ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 1 (536)

УДК 517.929

*Х. ВАВРЖИКОВА, Й. МИКЕШ, О. ПОКОРНА, Г. СТАРКО*

# ОБ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЯХ ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ $\pi_2(e)$

## 1. Введение

В работах [1]–[3] были введены почти геодезические отображения пространств аффинной связности $A_n$ с аффинной связностью без кручения на $\overline{A}_n$ и выделены три типа этих отображений: $\pi_1$, $\pi_2$ и $\pi_3$. В [4], [5] доказана полнота этой классификации для $n > 5$. Почти геодезические отображения изучались многими авторами (см., напр., [6]-[14]). Данная работа посвящена изучению основных уравнений почти геодезических отображений типа $\pi_2(e)$, $e = \pm 1$.

Отметим, что на сигнатуру метрик римановых пространств $V_n$ не налагаются ограничения, как принято, например, в ([2], с. 50; [15], с. 11). Исследования ведутся локально в классе достаточно гладких функций.

## 2. Почти геодезические отображения

Кривая $\ell$, определенная в пространстве аффинной связности $A_n$, называется *почти геодезической*, если существует двумерное параллельное распределение вдоль $\ell$, содержащее в каждой точке ее касательный вектор.

Диффеоморфизм $f : A_n \to \overline{A}_n$ является *почти геодезическим отображением*, если любая геодезическая пространства $A_n$ отобразится на почти геодезическую пространства $\overline{A}_n$.

В [1]–[3] почти геодезическое отображение типа $\pi_2$ $f : A_n \to \overline{A}_n$ названо *отображением* $\pi_2(e)$, если обратное отображение $f^{-1} : \overline{A}_n \to A_n$ является также некоторым почти геодезическим отображением типа $\pi_2$.

Отображение $f : A_n \to \overline{A}_n$ является почти геодезическим типа $\pi_2(e)$, если в общей по отображению $f$ системе координат $x \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n)$ тензор деформации аффинных связностей $P^h_{ij}(x) \equiv \overline{\Gamma}^h_{ij}(x) - \Gamma^h_{ij}(x)$ удовлетворяет ([1]; [2], с. 177; [3]) отношениям

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad P^h_{ij} = \delta^h_{(i}\psi_{j)} + F^h_{(i}\varphi_{j)}, \\ &\text{(b)} \quad F^h_{(i,j)} = F^h_{(i}\mu_{j)} + \delta^h_{(i}\varrho_{j)}, \\ &\text{(c)} \quad F^h_\alpha F^\alpha_i = e\delta^h_i, \quad e = \pm 1, 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\Gamma^h_{ij}$ ($\overline{\Gamma}^h_{ij}$) — объекты аффинной связности пространств $A_n$ ($\overline{A}_n$), $\delta^h_i$ — символ Кронекера, $F^h_i$ — некоторый аффинор, $\psi_i$, $\varphi_i$, $\mu_i$, $\varrho_i$ — ковекторы и $(ij)$ означает симметрирование индексов. Здесь и дальше “ , ” обозначает ковариантную производную по связности пространства $A_n$. Уравнение (c) определяет аффинор $F^h_i$ как *e-структуру*.

Уравнения (1), характеризующие отображения $\pi_2(e) : A_n \to \overline{A}_n$, при $e = \pm 1$ были уточнены в [1]–[3]. Верно, что $\varrho_i = -F^\alpha_i \mu_\alpha$. Поэтому имеет место следующая

Данная работа выполнена при финансовой поддержке грантов № 201/05/2707 и MSM 6198959214 Чешской Республики.

**Теорема 1.** *Диффеоморфизм $f : A_n \to \overline{A}_n$ является почти геодезическим отображением $\pi_2(e)$, $e = \pm 1$, тогда и только тогда, когда в общей по этому отображению системе координат $x$ тензор деформации аффинных связностей $P^h_{ij}(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad P^h_{ij} = \delta^h_{(i}\psi_{j)} + F^h_{(i}\varphi_{j)}, \\ &\text{(b)} \quad F^h_{(i,j)} = F^h_{(i}\mu_{j)} - \delta^h_{(i}F^\alpha_{j)}\mu_\alpha, \\ &\text{(c)} \quad F^h_\alpha F^\alpha_i = e\delta^h_i. \end{aligned} \tag{2}$$

Доказательство этой теоремы основывается на анализе условий (1(b)) и (1(c)). Эти условия будем анализировать в следующей части.

## 3. Об $e$-структурах, определяющих почти геодезические отображения $\pi_2(e)$

Аффинор $F^h_i$, удовлетворяющий условиям (1(b)) и (1(c)), будем называть *$e$-структурой, определяющей почти геодезическое отображение $\pi_2(e)$.*

**Теорема 2.** *$e$-структура $F^h_i$ определяет почти геодезическое отображение $\pi_2(e)$, $e = \pm 1$, тогда и только тогда, когда удовлетворяет условиям*

$$\begin{aligned} &\text{(b)} \quad F^h_{(i,j)} = F^h_{(i}\mu_{j)} - \delta^h_{(i}F^\alpha_{j)}\mu_\alpha, \\ &\text{(c)} \quad F^h_\alpha F^\alpha_i = e\delta^h_i. \end{aligned} \tag{3}$$

**Доказательство.** Указанное свойство фактически доказано в ([2], с. 180–182). Ниже приведем более простое доказательство. Пусть имеем $e$-структуру $F^h_i$ ($e = \pm 1$), определяющую почти геодезическое отображение $\pi_2(e)$.

Ковариантно продифференцируем алгебраическое условие (1(c)) по $x^j$ и затем полученное просимметрируем по индексам $i$ и $j$:

$$F^h_{\alpha,i}F^\alpha_j + F^h_{\alpha,j}F^\alpha_i + F^h_\alpha F^\alpha_{(i,j)} = 0.$$

После исключения $F^\alpha_{(i,j)}$ при помощи (1(b)) находим

$$F^h_{\alpha,i}F^\alpha_j + F^h_{\alpha,j}F^\alpha_i + e\delta^h_{(i}\mu_{j)} + F^h_{(i}\varrho_{j)} = 0.$$

После свертывания полученной формулы с $F^j_k$ и симметризации по индексам $i$ и $k$ будем иметь

$$eF^h_{(i,k)} + F^h_{(\alpha,\beta)}F^\alpha_i F^\beta_k + F^h_i(F^\alpha_k\varrho_\alpha + e\mu_k) + F^h_k(F^\alpha_i\varrho_\alpha + e\mu_i) + e\delta^h_i(F^\alpha_k\mu_\alpha + \varrho_k) + e\delta^h_k(F^\alpha_i\mu_\alpha + \varrho_i) = 0.$$

Использовав (1(b)), получим выражение

$$F^h_i(F^\alpha_k\varrho_\alpha + e\mu_k) + F^h_k(F^\alpha_i\varrho_\alpha + e\mu_i) + e\delta^h_i(F^\alpha_k\mu_\alpha + \varrho_k) + e\delta^h_k(F^\alpha_i\mu_\alpha + \varrho_i) = 0.$$

Изучая это выражение, заметим, что $F^\alpha_i\mu_\alpha + \varrho_i = 0$, т. е. $\varrho_i = -F^\alpha_i\mu_\alpha$. Подстановкой в (1(b)) находим уравнение (3(b)). $\square$

**Теорема 3.** *Определяющая почти геодезическое отображение $\pi_2(e)$, $e = \pm 1$, $e$-структура $F^h_i$ удовлетворяет условиям*

$$2F^h_{i,jk} = F^h_i\mu_{(jk)} + F^h_j\mu_{[ik]} + F^h_k\mu_{[ij]} - \delta^h_i m_{(jk)} - \delta^h_j m_{[ik]} - \delta^h_k m_{[ij]} + \overset{1}{\Theta}{}^h_{ikj}, \tag{4}$$

*где*

$$\begin{aligned} &\overset{1}{\Theta}{}^h_{ijk} \equiv \overset{2}{\Theta}{}^h_{ijk} + \overset{2}{\Theta}{}^h_{kji} - \overset{2}{\Theta}{}^h_{jki} + 2F^h_\alpha R^\alpha_{kji} - F^\alpha_i R^h_{\alpha jk} + F^\alpha_j R^h_{\alpha ik} + F^\alpha_k R^h_{\alpha ij}, \\ &\overset{2}{\Theta}{}^h_{ijk} \equiv \mu_{(i}F^h_{j)k} - \delta^h_{(i}F^\alpha_{j)k}\mu_\alpha, \quad F^h_{ij} \equiv F^h_{i,j}, \quad \mu_{ij} \equiv \mu_{i,j}, \quad m_{ij} \equiv F^\alpha_i\mu_{\alpha j}, \end{aligned}$$

*$R^h_{ijk}$ — тензор Римана пространства $A_n$, $[ik]$ означает альтернирование по соответствующим индексам.*

**Доказательство.** После ковариантного дифференцирования уравнения (3(b)) вдоль $x^k$ находим

$$F^h_{i,jk} + F^h_{j,ik} = F^h_{(j}\mu_{j)k} - \delta^h_{(i}m_{j)k} + \overset{2}{\Theta}{}^h_{ijk}. \tag{5}$$

Полученное альтернируем по $i$ и $k$; учитывая тождества Риччи, получим

$$F^h_{i,jk} - F^h_{k,ji} = F^h_i\mu_{jk} - F^h_k\mu_{ji} + F^h_j\mu_{[ik]} - \delta^h_i m_{jk} + \delta^h_k m_{ji} - \delta^h_j m_{[ik]} + \overset{3}{\Theta}{}^h_{ijk},$$

где

$$\overset{3}{\Theta}{}^h_{ijk} \equiv \overset{2}{\Theta}{}^h_{ijk} - \overset{2}{\Theta}{}^h_{kji} + F^\alpha_j R^h_{\alpha ik} - F^h_\alpha R^\alpha_{jik}.$$

Заменим местами индексы $j$ и $k$

$$F^h_{i,kj} - F^h_{j,ki} = F^h_i\mu_{kj} - F^h_j\mu_{ki} + F^h_k\mu_{[ij]} - \delta^h_i m_{kj} + \delta^h_j m_{ki} - \delta^h_k m_{[ij]} + \overset{3}{\Theta}{}^h_{ikj}.$$

После сложения с формулой (5) и после несложных вычислений получим (4). □

Продолжим изучение $e$-структуры $F^h_i$, определяющей почти геодезические отображения $\pi_2(e)$, $e \pm 1$. Используем свертку алгебраического условия (3(c)): $F^\alpha_\beta F^\beta_\alpha = en$ и ковариантно продифференцируем ее в направлении $x^j$ и $x^k$:

$$F^\alpha_\beta F^\beta_{\alpha,jk} + F^\alpha_{\beta j}F^\beta_{\alpha k} = 0.$$

Подставив (4), получим

$$(n-1-F^\alpha_\alpha)\mu_{(jk)} - \mu_{(\alpha\beta)}F^\alpha_j F^\beta_k = \overset{4}{\Theta}_{jk}, \tag{6}$$

где $\overset{4}{\Theta}_{jk} \equiv F^\alpha_\beta \overset{1}{\Theta}{}^\beta_{\alpha jk} + 2F^\alpha_{\beta j}F^\beta_{\alpha k}$.

После свертывания (6) с $F^j_{j'}F^k_{k'}$ получим

$$(n-1-F^\alpha_\alpha)\mu_{(\alpha\beta)}F^\alpha_j F^\beta_k - \mu_{(jk)} = \overset{4}{\Theta}_{\alpha\beta}F^\alpha_j F^\beta_k. \tag{6'}$$

Так как для изучаемых $e$-структур $(n-1-F^\alpha_\alpha)^2 - 1 \neq 0$, то из формул (6) и (6′) следует

$$\mu_{(i,j)} = \overset{5}{\Theta}_{ij}, \tag{7}$$

где $\overset{5}{\Theta}_{ij} \equiv \frac{1}{(n-1-F^\alpha_\alpha)^2-1}((n-1-F^\alpha_\alpha)\overset{4}{\Theta}_{ij} + \overset{4}{\Theta}_{\alpha\beta}F^\alpha_i F^\beta_j)$.

Ковариантно дифференцируем формулу (7) в направлении $x^k$:

$$\mu_{i,jk} + \mu_{j,ik} = \overset{5}{\Theta}_{ij,k} \tag{8}$$

и альтернируем по $i$ и $k$: $\mu_{i,jk} - \mu_{k,ji} + \mu_\alpha R^\alpha_{jik} = \overset{5}{\Theta}_{ij,k} - \overset{5}{\Theta}_{kj,i}$. Заменив местами индексы $j$ и $k$, получим

$$\mu_{i,kj} - \mu_{j,ki} + \mu_\alpha R^\alpha_{kij} = \overset{5}{\Theta}_{ik,j} - \overset{5}{\Theta}_{jk,i}$$

и после сложения с формулой (8) находим

$$\mu_{ij,k} = \mu_\alpha R^\alpha_{kji} + \frac{1}{2}(\overset{5}{\Theta}_{ij,k} + \overset{5}{\Theta}_{ik,j} - \overset{5}{\Theta}_{jk,i}). \tag{9}$$

В итоге этих вычислений, учитывая (4) и (9), получим замкнутую систему дифференциальных уравнений типа Коши в ковариантных производных относительно неизвестных функций $F_i^h$, $F_{ij}^h$, $\mu_i$, $\mu_{ij}$:

$$\begin{aligned} F_{i,j}^h &= F_{ij}^h, \\ F_{ij,k}^h &= \overset{6}{\Theta}{}_{ijk}^h, \\ \mu_{i,j} &= \mu_{ij}, \\ \mu_{ij,k} &= \overset{7}{\Theta}_{ijk}, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$2\overset{6}{\Theta}{}_{ijk}^h \equiv F_i^h \mu_{(jk)} + F_j^h \mu_{[ik]} + F_k^h \mu_{[ij]} - \delta_i^h m_{(jk)} - \delta_j^h m_{[ik]} - \delta_k^h m_{[ij]} + \overset{1}{\Theta}{}_{ikj}^h,$$
$$\overset{7}{\Theta}_{ijk} \equiv \mu_\alpha R_{kji}^\alpha + \frac{1}{2}(\overset{5}{\Theta}_{ij,k} + \overset{5}{\Theta}_{ik,j} - \overset{5}{\Theta}_{jk,i}).$$

Правые части уравнений (10) зависят от неизвестных функций $F_i^h$, $F_{ij}^h$, $\mu_i$, $\mu_{ij}$ и объектов аффинной связности пространства $A_n$. С другой стороны, эти функции удовлетворяют условиям (3(b)), (3(c)) и (7), поэтому

$$F_{(ij)}^h = F_{(i}^h \mu_{j)} - \delta_{(i}^h F_{j)}^\alpha \mu_\alpha; \quad F_\alpha^h F_i^\alpha = e\delta_i^h; \quad \mu_{(ij)} = \overset{5}{\Theta}_{ij}. \tag{11}$$

Эти условия являются алгебраическими относительно указанных функций.

В итоге доказана

**Теорема 4.** *Уравнения* (10) *и* (11) *являются алгебро-дифференциальной системой типа Коши в ковариантных производных относительно неизвестных функций* $F_i^h$, $F_{ij}^h$, $\mu_i$, $\mu_{ij}$, *порождающей все* $e$*-структуры* $F_i^h$, *определяющие почти геодезические отображения* $\pi_2(e)$, $e = \pm 1$.

Следующую часть посвятим изучению количества параметров, от которых зависит семейство всех структур $F_i^h$, определяющих почти геодезические отображения $\pi_2(e)$, $e = \pm 1$, в заданном пространстве аффинной связности $A_n$.

**Теорема 5.** *Пусть* $A_n$ *— пространство аффинной связности. Семейство всех* $e$*-структур* $F_i^h$, *определяющих почти геодезические отображения типа* $\pi_2(e)$, $e \pm 1$, *зависит от не более чем* $\frac{1}{2}n(n^2-1)$ *вещественных параметров.*

**Доказательство.** Система уравнений (10) имеет не более одного решения для начальных условий в точке $x_0 \in A_n$:

$$F_i^h(x_0) = \overset{0}{F}{}_i^h, \quad F_{ij}^h(x_0) = \overset{0}{F}{}_{ij}^h, \quad \mu_i(x_0) = \overset{0}{\mu}_i, \quad \mu_{ij}(x_0) = \overset{0}{\mu}_{ij}.$$

Начальные условия в свою очередь связаны алгебраическими уравнениями (11). Поэтому начальные условия зависят от не более чем $\frac{1}{2}n(n^2-1)$ независимых параметров. $\square$

## 4. О почти геодезических отображениях $\pi_2(e)$ на римановы пространства

Из анализа уравнений (1(a)) вытекает, что почти геодезические отображения $\pi_2(e)$ являются специальным случаем $F$-планарных отображений [16].

**Теорема 6** ([17]). *Пусть* $A_n$ *— пространство аффинной связности, в котором определена аффинорная структура* $F_i^h(x)$, *удовлетворяющая условию* $\operatorname{Rank} \|F_i^h - \varrho\delta_i^h\| > 5$. *Семейство всех пространств Римана* $\overline{V}_n$, *на которые* $A_n$ *допускает* $F$*-планарные отображения, зависит от не более чем* $\frac{1}{2}n(n+5)+3$ *вещественных параметров.*

Было бы ошибочным считать, что теорема 5, сформулированная для $F$-планарных отображений, автоматически верна и для отображений $\pi_2(e)$. Это вытекает из факта, что структура $F$ a priori определена для $F$-планарных отображений, но в случае почти геодезических отображений $\pi_2$ структурный аффинор $F$ неизвестен.

Поэтому нельзя автоматически перенести результаты для $F$-планарных отображений $A_n \to \overline{V}_n$ (см. [17], [18]) на случай почти геодезических отображений $\pi_2$ на римановы пространства.

Из теорем 4 и 5 вытекает

**Теорема 7.** *Пусть $A_n$ — пространство аффинной связности. Семейство всех римановых пространств $\overline{V}_n$, на которые $A_n$ допускает почти геодезические отображения $\pi_2(e)$, $e = \pm 1$, с $e$-структурой $F_i^h$ ($\operatorname{Rank} \|F_i^h - \varrho\delta_i^h\| > 5$), зависит от не более чем $\frac{1}{2}n^2(n+1) + 2n + 3$ вещественных параметров.*

*Примечание.* Для почти комплексных структур $F$ при $n > 4$ условие $\operatorname{Rank} \|F_i^h - \varrho\delta_i^h\| > 5$ можем в формулировке теоремы опустить.

## Литература


1. Синюков Н.С. *Почти геодезические отображения пространств аффинной связности и e-структуры* // Матем. заметки. – 1970. – Т. 7. – № 4. – С. 449–459.
2. Синюков Н.С. *Геодезические отображения римановых пространств.* – М.: Наука, 1979. – 256 с.
3. Синюков Н.С. *Почти геодезические отображения пространств аффинной связности и римановых пространств* // Итоги науки и техн. Сер. Проблемы геометрии. – М.: ВИНИТИ. – 1982. – Т. 13. – С. 3–26.
4. Berezovskij V., Mikeš J. *On the classification of almost geodesic mappings of affine-connected spaces* // Diff. Geom. and Appl. Proc. Conf., Dubrovnik/Yugosl. 1988. – 1989. – P. 41–48.
5. Berezovskij V., Mikeš J. *On a classification of almost geodesic mappings of affine connection spaces* // Acta Univ. Palacki. Olomuc, Fac. Rerum Nat., Math. – 1996. – V. 35. – P. 21–24.
6. Adamów A. *On reduced almost geodesic mappings in Riemannian spaces* // Demonstr. Math. – 1982. – V. 15. – P. 925–934.
7. Эсенов К.Р. *О свойствах обобщенно эквидистантных келеровых пространств, допускающих специальные почти геодезические отображения второго типа* // Сб. научн. тр. “Исследования топологических и обобщенных пространств”, – Фрунзе, 1988. – С. 81–84.
8. Mikeš J. *Holomorphically protective mappings and their generalizations* // J. Math. Sci. – New York. – 1998. – V. 89. – P. 1334–1353.
9. Шадный В.С. *Почти геодезические отображения римановых пространств на пространства постоянной кривизны* // Матем. заметки. – 1979. – Т. 25. – С. 151–153.
10. Собчук В.С. *Внутренние почти геодезические отображения* // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 5. – с. 62–64.
11. Sobchuk V.S. *Intrinsic almost geodesic mapping* // Izv. VUZ. Matem. – 1989. – № 5. – P. 62–64.
12. Sobchuk V.S. *On almost geodesic mappings in the class of semi-symmetric pseudo-Riemann spaces* // (Ukrainian. English summary) Nauk. Visn. Chernivets'kogo Univ. Mat. – 2000. – V. 76. – P. 107–108.
13. Sobchuk V.S., Mikeš O., Pokorná O. *On almost geodesic mappings $\pi_2$ between semisymmetric Riemannian spaces* // Novi Sad J. Math. – 1999. – V. 9. – № 3. – P. 309–312.
14. Stankovic M.S. *On canonic almost geodesic mappings of the second type of affine spaces* // Filomat. – 1999. – V. 13. – P. 105–144.
15. Петров А.З. *Новые методы в теории относительности.* – М.: Наука, 1966. – 495 с.
16. Микеш Й., Синюков Н.С. *О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности* // Изв. вузов. Матем. – 1983. – № 1. – С. 55–61.

17. Микеш Й. *F-планарные отображения на римановы пространства* // Сб. тр. межд. конф. “Инвариантные методы исследований на многообразиях структур геометрии, анализа и матем. физики”. Т. 2. – МГУ. – 2001. – С. 138–145.
18. Микеш Й. *Специальные F-планарные отображения пространств аффинной связности на римановы пространства* // Вестник Моск. ун-та. – 1994. – Сер. I. – № 3. – С. 18–24.

*Университет им. Томаша Бати*
(*г. Злин, Чешская республика*)
*Университет им. Ф. Палацкого*
(*г. Оломоуц, Чешская республика*)
*Чешский сельскохозяйственный университет*
(*г. Прага, Чешская республика*)
*Одесская строительная академия* (*Украина*)

*Поступила*
13.05.2005