Поэтому из слабых условий в точках $(1/p_i, s_i)$, $i = 0,\, 1$, следует

$$T: B^s_{p,1,(1)} \to B^{\widetilde{s}}_{\widetilde{p},\infty,(\infty)}$$

в любой точке $(1/p, s)$ отрезка, соединяющего эти точки, а значит, слабые условия выполняются в любой точке множества $\overline{G}^0$.

Пусть теперь $(1/p, s)$ — произвольная точка из $\overline{G}^0$. Для нее можно указать квадрат со сторонами, параллельными осям координат так, чтобы его вершины принадлежали $\overline{G}^0$ и точка $(1/p, s)$ была центром симметрии. Тогда мы получим нужное утверждение с помощью теоремы 3 при $\Theta = (1/2, 1/2)$. $\square$

3. Билинейные операторы и тензорные произведения

Декартовы и тензорные произведения банаховых пространств — еще одна область, в которой применение многомерных функторов оправдано. Пусть $(A_0,\, A_1)$ и $(B_0,\, B_1)$ — интерполяционные пары. Через $W(f, g)$ обозначим билинейный оператор, отображающий декартовы произведения $A_i \times B_j$ в банаховы пространства $E_{i,j}$, $i = 0,\, 1$; $j = 0,\, 1$. Фиксируя элемент $g \in B_j$, получим линейный оператор $Tf := W(f, g)$ $(g = \mathrm{const})$. Очевидно, $T: A_i \to E_{i,j}$, следовательно, $T: A_{\theta,q} \to (E_{0,j}, E_{1,j})_{\theta,q}$. Аналогичным образом, интерполируя по второму "аргументу", получим интерполяционную теорему.

Теорема 5. *Если билинейный оператор W отображает $A_i \times B_j$ в пространство $E_{i,j}$ при $i = 0,\, 1$; $j = 0,\, 1$, то W отображает $A_{\theta_1,q_1} \times B_{\theta_2,q_2}$ в*

$$\mathcal{F}_{\Theta,Q}((E_{i,j})_{j=0,\,1})_{i=0,\,1}.$$

Следствие. Если линейный оператор $T : A_i \otimes_\pi B_j \to E_{i,j}$, то

$$T : A_{\theta_1,q_1} \otimes_\pi B_{\theta_2,q_2} \to \mathcal{F}_{\Theta,Q}((E_{i,j})_{j=0,\,1})_{i=0,\,1}.$$

Заметим, что при "одномерной" интерполяции билинейных операторов и тензорных произведений встречаются определенные трудности. Пусть $\mathcal{BL}(A \times B, C)$ обозначает множество непрерывных билинейных операторов. Для комплексного метода известен простой и исчерпывающий результат [8], если $A_0 \subset A_1$, $B_0 \subset B_1$, $C_0 \subset C_1$, то $\mathcal{BL}(A_j \times B_j, C_j) \subset \mathcal{BL}([A_0, A_1]_\theta \times [B_0, B_1]_\theta, [C_0, C_1]_\theta)$. Для вещественных методов ситуация сложнее.

Пример 1. Существует билинейный оператор W, который отображает $A_i \times B_i$ в E_i, $i = 0,\,1$, но не отображает $A_{\theta,q} \times B_{\theta,q}$ в $E_{\theta,q}$.

Пусть $A_0 \times B_0 = L_1 \times L_\infty$, $A_1 \times B_1 = L_\infty \times L_1$, $E_0 = E_1 = R$ и оператор W определяется равенством

$$W(f, g) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\,dx.$$

Очевидно, оператор W отображает $L_1 \times L_\infty$ и $L_\infty \times L_1$ в R, но W не отображает $(L_1, L_\infty)_{\theta,q} \times (L_\infty, L_1)_{\theta,q} = L_{p,q} \times L_{p',q}$ на R по крайней мере, если $q < 2$, т. к. в этом случае $(L_{p,q})^1 = L_{p',q'} \not\supset L_{p',q}$.

Пример 2. Существует линейный оператор T, который отображает $A_i \otimes_\pi B_i$, $i = 0,\,1$, на E_i, но не отображает $A_{\theta,q} \otimes_\pi B_{\theta,q}$ на $E_{\theta,q}$.

Пусть $A_0 = L_1(R)$, $A_1 = L_\infty(R)$, $B_0 = L_\infty(R)$, $B_1 = L_1(R)$. Пространства $A_i \otimes_\pi B_i$ состоят из функций вида $f(x, y) = \sum \varphi_j(x)\psi_j(y)$. Определим функционал $Tf = \int\limits_R f(x, x)\,dx$. Так как из равенства $\sum \varphi_j(x)\psi_j(y) = \sum \widetilde{\varphi}_j(x)\widetilde{\psi}_j(y)$ следует $\sum \varphi_j(x)\psi_j(x) = \sum \widetilde{\varphi}_j(x)\widetilde{\psi}_j(x)$, то Tf не зависит от представления функции $f(x, y)$. Выберем функцию $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ так, чтобы $\varphi \in L_{p,q}$, $\psi \in L_{p',q}$, $q < 2$, $\int\limits_R \varphi(x)\psi(x)\,dx = \infty$. Тогда $T : A_i \otimes_\pi B_i \to R$, но $Tf = \infty$, хотя $f \in L_{p,q} \bigotimes_\pi L_{p',q} = A_{\theta,q} \otimes_\pi B_{\theta,q}$.

Теорему 5 можно дополнить описанием пространства $\mathcal{F}_{\Theta,Q}(E_{i,j})$ в случае, когда $E_{i,j}$ образуют одномерное семейство $E_{\theta,q}$.

Теорема 6. *Пусть пространства $E_{0,0}$ и $E_{1,1}$ образуют интерполяционную пару, а пространства $E_{0,1}$ и $E_{1,0}$ определяются равенствами $E_{0,1} = (E_{0,0},\ E_{1,1})_{\alpha_0,q_0}$, $E_{0,1} = (E_{0,0},\ E_{1,1})_{\alpha_1,q_1}$, тогда $\mathcal{F}_{\Theta,Q}((E_{i,j})_j)_i = (E_{0,0},\ E_{1,1})_{\beta,\,q_2}$, где $\beta = (1 - \theta_2)\theta_1\alpha_0 + \theta_2(1 - \theta_1)\alpha_1$.*

4. Интегральные операторы в пространствах Бесова

Рассмотрим интегральный оператор $Kf := \int\limits_{R_n} k(x, y)\,f(y)\,dy$. Пусть E — банахово пространство, элементы которого суть функции, заданные на R_n. Тогда для функции $f(x, y)$, $x \in R_n$, $y \in R_n$, через $\|f \mid E(x)\|$ обозначим норму от функции f, вычисленную по переменной x при фиксированной переменной y. Как известно ([10], с. 65), $\Big\|\int\limits_{R_n} u(x, y)\,dx \mid E\Big\| \le \int\limits_{R_n} \|u(x, y) \mid E(y)\|\,dx$ для любой банаховой структуры, обладающей свойством Фату. Можно показать, что это верно также в случае, когда $E = B^s_{p,q}$.

Лемма 4. *Пусть $1 < p < \infty$, $0 < s < \infty$, $\|k(x, y) \mid B^s_{p,\infty}(x)\| \in L_{p',\infty}$. Тогда интегральный оператор*

$$Kf = \int_{R_n} k(x, y)\,f(y)\,dy$$

действует из $L_{p,1}$ в B^s_p.

Доказательство. Воспользуемся следующей формулой для нормы пространства Бесова:

$$\|f \mid B^s_{p,\infty}\| = \|f \mid L_p\| + \sum_{j=1}^m \|h^{-s}\Delta^\ell_{h,j} f \mid L_\infty[L_p]\|$$

при $m > s$, $\Delta_{h,j} f = f(x_1,\dots,x_j+h,\dots,x_n) - f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_n)$, $\Delta^\ell_{h,j} = \Delta_{h,j}(\Delta^{\ell-1}_{h,j})$, $\ell > s$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{R_n} k(x,y)\, f(y)\, dy \mid B^s_{p,\infty}(y) \right\| = \\
&\quad = \left\| \int_{R_n} k(x,y)\, f(y)\, dy \mid L_p \right\| + \sum_{j=1}^m \left\| h^{-s}\Delta^\ell_{h,j} \int_{R_n} k(x,y)\, f(y)\, dy \mid L_\infty[L_{p,\infty}] \right\| = \\
&\quad = \left\| \int_{R_n} k(x,y)\, f(y)\, dy \mid L_p \right\| + \sum_{j=1}^m \left\| \int_{R_n} h^{-s}\Delta^\ell_{h,j} k(x,y)\, f(y)\, dy \mid L_\infty[L_{p,\infty}] \right\| \le \\
&\quad \le \int_{R_n} \|k(x,y) \mid L_p\|\, |f(x)|\, dy + \int_{R_n} \sum_{j=1}^m \|h^{-s}\Delta^\ell_{h,j} k(x,y) \mid L_\infty[L_p]\|\, |f(y)|\, dy = \\
&\qquad = \int_{R_n} \|k(x,y) \mid B^s_{p,\infty}(x)\|\, |f(y)|\, dy \le \big\| \|k(x,y) \mid B^s_{p,\infty}(x)\| \mid L_{p',\infty} \big\|\, \|f|L_{p,1}\|.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\|Kf \mid B^s_{p,\infty}\| \le \big\| \|k(x,y) \mid B^s_{p,\infty}(x)\| \mid L_{p',\infty}\big\|\, \|f \mid L_{p,1}\|$. Следовательно, оператор K действует из пространства $L_{p,1}$ в пространство Бесова $B^s_{p,\infty}$. $\square$

Лемма 5. *Если $1 < p < \infty$, $-\infty < s < \infty$, то из условия $K : L_{p,1} \to B^s_{p,\infty}$ следует $K : B^0_{p,1,(1)} \to B^s_{p,\infty,(\infty)}$.*

Доказательство. Достаточно проверить справедливость вложения $B^0_{p,1,(1)} \subset L_{p,1}$. Выберем любые p_0 и p_1 такие, что $1 < p_i < \infty$, $p_0 \ne p_1$ и $1/p = 0,5/p_0 + 0,5/p_1$. Заметим, что для любого $q \in (1,\infty)$ справедливы вложения $\ell^s_1[L_q] \subset L_q[\ell^s_1] \subset L_q[\ell^s_2]$. Следовательно, $B^0_{q,1} \subset F^0_{q,1} \subset F^0_{q,2} = L_q$. Применим интерполяционные функторы $(\cdot,\,\cdot)_{1/2,1}$ к пространствам $B^0_{p_i,1}$ и L_{p_i}. Тогда по формуле (2.4.1/5) из [8]

$$(B^0_{p_0,1}, B^0_{p_1,1})_{1/2,1} = B^0_{p,1,(1)} \quad \text{и} \quad (L_{p_0}, L_{p_1})_{1/2,1} = L_{p,1}.$$

Поэтому из $B^0_{p_i,1} \subset L_{p_i}$ следует $B^0_{p,1,(1)} \subset L_{p,1}$. $\square$

Теорема 7. *Пусть K — интегральный оператор с ядром $k(x,y)$, удовлетворяющим условиям*

$$\|k(x,y) \mid B^{s_i}_{p_i,\infty}\| \in L_{p_i',\infty}, \quad i = 0,1,2,$$

где $0 < s_i < \infty$, $1 < p_i < \infty$ и $(1/p,s)$ — внутренняя точка треугольника $A_i(1/p_i,s_i)$. Тогда оператор $K : L_p \to B^s_p$, следовательно, $K : B^{\widetilde{s}}_p \to B^s_p$ при любом $\widetilde{s} > 0$.

Доказательство. По лемме 4 оператор K удовлетворяет условиям $K : L_{p_i,1} \to B^{s_i}_{p_i,\infty}$. Следовательно, оператор K удовлетворяет слабым условиям $K : B^0_{p_i,1,(1)} \to B^{s_i}_{p_i,\infty,(\infty)}$. Сначала с помощью "одномерной интерполяции" покажем, что для любой точки треугольника $(1/p,s)$ выполняются слабые условия. Для данной точки $(1/p,s)$ выберем такое $\varepsilon > 0$, чтобы точки $E_j(1/p \pm \varepsilon,\ s \pm \varepsilon)$ принадлежали треугольнику $A_0A_1A_2$. Применим многомерный функтор $\mathcal{F}_{\Theta,Q}$ к пространствам, соответствующим точкам E_j. Тогда $\mathcal{F}_{\Theta,Q}(B^{s\pm\varepsilon}_{p_j,\infty}) = B^s_p$ при $\Theta = (1/2,1/2)$, $Q = (p,p)$. В то же время $\mathcal{F}_{\Theta,Q}(L_{p_i,1}) = L_p$. Поэтому $K : L_p \to B^s_p$. Из вложений $B^{\widetilde{s}}_p \subset L_p$ следует $K : B^{\widetilde{s}}_p \to B^s_p$. $\square$

Литература

1. Sparr G. *Interpolation of several Banach spaces* // Ann. Math. Pura Appl. – 1976. – V. 99. – P. 247–316.
2. Fernandez D.L. *Lorentz spaces with mixed norms* // J. Funct. Anal. – 1977. – V. 25. – № 2. – P. 128–146.
3. Fernandez D.L. *Interpolation of* 2^n *Banach spaces* // Studia Math. – 1979. – V. 65. – № 2. – P. 175–201.
4. Cobos F., Peetre J. *Interpolation of compact operators*: *the dimensional case* // Proc. Lond. Math. Soc. – 1991. – V. 63. – P. 371–400.
5. Milman M *On interpolation of* 2^n *Banach spaces and Lorentz spaces with Mixed norms* // J. Funct. Anal. – 1981. – V. 41. – P. 1–7.
6. Асекритова И.У. *Вещественный метод интерполяции для конечных наборов банаховых пространств* // Исследов. по теории функций многих веществ. переменных. – Ярославль, 1981. – С. 9–17.
7. Cwikel M., Janson S. *Real and complex interpolation for finite and infinite families of* B*-spaces* // Advances in Matem. – 1987. – V. 66. – P. 234–290.
8. Трибель Х. *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.* – М.: Мир, 1980. – 664 с.
9. Крепкогорский В.Л. *Интерполяция в пространствах Лизоркина–Трибеля и Бесова* // Матем. сб. – 1994. – Т. 185. – № 7. – С. 63–76.

Казанский филиал военного
артиллерийского университета

Поступили
первый вариант 24.06.1997
окончательный вариант 18.06.1999