ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 7 (518)

УДК 517.925

Ю.А. КОНЯЕВ, Н.Г. ПАНФИЛОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОДРОНОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ БОЛЬШОГО ИЛИ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Излагается алгоритм исследования широкого класса систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами при наличии больших или малых параметров. В отличие от известного (напр., [1]–[5]), этот алгоритм позволяет достаточно просто и конструктивно исследовать указанные системы с помощью нового варианта метода расщепления [6]–[9] в теории регулярных и сингулярных возмущений.

Анализ некоторых классов реальных физических систем в ряде случаев приводит (в линейном приближении) к исследованию систем дифференциальных уравнений вида $\dot{x} = A(t)x$, где $A(t)$ — T-периодическая матрица. Если существует среднее значение A_0 матрицы $A(t)$, то можно изучать системы вида

$$\dot{x} = (A_0 + \delta A_1(t))x \quad (A_1(t) \in C(R^+), \quad t \in R^+ = [0, +\infty]), \tag{1}$$

где $\delta > 0$ — некоторый параметр, характеризующий амплитуду колебаний.

1. В случае, когда $\delta = \varepsilon > 0$ — малый параметр, предлагаемый алгоритм позволяет изучать задачи и более общего вида

$$\dot{x} = \Big(A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\varepsilon^k\Big)x + f(t), \quad x(0,\varepsilon) = x^0 \quad (|\varepsilon| < \varepsilon^0 < 1), \tag{2}$$

где $f(t)$, $A_k(t)$ — непрерывные T-периодические функции, $k \geq 1$.

Теорема 1. *Система* (2) *в случае, когда спектр* $\{\lambda_{0j}\}$ *матрицы* A_0 *удовлетворяет условиям*

$$\sigma_{jk} \equiv \lambda_{0j} - \lambda_{0k} \neq i2\pi q T^{-1} \quad (j \neq k, \quad j,k = \overline{1,n}, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \tag{3}$$

может быть с помощью невырожденной (*при достаточно малых* $|\varepsilon|$) T*-периодической замены*

$$x = S_0\Big(E + \sum_{k=1}^{N} H_k(t)\varepsilon^k\Big)z$$

преобразована к системе с почти постоянной диагональной матрицей

$$\dot{z} = Q(t,\varepsilon)z + b(t,\varepsilon), \quad z(0,\varepsilon) = z^0 \tag{4}$$

$$\Big(Q(t,\varepsilon) = \Lambda(\varepsilon) + \varepsilon^{N+1}G(t,\varepsilon), \quad \Lambda(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \Lambda_k \varepsilon^k, \quad \|G(t,\varepsilon)\| = O(1), \quad \varepsilon \to 0\Big),$$

где диагональные матрицы Λ_k $(k = \overline{0,N})$ *постоянны, а матрицы* $H_k(t)$ $(k = \overline{1,N})$ *являются* T*-периодическими функциями.*

Доказательство. В условиях теоремы всегда существует такая невырожденная матрица S_0, что замена $x = S_0 y$ ($S_0^{-1} A_0 S_0 = \Lambda_0 = \operatorname{diag}\{\lambda_{01}, \ldots, \lambda_{0n}\}$) преобразует систему (2) к виду

$$\dot{y} = B(t,\varepsilon)y + h(t), \quad y(0,\varepsilon) = y^0 \quad \left(B(t,\varepsilon) = \Lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t)\varepsilon^k\right),$$

которая после еще одной T-периодической и невырожденной при достаточно малых $|\varepsilon|$ замены

$$y = H(t,\varepsilon)z \quad \left(H(t,\varepsilon) = E + \sum_{k=1}^{N} H_k(t)\varepsilon^k\right)$$

позволяет получить систему (4), при этом имеет место дифференциальное матричное соотношение

$$\dot{H} = B(t,\varepsilon)H - HQ(t,\varepsilon). \tag{5}$$

Приравнивая в (5) коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем возможность записать простые дифференциальные уравнения

$$\dot{H}_k = P_k(t) - \Lambda_k + \Lambda_0 H_k(t) - H_k(t)\Lambda_0, \tag{6}$$

$$P_1(t) = B_1(t), \quad P_k(t) = B_k(t) + \sum_{j=1}^{k-1}(B_j(t)H_{k-j}(t) - H_{k-j}(t)\Lambda_j) \quad (k = \overline{2,N}).$$

Для удобства дальнейшего изложения для произвольной квадратной матрицы введем обозначения

$$A = \{a_{j,k}\}_1^n, \quad \overline{A} = \operatorname{diag}\{a_{11}, \ldots, a_{nn}\}, \quad \overline{\overline{A}} = A - \overline{A}.$$

Дифференциальное матричное уравнение (6) распадается на два:

$$\dot{\overline{H}}_k = \overline{P}_k(t) - \Lambda_k, \quad P_k(t) = \{p_{ijk}(t)\}; \tag{7}$$

$$\dot{\overline{\overline{H}}}_k = \Lambda_0 \overline{\overline{H}}_k(t) - \overline{\overline{H}}_k(t)\Lambda_0 + \overline{\overline{P}}_k(t), \quad H_k(t) = \{h_{ijk}(t)\} \quad (k = \overline{1,N}), \tag{8}$$

при этом уравнение (7) имеет в классе T-периодических функций единственное решение

$$\overline{H}_k(t) = \int_0^t (\overline{P}_k(s) - \Lambda_k)ds \quad \left(\Lambda_k = T^{-1}\int_0^T \overline{P}_k(s)ds, \quad k = \overline{1,N}\right),$$

а уравнение (8) распадается на скалярные уравнения вида

$$\dot{h}_{ijk}(t) = \sigma_{ij}h_{ijk}(t) + p_{ijk}(t) \quad (i \neq j, \quad i,j = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,N}),$$

решение каждого из которых является T-периодическим и может быть представлено в виде

$$h_{ijk}(t) = e^{\sigma_{ij}(t+T)}(1 - e^{\sigma_{ij}T})^{-1}\int_0^{t+T} e^{-\sigma_{ij}S}p_{ijk}(s)ds. \quad \square$$

Замечание 1. Теорему 1 можно рассматривать как асимптотический и (в отличие от ранее известного [1]–[4]) конструктивный аналог известной теоремы Флоке–Ляпунова о приводимости.

Замечание 2. Ограничения вида (3) на наличие резонансных соотношений не являются существенными и их можно убрать, если на соответствующем шаге диагональную матрицу Λ_0 представить в виде $\Lambda_0 = \overline{D_0} + i\overline{C_0}$ ($\overline{C_0} = 2\pi T^{-1}\operatorname{diag}\{m_1, \ldots, m_p\}$), при этом спектр матрицы $\overline{D}_0$ уже будет удовлетворять условиям (3), хотя кратность некоторых точек спектра может измениться.

Замечание 3. При наличии у матрицы A_0 кратных точек спектра следует воспользоваться срезающим преобразованием (напр., [8]), что может привести к разложениям по дробным степеням малого параметра.

Замечание 4. Свойства спектра матрицы $Q(t,\varepsilon)$ системы (4) дают возможность сразу сделать вывод об асимптотической устойчивости, устойчивости или неустойчивости решения задачи (4) и эквивалентной ей задачи (2).

Замечание 5. Предложенный алгоритм позволил определить [9] области неустойчивости тривиального решения уравнения Матье [4] $\ddot{x}+(\delta+\varepsilon\cos t)x=0$ (после его сведения к системе вида (1)) без использования аппарата рядов Фурье и определителей Хилла бесконечного порядка.

Замечание 6. Стационарное движение гироскопа в переменном магнитном поле [6], [9] может быть описано с помощью линеаризованного уравнения вида

$$\dot{x}=(A_0+\varepsilon A_1(t))x=0,$$

где $A_0=\Lambda_0=i\Omega\operatorname{diag}\{1,0\}$, $A_1(t)=\left(\begin{smallmatrix}-p(t) & -r(t)\\ p(t) & r(t)\end{smallmatrix}\right)$, $p(t)=(1-\chi)\Omega\sin^2\omega t+i[\omega(\xi-1)\sin 2\omega t]/2$, $r(t)=p(t)-\Omega\sin^2\omega t$, $\chi=I_1/I_3$, $\xi=\alpha_3/\alpha_1$, $\Omega=L/I_1$, $\varepsilon=\alpha_1H_0^2/L$, Ω — частота нутационных колебаний тела, ω — частота колебаний магнитного поля, H_0 — амплитуда колебаний магнитного поля, I_k — моменты инерции тела относительно его осей, ξ — величина, определяемая поляризуемостью тела относительно его осей, ε — безразмерный малый параметр. С помощью описанного метода была найдена область устойчивости стационарных движений гироскопа в переменном магнитном поле, в том числе и вблизи резонанса, когда $\Omega=2\omega+\varepsilon\beta$.

2. Далее рассмотрим случай, когда δ является большим параметром. Тогда после замены $\delta=\varepsilon^{-1}$ имеем сингулярно возмущенную задачу, которая в более общем случае может быть записана в виде

$$\varepsilon\dot{x}=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}A_k(t)\varepsilon^k\Big)x+f(t),\quad x(0,\varepsilon)=x^0,\tag{9}$$

где $f(t)$ и $A_k(t)$ — T-периодические матричные функции необходимой гладкости и матричный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k(t)\varepsilon^k$ сходится абсолютно и равномерно при $|\varepsilon|<\varepsilon^0$ и $t\in R^t[0,+\infty)$, а спектр $\{\lambda_{0j}(t)\}_1^n$ матрицы $A_0(t)$ удовлетворяет условиям

$$\sigma_{jk}(t)\equiv\lambda_{0j}(t)-\lambda_{0k}(t)\neq 0,\quad \lambda_{0j}(t)\neq 0,\quad \operatorname{Re}\lambda_{0j}(t)\leq-\delta_0<0\quad (t\in R^+).\tag{10}$$

Преобразование сдвига $x(t,\varepsilon)=y(t,\varepsilon)+\sum\limits_{k=0}^{N}u_k(t)\varepsilon^k$ позволит для функции $y(t,\varepsilon)$ записать почти однородную задачу

$$\varepsilon\dot{y}=A(t,\varepsilon)y+\varepsilon^{N+1}b(t,\varepsilon),\quad y(0,\varepsilon)=x^0-\sum_{k=0}^{N}u_k(0)\varepsilon^n\equiv\alpha(\varepsilon).$$

Функции $u_k(t)$, определяемые при непосредственной подстановке $u(t,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{N}u_k(t)\varepsilon^k$ в уравнение (9), при равномерной ограниченности на полуоси функций

$$\|S_0^{(p)}(t)\|,\|(S_0^{-1}(t))^{(p)}\|,\|B_q^{(p)}(t)\|,\|(B_q(t)/\sigma_{jk}(t))^{(p)}\|\leq C\quad (q\geq 0,\quad p=\overline{0,N},\quad j,k=\overline{1,n})\tag{11}$$

$$\Big(B(t,\varepsilon)=S_0^{-1}(t)(A(t,\varepsilon)S_0(t)-\varepsilon\dot{S}_0(t))=\Lambda_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}B_k(t)\varepsilon^k,$$

$$S_0^{-1}(t)A_0(t)S_0(t)=\Lambda_0(t)=\operatorname{diag}\{\lambda_{01}(t),\dots,\lambda_{0n}(t)\}\Big)$$

будут также равномерно ограничены по некоторой норме $\|u_k^{(p)}(t)\|\leq C$ ($k\geq 0$, $p=\overline{0,N}$, $t\in R^t$).

В условиях (10) существует невырожденное при достаточно малых $|\varepsilon|$ T-периодическое преобразование $y = S_0(t)H(t,\varepsilon)z$ $\left(H(t,\varepsilon) = E + \sum\limits_{k=0}^{N} \overline{\overline{H}}_k(t)\varepsilon^k\right)$, приводящее к задаче с почти диагональной матрицей

$$\varepsilon\dot{z} = Q(t,\varepsilon)z + \varepsilon^{N+1}a(t,\varepsilon), \quad z(0,\varepsilon) = \beta(\varepsilon) \quad \left(Q(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{N} \Lambda_k(t)\varepsilon^k + \varepsilon^{N+1}G(t,\varepsilon)\right), \tag{12}$$

где "бездиагональные" $\overline{\overline{H}}_k(t)$ и диагональные матрицы определяются по описанной выше схеме и являются при условии

$$\|S_0^{(p)}(t)\|, \|(S_0^{-1}(t))^{(p)}\| \leq C \quad (p = \overline{0,N}, \quad t \in R^+) \tag{13}$$

равномерно ограниченными на полуоси.

Задача (12) эквивалентна интегральному уравнению

$$z = \Phi_0(t,\varepsilon)\left[\delta(\varepsilon) + \int_0^t \Phi_0^{-1}(s,\varepsilon)(U(s,\varepsilon)z + \varepsilon^N a(s,\varepsilon))ds\right] \quad \left(\Phi_0(t,\varepsilon) = \exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t \Lambda_0(s)ds\right)\right), \tag{14}$$

откуда с учетом (10) для любого $t \geq 0$ имеем оценки

$$\|z(t,\varepsilon)\| \leq C_2 + \varepsilon C_2 \max\|z(t,\varepsilon)\|, \quad \max\|z(t,\varepsilon)\| \leq \frac{C_1}{1-\varepsilon C_2} \leq C_3 \quad (0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^0 < 1),$$

что и доказывает существование единственного и равномерно ограниченного на полуоси решения уравнения (14) и эквивалентной ему задачи (9).

Представление $z = \exp\left(\varepsilon^{-1}\int\limits_0^t \sum\limits_{k=0}^{N} \Lambda_k(t)\varepsilon^k dt\right)\beta(\varepsilon) + \varepsilon^{N+1}R(t,\varepsilon)$ является асимптотическим, т. к. функция $R(t,\varepsilon)$ удовлетворяет задаче

$$\varepsilon\dot{R} = Q(t,\varepsilon)R + q(t,\varepsilon), \quad R(0,\varepsilon) = O(1),$$

аналогичной (9), и является в силу этого равномерно ограниченной на полуоси.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *При выполнении условий* (10), (11), (13) *сингулярно возмущенная задача* (9) *имеет единственное и равномерно ограниченное на полуоси R^+ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ решение, представимое в квазирегулярной форме*

$$x(t,\varepsilon) = S_0(t)\left(E + \sum_{k=1}^{N} \overline{\overline{H_k}}(t)\varepsilon^k\right)\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t \sum_{k=0}^{N} \Lambda_k(s)\varepsilon^k dt\right)C + \sum_{k=0}^{N} v_k(t)\varepsilon^k + O(\varepsilon^{N+1}) =$$

$$= S_0(t)\left(\sum_{k=0}^{N} P_k(t)\varepsilon^k\right)\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t {\sum_{k=0}^{N}}' \Lambda_k(s)\varepsilon^k ds\right)C + \sum_{k=0}^{N} v_k(t)\varepsilon^k + O(\varepsilon^{N+1}),$$

где сумма $\sum'$ содержит только неограниченные при $t \to \infty$ интегралы.

Пример. Колебания электрического заряда $q(t)$ на пластинах конденсатора T-периодической емкости $C(t) > 0$ под воздействием T-периодической э. д. с. $f(t)$ описываются уравнением

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + qC^{-1}(t) = f(t), \quad q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = q_1. \tag{15}$$

При малых сопротивлении $R = \varepsilon^2 R_0$ и индуктивности $L = \varepsilon^2 L_0$ имеем сингулярно возмущенную задачу

$$\varepsilon^2\ddot{q} + \varepsilon^2 2\beta_0\dot{q} + \omega^2(t)q = b(t), \quad q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = q_1 \quad (2\beta_0 = R_0/L_0 > 0, \quad \omega^2(t) = (L_0C(t))^{-1} > 0),$$

которая может быть записана в векторной форме

$$\varepsilon\dot{x} = A(t,\varepsilon)x + h(t), \quad x(0) = x^0 = (q_0, \varepsilon q_1)^T, \quad x = (q, \varepsilon q)^T, A(t,\varepsilon) = A_0(t) + \varepsilon A_1, h(t) = (0, b(t))^T, \tag{16}$$

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\beta_0 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица $A_0(t)$ имеет спектр $\lambda_{1,2}(t) = \pm i\omega(t)$, то с учетом теоремы 2 решение задачи (16) может быть представлено в квазирегулярной форме

$$x(t) = S_0(t)(E + \varepsilon\overline{\overline{H}}_1(t)) \exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t (\Lambda_0(s) + \varepsilon\Lambda_1(s))ds + \sum_{k=0}^{1} u_k(t)\varepsilon^k + O(\varepsilon^2)\right)$$

$$\left(\overline{\overline{H}}_1 = \frac{\beta(t)}{2i\omega(t)}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_0 = i\omega(t)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1(t) = \beta(t)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\right.$$

$$\left. S_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\omega(t) & i\omega(t) \end{pmatrix}, \quad \beta(t) = \beta_0 + \frac{\dot{\omega}(t)}{2\omega(t)}\right).$$

Это позволит сделать вывод об асимптотической устойчивости решения задачи (16) и эквивалентной ей задачи (15), т. к. вещественная часть спектра $\{\lambda_j(t)\}_1^2$ матрицы $A(t,\varepsilon)$ удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re}\lambda_j(t,\varepsilon) \le -\varepsilon\left(\beta_0 + \frac{\dot{\omega}(t)}{2\omega(t)}\right) + O(\varepsilon^2).$$

Литература

1. Якубович В.А., Старжинский В.М. *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.* – М.: Наука, 1972. – 720 с.
2. Розо М. *Нелинейные колебания и теория устойчивости.* – М.: Наука, 1971. – 288 с.
3. Федорюк М.В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1983. – 352 с.
4. Меркин Д.Р. *Введение в теорию устойчивости движения.* – М.: Наука, 1987. – 304 с.
5. Магницкий Н.А. *Асимптотические методы анализа нестационарных управляемых систем.* – М.: Наука, 1982. – 180 с.
6. Коняев Ю.А., Мартыненко Ю.Г. *Об устойчивости стационарных вращений симметричного твердого тела в переменном магнитном поле* // ПММ. – 1987. – Т. 51. – Вып. 3. – С. 375–381.
7. Коняев Ю.А., Федоров Ю.С. *Асимптотический анализ некоторых классов сингулярно возмущенных задач на полуоси* // Матем. заметки. – 1997. – Т. 62. – Вып. 1. – С. 111–117.
8. Коняев Ю.А. *Об одном методе исследования некоторых задач теории возмущений* // Матем. сб. – 1993. – Т. 184. – № 12. – С. 133–144.
9. Коняев Ю.А. *Спектральный метод исследования устойчивости некоторых классов неавтономных дифференциальных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 5. – С. 51–61.

Российский университет
дружбы народов

Поступила
21.03.2003