ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 8 (423)

УДК 514.763

А.В. БОЯРШИНОВА

О ПРОСТРАНСТВЕ СУЩЕСТВЕННЫХ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Целью данной работы является описание пространства существенных инфинитезимальных деформаций структуры многообразия над алгеброй плюральных чисел [1]. Доказано, что это пространство изоморфно первой группе когомологий многообразия со значениями в пучке голоморфных векторных полей и приведены примеры вычисления этой группы.

Все геометрические объекты предполагаются гладкими; если индекс суммирования пробегает всю область своего определения, то используется правило суммирования Эйнштейна.

1. Плюральная структура на многообразии

Пусть M — гладкое многообразие размерности $n(q+1)$.

Определение 1. Аффинорное поле J на M называется почти плюральной структурой, если для любой точки $x \in M$ существует репер касательного пространства T_xM, в котором матрица $J(x)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & E & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & E & 0 \end{pmatrix},$$

где E — единичная матрица размера $n \times n$.

Почти плюральная структура называется интегрируемой, если на M существует атлас $\mathcal{A}$, в каждой карте которого координаты аффинорного поля J постоянны.

Для аффинорных полей A, B на M обозначим через $\{A, B\}$ кручение — тензорное поле типа (1,2) (см. [2]). Тензорное поле $\{J, J\}$ называется тензором Нейенхейса плюральной структуры J.

Следующее утверждение фактически было доказано в [3], но для удобства читателей мы его приводим ниже в несколько иной форме.

Утверждение 1. *Почти плюральная структура J интегрируема тогда и только тогда, когда тензор Нейенхейса $\{J, J\}$ равен нулю.*

Доказательство. Если структура J интегрируема, то в картах атласа $\mathcal{A}$ координаты J^i_j постоянны, следовательно,

$$\{J, J\}^i_{jk} = J^p_j \partial_p J^i_k - J^p_k \partial_p J^i_j + J^i_p \partial_k J^p_j - J^i_p \partial_j J^p_k = 0.$$

Обратно, пусть $\{J,J\}(X,Y)=0$. Из [4] известно, что для интегрируемости структуры J необходимо и достаточно, чтобы $\{J^s,J^r\}(X,Y)=0\ \forall r,s=\overline{1,q}$. Докажем это тождество по индукции.

Пусть $s=1$. Проведем индукцию по r. Для $r=1$ это дано:

$$[JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY]+J^2[X,Y]=\{J,J\}(X,Y)=0.$$

Пусть $\{J,J^r\}=0$. Надо доказать, что $\{J,J^{r+1}\}=0$. Используя равенство нулю тензоров $\{J,J\}(J^rX,Y)$ и $\{J,J\}(X,J^rY)$, получаем

$$\begin{gathered}\{J,J^{r+1}\}(X,Y)=[JX,J^{r+1}Y]-J^{r+1}[JX,Y]-J[X,J^{r+1}Y]+2J^{r+2}[X,Y]+\\+[J^{r+1}X,JY]-J^{r+1}[X,JY]-J[J^{r+1}X,Y]=J([JX,J^rY]+[J^rX,JY]-\\-J[J^rX,Y]-J[X,J^rY]-J^r[JX,Y]-J^r[X,JY]+2J^{r+1}[X,Y])=\\=J\{J,J^r\}(X,Y)=0.\end{gathered}$$

Значит, $\{J,J^r\}=0\ \forall r=\overline{1,q}$.

Проведем индукцию по степени s. Пусть $\{J^s,J^r\}=0$. Надо доказать, что $\{J^{s+1},J^r\}=0$. Так как $\{J,J\}(J^sX,J^{r-2}Y)=0$, $\{J,J\}(J^sX,J^{r-3}Y)=0$, ..., $\{J,J\}(J^sX,Y)=0$, то имеет место следующая цепочка равенств: $[J^{s+1}X,J^{r-1}Y]-J[J^sX,J^{r-1}Y]=J[J^{s+1}X,J^{r-2}Y]-J^2[J^sX,J^{r-2}Y]=\dots=J^{r-1}[J^{s+1}X,Y]-J^r[J^sX,Y]$. Тогда, используя равенство нулю тензоров $\{J,J^r\}(X,Y)$ и $\{J,J\}(J^sX,J^{r-1}Y)$, получаем

$$\begin{gathered}\{J^{s+1},J^r\}(X,Y)=[J^{s+1}X,J^rY]-J^r[J^{s+1}X,Y]-J^r[X,J^{s+1}Y]+2J^{r+s+1}[X,Y]+\\+[J^rX,J^{s+1}Y]-J^{s+1}[X,J^rY]-J^{s+1}[J^rX,Y]=J([J^{s+1}X,J^{r-1}Y]-J^{r-1}[J^{s+1}X,Y]-\\-J^{r-1}[X,J^{s+1}Y]+2J^{r+s}[X,Y]+[J^{r-1}X,J^{s+1}Y]-J^s[X,J^rY]-J^s[J^rX,Y]+[J^sX,J^rY]-\\-J[J^sX,J^{r-1}Y]-J[J^{r-1}X,J^sY]+[J^rX,J^sY])=J([J^{s+1}X,J^{r-1}Y]-J^{r-1}[J^{s+1}X,Y]-\\-J^r[X,J^sY]-J[J^{r-1}X,J^sY]+[J^{r-1}X,J^{s+1}Y]-J^{r-1}[X,J^{s+1}Y]-\\-J^r[J^sX,Y])-J[J^sX,J^{r-1}Y]=0.\quad\Box\end{gathered}$$

Определение 2. Интегрируемая почти плюральная структура называется плюральной структурой.

Отметим, что задание на многообразии M плюральной структуры эквивалентно заданию на M структуры многообразия над алгеброй плюральных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon^q)=\{a_0+a_1\varepsilon+\dots+a_q\varepsilon^q\mid\varepsilon^{q+1}=0,\ a_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{0,q}\}$ [1].

Для дальнейшего нам понадобится понятие голоморфного векторного поля. Пусть (M,J) — многообразие над алгеброй $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$. Тогда на M существует атлас $\mathcal{A}=(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ с гомеоморфизмами $\varphi_\alpha:U_\alpha\to\mathbb{R}(\varepsilon^q)^n$,

$$\varphi_\alpha(x)=(X^i=x^i+\varepsilon x^{n+i}+\dots+\varepsilon^q x^{qn+i}),\quad i=\overline{1,n},$$

функции склейки которого являются $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-дифференцируемыми (см. [1]). Карты соответствующего максимального атласа будем называть $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-картами. Дифференциал $d\varphi_{\beta\alpha}:\mathbb{R}(\varepsilon^q)^n\to\mathbb{R}(\varepsilon^q)^n$ является $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-линейным отображением свободных $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-модулей, а отображение $x\in U_\alpha\bigcap U_\beta\to d\varphi_{\beta\alpha}|_x\in\mathbb{R}(\varepsilon^q)^{n^2}$ является $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-дифференцируемым.

Если рассмотреть слой касательного расслоения как свободный $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-модуль, взяв в качестве умножения на ε действие J, то тройка (TM,π,M) является расслоением с $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-дифференцируемыми функциями склейки, принимающими значение в группе $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-автоморфизмов свободного $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-модуля. Значит, на тотальном пространстве касательного расслоения TM можно определить структуру многообразия над $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$.

Определение 3. Векторное поле $v : M \to TM$ называется голоморфным, если v является $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-дифференцируемым отображением.

Отметим, что векторное поле v голоморфно тогда и только тогда, когда производная Ли аффинорного поля J вдоль v обращается в нуль. Действительно, если векторное поле v голоморфно, то обращение в нуль производной Ли непосредственно следует из вида голоморфных функций. Обратное утверждение можно получить, решая систему дифференциальных уравнений в частных производных $\mathcal{L}_v J = 0$.

2. Инфинитезимальная деформация плюральной структуры

Пусть (M, J) — многообразие над алгеброй $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$ и $\dim_{\mathbb{R}(\varepsilon^q)} M = n$. Введем множество аффиноров

$$E_q(M) = \{A_x \in \mathrm{End}(T_x M) \mid x \in M,\ A_x^{q+1} = 0,\ \mathrm{rank}(A_x) = nq\}.$$

Определена естественная проекция $\pi : E_q(M) \to M$, $\pi(A_x) = x$.

Утверждение 2. *На $E_q(M)$ существует структура гладкого многообразия такая, что тройка $E_q = (E_q(M), \pi, M)$ является подрасслоением расслоения аффиноров на M.*

Доказательство. Пусть F_q является орбитой точки

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & E & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & E & 0 \end{pmatrix}$$

относительно действия группы $GL(n(q+1), \mathbb{R})$ на $gl(n(q+1), \mathbb{R})$ сопряжениями. Из [6] известно, что орбита есть погруженное подмногообразие. Для каждого $x \in M$ существует карта (U, φ) и диффеоморфизм $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times F_q$, действующий по правилу

$$\varphi(A_x) = (x, \|A_x\|), \text{ где } \|A_x\| \text{ — матрица } A_x \text{ в натуральном репере.}$$

Множество таких пар (U, φ) и будет образовывать атлас локально тривиального расслоения E_q. $\square$

По определению плюральная структура — это сечение $J : M \to E_q(M)$ расслоения E_q.

Определение 4. Деформацией плюральной структуры J называется гладкое отображение $\tilde{J} : \mathbb{R} \times M \to E_q(M)$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times M \to \tilde{J}_t(x) = \tilde{J}(t, x) \in E_q(M)$ такое, что

1) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\tilde{J}_t : M \to E_q(M)$ — плюральная структура на M,
2) $\tilde{J}_0 = J$.

Определение 5. Пусть $\tilde{J}_t(x)$ — деформация плюральной структуры. Аффинорное поле $V = \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} \tilde{J}_t$ на M называется инфинитезимальной деформацией плюральной структуры J.

Утверждение 3 (свойства инфинитезимальной деформации). *Инфинитезимальная деформация V структуры J имеет следующие свойства:*

1) $VJ^q + JVJ^{q-1} + J^2VJ^{q-2} + \dots + J^qV = 0,$
2) $\{V, J\} = 0.$

Доказательство. 1) Пусть $\tilde{J}_t(x)$ — такое однопараметрическое семейство плюральных структур, что $\tilde{J}_0(x) = J(x) \quad \forall x \in M$. Продифференцировав по t равенство $\tilde{J}_t^{q+1}(x) = 0$, имеем

$$\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \tilde{J}_t(x)\right) \cdot J^q(x) + J(x) \cdot \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \tilde{J}_t(x)\right) \cdot J^{q-1}(x) +$$
$$+ \cdots + J^q(x) \cdot \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \tilde{J}_t(x)\right) = 0,$$

что и доказывает первое свойство.

2) Второе свойство получим, продифференцировав по t равенство $\{\tilde{J}_t, \tilde{J}_t\} = 0$. $\square$

Рассмотрим частный случай, когда деформация плюральной структуры J порождается однопараметрической группой диффеоморфизмов f_t многообразия M, т. е.

$$\tilde{J}_t(x) = (df_t^{-1}|_{f_t(x)}) \circ J(f_t(x)) \circ df_t|_x, \quad x \in M.$$

Такие деформации называются несущественными. Инфинитезимальная деформация в этом случае совпадает с производной Ли $\mathcal{L}_X J$ аффинорного поля J вдоль векторного поля $X = \dfrac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f_t$. Инфинитезимальная деформация, определяемая однопараметрической группой диффеоморфизмов на M, называется несущественной.

Из утверждения 3) следует, что множество инфинитезимальных деформаций плюральной структуры J образует векторное подпространство $D(J)$ в векторном пространстве сечений аффинорного расслоения $T_1^1 M \to M$, а из свойств производной Ли следует, что несущественные инфинитезимальные деформации образуют векторное подпространство $D_0(J)$ в $D(J)$.

Определение 6. Пространством существенных инфинитезимальных деформаций плюральной структуры J называется фактор-пространство

$$D^*(J) = \frac{D(J)}{D_0(J)}.$$

3. Описание пространства существенных деформаций

Пусть (M, J) — многообразие над алгеброй $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$. Цель параграфа состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема. *$D^*(J) \cong H^1(M, \mathfrak{X}_h)$, где $\mathfrak{X}_h$ — пучок голоморфных векторных полей на (M, J).*

Идея доказательства аналогична случаю комплексной структуры, рассматриваемой, например, в [5]. Начнем с построения тонкой резольвенты пучка $\mathfrak{X}_h$. Обозначим через $\Omega^p_{\mathbb{R}(\varepsilon^q)}$ пучок $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-значных $\mathbb{R}$-линейных форм степени p на M. Для $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-карты (U, X^i) обозначим через $\Omega^p_{\mathbb{R}(\varepsilon^q)}(U)$ векторное пространство сечений пучка $\Omega^p_{\mathbb{R}(\varepsilon^q)}$, определенных на U. Рассмотрим сечения $\Theta^I \in \Omega^p_{\mathbb{R}(\varepsilon^q)}(U)$:

$$\Theta^I = \Theta^{\alpha n+i} = dx^{\alpha n+i} - \varepsilon^{q-\alpha} dx^{qn+i}, \quad I = \overline{1, n(q+1)}, \quad i = \overline{1,n}, \quad \alpha = \overline{0, q-1}.$$

Определим подпространство

$$A^p(U) = \{\omega = \omega_{I_1 \ldots I_p} \Theta^{I_1} \wedge \ldots \wedge \Theta^{I_p} \ \mid \ \omega_{I_1 \ldots I_p} : U \longrightarrow \mathbb{R}(\varepsilon^q)^n \text{ — гладкие функции } \} \subset \Omega^p_{\mathbb{R}(\varepsilon^q)}(U)$$

и покажем, что $A^p(U)$ не зависит от выбора координатного отображения. Для этого введем столбцы ковекторных полей $\widehat{dx^\alpha} = {}^t(dx^{\alpha n+1}, \ldots, dx^{\alpha n+n})$ и $\widehat{\Theta}^\alpha = {}^t(\Theta^{\alpha n+1}, \ldots, \Theta^{\alpha n+n})$, где t — знак транспонирования. Тогда из вида $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-дифференцируемых функций [1] следует, что для другого координатного отображения $X^{i'}$ преобразование натурального корепера можно записать в матричном виде

$$\begin{bmatrix} \widehat{dx^{0'}} \\ \widehat{dx^{1'}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \widehat{dx^{q'}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_1 & B_0 & 0 & \dots & 0 \\ B_2 & B_1 & B_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ B_q & B_{q-1} & B_{q-2} & \dots & B_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{dx^{0}} \\ \widehat{dx^{1}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \widehat{dx^{q}} \end{bmatrix},$$

где $B_0, B_1, \dots, B_q$ — $n \times n$-матрицы.

Таким образом, $\widehat{dx^{\alpha'}} = \sum\limits_{\beta=0}^{\alpha} B_{\alpha-\beta}\widehat{dx^{\beta}}$. Разлагая $\widehat{\Theta}^{\alpha'} = \widehat{dx^{\alpha'}} - \varepsilon^{q-\alpha}\widehat{dx^{q'}}$ по базису $\widehat{\Theta}^0, \widehat{\Theta}^1, \dots, \widehat{\Theta}^{q-1}, \widehat{dx^q}$, получим

$$\widehat{\Theta}^{\alpha'} = \sum_{\beta=0}^{\alpha} B_{\alpha-\beta}\widehat{dx^{\beta}} - \varepsilon^{q-\alpha}(\sum_{\beta=0}^{q-1} B_{q-\beta}\widehat{dx^{\beta}} + B_0\widehat{dx^q}).$$

Но $\widehat{dx^{\beta}} = \widehat{\Theta}^{\beta} + \varepsilon^{q-\beta}\widehat{dx^q}$, поэтому $\widehat{\Theta}^{\alpha'} = E_{\alpha}^{\alpha'}\widehat{\Theta}^{\alpha} + G^{\alpha'}\widehat{dx^q}$ и остается показать, что $G^{\alpha'} = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} G^{\alpha'} &= \sum_{\beta=0}^{\alpha} \varepsilon^{q-\beta} B_{\alpha-\beta} - \varepsilon^{q-\alpha}\sum_{\beta=0}^{q-1} \varepsilon^{q-\beta} B_{q-\beta} - \varepsilon^{q-\alpha} B_0 = \\ &= \sum_{\gamma=0}^{\alpha} \varepsilon^{q-\alpha+\gamma} B_{\gamma} - \varepsilon^{q-\alpha}\sum_{\gamma=1}^{q} \varepsilon^{\gamma} B_{\gamma} - \varepsilon^{q-\alpha} B_0 = \\ &= \sum_{\gamma=\alpha+1}^{q} \varepsilon^{q-\alpha+\gamma} B_{\gamma} = 0, \end{aligned}$$

т. к. $q - \alpha + \gamma \geq q + 1$ при $\gamma \geq \alpha + 1$. Значит, $A^p(U)$ не зависит от выбора координатного отображения.

Определим дифференциальный оператор $D : A^0(U) \to A^1(U)$, положив

$$\forall f \in A^0(U) \quad Df = D_i f\Theta^i + D_{n+i}f\Theta^{n+i} + \dots + D_{(q-1)n+i}f\Theta^{(q-1)n+i},$$

где $D_{\alpha n+i} = \partial_{(\alpha+1)n+i} - \varepsilon\partial_{\alpha n+i}$ для $\alpha = \overline{0, q-1}$, $i = \overline{1, n}$.

Если введем строки $\widehat{\partial_{\alpha}} = (\partial_{\alpha n+1}, \dots, \partial_{\alpha n+n})$ и $\widehat{D}_{\alpha} = (D_{\alpha n+1}, \dots, D_{\alpha n+n})$, то $\hat{D}_{\alpha} = \widehat{\partial_{\alpha+1}} - \widehat{\partial_{\alpha}}$ и так же, как для столбцов ковекторов $\hat{\Theta}^{\alpha}$, получим $\hat{D}_{\alpha} = E_{\alpha}^{\alpha'}\hat{D}_{\alpha'}$, где $\hat{\Theta}^{\alpha'} = E_{\alpha}^{\alpha'}\hat{\Theta}^{\alpha}$. Поэтому D не зависит от выбора координатного отображения.

Теперь можно определить дифференциал $D : A^p(U) \to A^{p+1}(U)$,

$$D\omega = D_i\omega \wedge \Theta^i + D_{n+i}\omega \wedge \Theta^{n+i} + \dots + D_{(q-1)n+i}\omega \wedge \Theta^{(q-1)n+i} \quad \forall \omega \in A^p(U).$$

Обозначим через A^p пучок на M, порожденный ростками форм $\omega \in A^p(U)$ для всех $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-карт (U, X^i). Ясно, что A^p является пучком модулей над пучком алгебр гладких $\mathbb{R}$-значных функций, и, следовательно, есть тонкий пучок [7].

Далее, локальные дифференциалы D определяют морфизм пучков $D : A^p \to A^{p+1}$.

Утверждение 4. *Морфизм D удовлетворяет следующим свойствам:*

1) $D^2 = 0$
2) $\mathrm{Ker}(D : A^0 \to A^1) = \mathcal{F}_h$, *где $\mathcal{F}_h$ — пучок $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-дифференцируемых функций на (M, J).*

Доказательство. Пункт 1) следует из того, что $D_I D_J = D_J D_I$, а п. 2) — из вида $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-дифференцируемых функций [1]. $\square$

Утверждение 5. *Последовательность пучков*
$$0 \to \mathcal{F}_h \xrightarrow{i} A^0 \xrightarrow{D} A^1 \xrightarrow{D} A^2 \xrightarrow{D} \cdots \xrightarrow{D} A^p \xrightarrow{D} \cdots$$
является тонкой резольвентой пучка $\mathcal{F}_h$.

Доказательство. Так как пучки A^p являются тонкими и последовательность точна в члене A^0 в силу утверждения 4), то достаточно доказать точность последовательности в членах A^p для $p \geq 1$, т. е. D-лемму Пуанкаре. Вначале докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть* $U = \mathop{\times}\limits_{I=1}^{n(q+1)} U_I \subset \mathbb{R}(\varepsilon^q)^n$, *где* U_I *— связная окрестность нуля в* $\mathbb{R}$, *и задана* $G \in A^0(U)$ *такая, что* $D_{\beta n+j}G = 0$ *для всех* $\beta n + j > \alpha n + i$.

Тогда существует такая $F \in A^0(U)$, *что* $D_{\alpha n+i}F = G$ *и* $D_{\beta n+j}F = 0$ *для* $\beta n + j > \alpha n + i$.

Доказательство. Пусть $G = \sum\limits_{k=0}^{q} \varepsilon^k g_k$ и $F = \sum\limits_{k=0}^{q} \varepsilon^k f_k$. Тогда уравнение $D_{\alpha n+j}F = G$ эквивалентно системе уравнений
$$\partial_{(\alpha+1)n+i} f_0 = g_0, \quad \partial_{(\alpha+1)n+i} f_k - \partial_{\alpha n+i} f_{k-1} = g_k, \quad k = \overline{1,q},$$
а уравнение $D_{\beta n+j}F = 0$ эквивалентно
$$\partial_{(\beta+1)n+j} f_0 = 0, \quad \partial_{(\beta+1)n+j} f_k - \partial_{\beta n+j} f_{k-1} = 0, \qquad \beta n + j > \alpha n + i, \quad k = \overline{1,q}.$$
Поэтому f_0 является решением системы
$$\partial_{(\alpha+1)n+i} f_0 = g_0, \quad \partial_{(\beta+1)n+i} f_0 = 0, \quad \beta n + j > \alpha n + i, \tag{S_0}$$
и при $k \geq 1$ функция f_k решает систему
$$\partial_{(\alpha+1)n+i} f_k = g_k + \partial_{\alpha n+i} f_{k-1}, \quad \partial_{(\beta+1)n+j} f_k = \partial_{\beta n+j} f_{k-1}, \quad \beta n + j > \alpha n + i, \tag{S_k}$$
где функция f_{k-1} — решение системы (S_{k-1}).

Докажем по индукции существование решений систем (S_k), $k = \overline{0,q}$. Прежде всего заметим, что системы (S_k) имеют вид $\partial_{\gamma n+m} f_k = R_{\gamma n+m}$, $\gamma n + m \geq (\alpha+1)n + i$, и в силу определения окрестности U для доказательства существования решения достаточно показать, что выполняются условия интегрируемости
$$\partial_{\gamma n+m} R_{\delta n+l} = \partial_{\delta n+l} R_{\gamma n+m}, \qquad \gamma n + m \neq \delta n + l.$$
Если $k = 0$, то $R_{(\alpha+1)n+i} = g_0$ и $R_{\gamma n+m} = 0$ при $\gamma n + j > (\alpha+1)n + i$. Так как $D_{\beta n+j}G = 0$ при $\beta n + j > \alpha n + i$, то $\partial_{(\beta+1)n+j} g_0 = 0$, откуда и следуют условия интегрируемости.

Теперь предположим, что система (S_{k-1}) имеет решение f_{k-1}. Тогда для системы (S_k)
$$R_{(\alpha+1)n+i} = g_k + \partial_{\alpha n+i} f_{k-1}, \quad R_{(\beta+1)n+j} = \partial_{\beta n+j} f_{k-1}, \quad \beta n + j > \alpha n + i.$$
Проверим условия интегрируемости
$$\begin{aligned}&\partial_{(\beta+1)n+j} R_{(\alpha+1)n+i} - \partial_{(\alpha+1)n+j} R_{(\beta+1)n+j} = \\ &= \partial_{(\beta+1)n+j} g_k + \partial_{(\beta+1)n+j} \partial_{\alpha n+i} f_{k-1} - \partial_{(\alpha+1)n+i} \partial_{\beta n+j} f_{k-1}.\end{aligned}$$
Так как f_{k-1} есть решение системы (S_{k-1}), то $\partial_{(\beta+1)n+j} f_{k-1} = \partial_{\beta n+j} f_{k-2}$ (где полагаем $f_{-1} = 0$). Поэтому
$$\begin{aligned}&\partial_{(\beta+1)n+j} R_{(\alpha+1)n+i} - \partial_{(\alpha+1)n+j} R_{(\beta+1)n+j} = \\ &= \partial_{(\beta+1)n+j} g_k + \partial_{\alpha n+i} \partial_{\beta n+j} f_{k-2} - \partial_{\beta n+j} g_{k-1} - \partial_{\beta n+j} \partial_{\alpha n+i} f_{k-2} = \\ &= \partial_{(\beta+1)n+j} g_k + \partial_{\beta n+j} g_{k-1} = 0,\end{aligned}$$

т. к. $D_{\beta n+j}G = 0$ по предположению.

Наконец, при $\gamma n + m,\ \delta n + l > \alpha n + i$, используя систему S_{k-1}, получим

$$\begin{aligned}&\partial_{(\delta+1)n+l}R_{(\gamma+1)n+m} - \partial_{(\gamma+1)n+m}R_{(\delta+1)n+l} =\\ &= \partial_{(\delta+1)n+l}\partial_{\gamma n+m}f_{k-1} - \partial_{(\gamma+1)n+m}\partial_{\delta n+l}f_{k-1} =\\ &= \partial_{\gamma n+m}\partial_{\delta n+l}f_{k-2} - \partial_{\delta n+l}\partial_{\gamma n+m}f_{k-2} = 0. \quad \square\end{aligned}$$

Утверждение 6 (лемма Пуанкаре для оператора D). *Пусть $U = \overset{n(q+1)}{\underset{I=1}{\otimes}} U_I \subset \mathbb{R}(\varepsilon^q)^n$, где U_I — связная окрестность нуля в $\mathbb{R}$, $\omega \in A^p(U)$. Если $D\omega = 0$, то $\omega = D\eta$, $\eta \in A^{p-1}(U)$.*

Доказательство. Доказательство проводим индукцией по числу форм $\Theta^{\alpha n+i}$, входящих в разложение формы ω по базису $\{\Theta^{\beta n+j}\}$.

Пусть $\Theta^{\alpha n+i}$ — форма с максимальным номером, входящая в разложение ω. Так как $D\omega = 0$, то для всех коэффициентов $\omega_{I_1 I_2 \dots I_p}$ формы ω выполняется равенство $D_{\beta n+j}\omega_{I_1 I_2 \dots I_p} = 0$ для $\beta n + j > \alpha n + i$. Теперь в силу предыдущей леммы существуют функции $\eta_{I_1 I_2 \dots I_{p-1}} \in A^0(U)$ такие, что $D_{\alpha n+i}\eta_{I_1 I_2 \dots I_{p-1}} = \omega_{I_1 I_2 \dots I_{p-1}\alpha n+i}$ и $D_{\beta n+j}\eta_{I_1 I_2 \dots I_{p-1}} = 0$ при $\beta n + j > \alpha n + i$.

Положим теперь $\eta = \eta_{I_1 I_2 \dots I_{p-1}}\Theta^{I_1} \wedge \Theta^{I_2} \wedge \dots \wedge \Theta^{I_{p-1}} \in A^{p-1}(U)$. Ясно, что в разложении формы $\tilde{\omega} = \omega - D\eta$ не участвует $\Theta^{\alpha n+i}$, $\tilde{\omega}$ раскладывается по формам $\Theta^{\gamma n+k}$, $\gamma n + k < \alpha n + i$, и $D\tilde{\omega} = 0$. Поэтому по предположению индукции $\tilde{\omega} = D\tilde{\eta}$, где $\tilde{\eta} \in A^{p-1}(U)$ и $\omega = D(\tilde{\eta} + \eta)$, что и доказывает лемму Пуанкаре. $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 1. Так как построенная резольвента пучка $\mathcal{F}_h$ тонкая, то тонкой будет также и резольвента

$$0 \to \mathcal{F}_h \otimes \mathfrak{X}_h \xrightarrow{i\otimes \mathrm{Id}} A^1 \otimes \mathfrak{X}_h \xrightarrow{\overline{D}} A^2 \otimes \mathfrak{X}_h \xrightarrow{\overline{D}} \dots,$$

где $\overline{D} = D \otimes \mathrm{Id}$, $\mathfrak{X}_h$ — пучок голоморфных векторных полей. Так как $\mathcal{F}_h \otimes \mathfrak{X}_h = \mathfrak{X}_h$, то из абстрактной теоремы де Рама [7] следует, что $H^q(M, \mathfrak{X}_h) \cong H^q(A^* \otimes \mathfrak{X}_h, \overline{D})$.

Так как для любой точки $p \in M$ касательное пространство T_pM есть свободный $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-модуль, то пучок векторных полей $\mathfrak{X}$ на M есть пучок модулей над пучком алгебр A^0. Пусть $\{\partial_{\alpha n+i}\}$ — натуральный репер $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-карты (U, X^i), тогда $\partial_i \in \mathfrak{X}_h$, и для любого векторного поля $v \in \mathfrak{X}(U)$

$$v = v^{\alpha n+i}\partial_{\alpha n+i} = v^i\partial_i, \quad \text{где} \quad v^i = \sum_{\alpha=0}^{q} \varepsilon^\alpha v^{\alpha n+i} \in A^0(U).$$

Поэтому пучок аффинорных полей $\mathfrak{X}^1_1$ представляется в виде $\mathfrak{X}^1_1 = \Omega^1 \otimes_{A^0} \mathfrak{X} = \Omega^1 \otimes_{A^0} \mathfrak{X}_h$.

Теперь справедливость теоремы вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 7. *Пусть аффинорное поле $V \in \mathfrak{X}^1_1(M) = \Omega^1 \otimes_{A^0} \mathfrak{X}_h(M)$ является инфинитезимальной деформацией плюральной структуры J. Тогда $V \in A^1 \otimes_{A^0} \mathfrak{X}_h(M)$ и $\overline{D}V = 0$.*

Если V есть несущественная инфинитезимальная деформация, то $V = \overline{D}w$, $w \in \mathfrak{X}(M)$.

Доказательство. Пусть (U, X^i) есть $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-карта. Мы будем применять матричные обозначения. Пусть $V|_U = V_\alpha \widehat{dx^\alpha} \otimes \widehat{\partial_0}$, где $V^\alpha = \sum\limits_{\beta=0}^{q} \varepsilon^\beta V^\beta_\alpha$, а $V^\beta_\alpha = \|V^{\beta n+j}_{\alpha n+i}\|$ — $n \times n$-матрицы.

Заметим, что

$$\sum_{\alpha=0}^{q} J^{q-\alpha}\, V|_U\, J^{\alpha}(\widehat{\partial_\beta}) = \sum_{\alpha=0}^{q-\beta} J^{q-\alpha}\, V|_U\, (\widehat{\partial_{\beta+\alpha}}) = \sum_{\alpha=0}^{q-\beta} J^{q-\alpha}(V^{\gamma}_{\beta+\alpha}\widehat{\partial_\gamma}) =$$
$$= \sum_{\alpha=0}^{q-\beta}\sum_{\gamma=0}^{\alpha} V^{\gamma}_{\beta+\alpha}(\widehat{\partial_{\gamma+q-\alpha}}) = \sum_{\alpha=0}^{q-\beta}\sum_{\mu=q-\alpha}^{q} V^{\mu+\alpha-q}_{\beta+\alpha}\widehat{\partial_\mu} = \sum_{\mu=\beta}^{q}\sum_{\alpha=q-\mu}^{q-\beta} V^{\mu+\alpha-q}_{\beta+\alpha}\widehat{\partial_\mu}.$$

Поэтому в силу утверждения 3) имеем $\sum\limits_{\alpha=q-\mu}^{q-\beta} V^{\mu+\alpha-q}_{\beta+\alpha} = 0$ для всех $\mu : \beta \geq \mu \geq q$. Положив $\sigma = \alpha - q + \mu$ и $\nu = \mu - \beta$, получим $\sum\limits_{\sigma=0}^{\nu} V^{\sigma}_{q-\nu+\sigma} = 0$, где $\nu = \overline{0,q}$.

Теперь $V|_U = \sum\limits_{\alpha=0}^{q-1} V_\alpha(\widehat{\Theta^\alpha} + \varepsilon^{q-\alpha}\widehat{dx^q}) \otimes \widehat{\partial_0} + V_q\widehat{dx^q} \otimes \widehat{\partial_0}$, и, значит, матричный коэффициент при $\widehat{dx^q} \otimes \widehat{\partial_0}$ есть

$$\sum_{\alpha=0}^{q-1} \varepsilon^{q-\alpha}V_\alpha + V_q = \sum_{\alpha=1}^{q} \varepsilon^{\alpha}V_{q-\alpha} + V_q = \sum_{\alpha=1}^{q} \varepsilon^{\alpha}\sum_{\beta=0}^{q} V^{\beta}_{q-\alpha}\varepsilon^{\beta} + \sum \varepsilon^{\gamma}V^{\gamma}_{q} =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{\beta=0}^{q} \varepsilon^{\alpha+\beta}V^{\beta}_{q-\alpha} + \sum \varepsilon^{\gamma}V^{\gamma}_{q} = \sum_{\gamma=1}^{q}\sum_{\beta=0}^{\gamma-1} \varepsilon^{\gamma}V^{\beta}_{q-\gamma+\beta} + \sum_{\gamma=1}^{q} \varepsilon^{\gamma}V^{\gamma}_{q} + V^0_q =$$
$$= V^0_q + \sum_{\gamma=1}^{q}\varepsilon^{\gamma}\sum_{\beta=0}^{\gamma} V^{\beta}_{q-\gamma+\beta} = 0.$$

Таким образом, $V|_U = \sum\limits_{\alpha=0}^{q-1} V_\alpha\widehat{\Theta^\alpha}$ и $V \in A^1 \otimes_{A^0} \mathfrak{X}_h(M)$.

Теперь $\{J, V\} = 0$ в силу утверждения 3), и из определения тензора Нейенхейса и вида координат плюральной структуры J в $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-карте следует, что

$$\partial_{(\alpha+1)n+i}V^{\gamma n+k}_{\beta n+j} - \partial_{(\beta+1)n+j}V^{\gamma n+k}_{\alpha n+i} - \partial_{\alpha n+i}V^{(\gamma-1)n+k}_{\beta n+j} + \partial_{\beta n+j}V^{(\gamma-1)n+k}_{\alpha n+i} = 0.$$

Поэтому

$$\partial_{(\alpha+1)n+i}\Big[\sum_{\gamma=0}^{q}\varepsilon^{\gamma}V^{\gamma n+k}_{\beta n+j}\Big] - \partial_{(\beta+1)n+j}\Big[\sum_{\gamma=0}^{q}\varepsilon^{\gamma}V^{\gamma n+k}_{\beta n+j}\Big] - \varepsilon\partial_{\alpha n+i}\Big[\sum_{\gamma=1}^{q}\varepsilon^{\gamma-1}V^{\gamma n+k}_{\beta n+j}\Big] +$$
$$+\varepsilon\partial_{\beta n+j}\Big[\sum_{\gamma=1}^{q}\varepsilon^{\gamma-1}V^{\gamma n+k}_{\alpha n+i}\Big] = 0,$$

отсюда

$$D_{\alpha n+i}V^{k}_{\beta n+j} - D_{\beta n+j}V^{k}_{\alpha n+i} = 0,$$

следовательно, $\overline{D}V = 0$.

Наконец, пусть $V = \mathcal{L}_w J$. Тогда если $w|_U = w^{\alpha n+i}\partial_{\alpha n+i}$, то

$$V|_U\,(\partial_{\beta n+j}) = -\partial_{(\beta+1)n+j}w^{\alpha n+i}\partial_{\alpha n+i} + \partial_{\beta n+j}w^{\alpha n+i}\partial_{(\alpha+1)n+i} =$$
$$= -\partial_{(\beta+1)n+j}w^{i}\partial_i + \partial_{\beta n+i}\varepsilon w^{i}\partial_i = -D_{\beta n+j}w^{i}\partial_i.$$

Итак, $V = -Dw$, и утверждение 7, а тем самым и теорема доказаны.

4. Примеры вычисления $H^1(M;\mathfrak{X}_h)$

Пример 1. Пусть $\pi : T^qB \to B$ — касательное расслоение порядка q, $n = \dim B$. Тогда на тотальном пространстве $M = T^qB$ определена структура n-мерного многообразия над алгеброй $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$ [1]. При этом, если (U_B, ϕ_B) — карта гладкой структуры на B, то $U = \pi^{-1}(U_B)$ является областью определения $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-карты, и для U выполняются условия D-леммы Пуанкаре (утверждение 6). Поэтому $H^k(U;\mathfrak{X}_h) = 0$ для всех $k > 0$. Следовательно, если $\mathfrak{U}_B$ — покрытие B координатными окрестностями, и $\mathfrak{U} = \pi^{-1}\mathfrak{U}$ — соответствующее покрытие M, то по теореме Лере $H^k(M;\mathfrak{X}_h) \cong \check{H}^k(\mathfrak{U};\mathfrak{X}_h)$, где $\check{H}^k$ — когомологии Чеха. Далее, из вида $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-дифференцируемых функций [1] следует, что $\mathfrak{X}_h(\pi^{-1}(U_B))$ — свободный $C^\infty(U_B)$-модуль ранга $n(q+1)$. Теперь, используя разбиение единицы, подчиненное покрытию $\mathfrak{U}_B$, стандартным образом получаем, что $H^k(M;\mathfrak{X}_h) \cong \check{H}^k(\mathfrak{U};\mathfrak{X}_h) = 0$ для $k > 0$.

Таким образом, каноническая плюральная структура на тотальном пространстве касательного расслоения высшего порядка является жесткой.

Пример 2. Пусть G — дискретная подгруппа в группе параллельных переносов векторного пространства $\mathbb{R}(\varepsilon^q) \cong \mathbb{R}^{q+1}$, порожденная векторами базиса $\{e_0, \dots, e_q\}$. Фактор-многообразие $M = \mathbb{R}(\varepsilon^q)/G$ гомеоморфно $(q+1)$-мерному тору, и т. к. G действует на $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$ посредством $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-диффеоморфизмов, то на M определена единственная структура одномерного многообразия над $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$, для которой естественная проекция $\pi : \mathbb{R}(\varepsilon^q) \to M$ является $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-дифференцируемым накрытием. Отметим, что разным подгруппам G соответствуют, вообще говоря, разные структуры $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-многообразия. Легко видеть, что голоморфное касательное расслоение M тривиально, поэтому имеет место изоморфизм пучков $\mathfrak{X}_h \cong F_h$, следовательно, $H^1(M;\mathfrak{X}_h) \cong H^1(M;F_h)$.

Действие группы G на $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$ можно продолжить до действия на комплексе $(A^*(\mathbb{R}(\varepsilon^q)), D)$. Пусть $(A^*(\mathbb{R}(\varepsilon^q)), D)^G$ — комплекс G-инвариантных форм, тогда $\pi^* : (A^*(M), D) \to (A^*(\mathbb{R}(\varepsilon^q)), D)^G$ является изоморфизмом. Поэтому $H^1(M;\mathfrak{X}_h) \cong H^1((A^*(\mathbb{R}(\varepsilon^q)), D)^G)$.

Пусть $Z^1(\mathbb{R}(\varepsilon^q)) = \mathrm{Ker}[D : A^1(\mathbb{R}(\varepsilon^q)) \to A^2(\mathbb{R}(\varepsilon^q))]$ — группа коциклов. Определим линейный оператор $I : Z^1(\mathbb{R}(\varepsilon^q)) \to A^0(\mathbb{R}(\varepsilon^q))$ с помощью рекуррентных формул: для любой $\omega = \sum_{\alpha=0}^{q-1} \omega_\alpha \Theta^\alpha \in A^1(\mathbb{R}(\varepsilon^q))$, $\omega_\alpha = \sum_{a=0}^{q} \varepsilon^a \omega_\alpha^a$, положим $I(\omega) = F = \sum_{a=0}^{q} \varepsilon^a f^a$, где

$$f^0(x^b) = \sum_{\alpha=0}^{q-1} \int_0^1 \omega_\alpha^0(x^0, tx^1, \dots, tx^q) x^{\alpha+1} dt,$$

$$f^a(x^b) = \sum_{\alpha=0}^{q-1} \int_0^1 [\omega_\alpha^a(x^0, tx^1, \dots, tx^q) + \partial_\alpha f^{a-1}(x^0, tx^1, \dots, tx^q)] x^{\alpha+1} dt.$$

Легко проверить, что $DI(\omega) = \omega$.

Рассмотрим коцикл $\omega \in (A^0(\mathbb{R}(\varepsilon^q)))^G$, $D\omega = 0$. Заметим, что действие G на A^0 превращает A^0 в G-модуль, и рассмотрим отображение $\eta : G \to A^0(\mathbb{R}(\varepsilon^q))$, $\eta(g) = gI(\omega) - I(\omega)$. Отметим, что действительно η принимает значение в G-модуле F_h, т. к. D перестановочно с умножением на элементы G и, значит, $D\eta(g) = 0$ для всех $g \in G$. Теперь ω является кограницей в комплексе $(A^*(\mathbb{R}(\varepsilon^q)), D)^G$ тогда и только тогда, когда существует такая функция $F \in \mathcal{F}_h(\mathbb{R}(\varepsilon^q))$, что $\eta(g) = gF - F$. Действительно, в этом случае $\widetilde{F} = I(\omega) - F$ принадлежит $(A^0(\mathbb{R}(\varepsilon^q)))^G$ и $D\widetilde{F} = \omega$. (Последнее утверждение означает, что имеет место инъективный морфизм группы $H^1(M;\mathfrak{X}_h)$ в группу когомологий $H^1(G;\mathcal{F}_h)$ группы G с коэффициентами в G-модуле $\mathcal{F}_h$ ([8], гл. 1), отображающий $[\omega]$ в $\eta(g) = gI(\pi^*(\omega)) - I(\pi * (\omega))$.)

Теперь нетрудно показать, что $H^1(M, \mathfrak{X}_h) \neq 0$. Для простоты рассмотрим случай, когда образующие G имеют вид: $\{e_k = \varepsilon^k\}_{k=\overline{0,q}}$. Докажем, например, что $[\Theta^0] \neq 0$. Прежде всего, $\Theta^0 = dx^0 - \varepsilon^q dx^q \in (A^1(\mathbb{R}(\varepsilon^q)))^G$ и $D\Theta^0 = 0$. Далее, $I(\Theta^0) = x^1 + \varepsilon x^2 + \cdots + \varepsilon^{q-1} x^q$. Следовательно, для $g = g^0 e_0 + \cdots + g^q e_q$, $g^k \in \mathbb{Z}$, имеем $\eta(g) = g^1 + \varepsilon g^2 + \cdots + \varepsilon^{q-1} g^q$. Если $[\Theta^0] = 0$, то $\eta(g) = F(x^0 + g^0, \ldots, x^q + g^q) - F(x^0, \ldots, x^q)$, где $F(x^0, \ldots, x^q) = \sum\limits_{a=0}^{q} \varepsilon^q f^a(x^0, \ldots, x^q) \in \mathcal{F}_h$. Но для $\mathbb{R}(\varepsilon^q)$-дифференцируемой функции имеем $f^0 = f^0(x^0)$ [1], поэтому $g^1 = 0$, что противоречит произвольности g.

Литература

1. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. *Пространства над алгебрами.* – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1985. – 264 с.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* – М.: Наука, 1981. – 344 с.
3. Lehmann-Lejeune J. *Integrabilite des G-structures definies par une* 1-*forme* 0-*deformable a valeures dans le fibre tangent* // Ann. Inst. Fourier. – 1966. – V. 16. – № 2. – P. 329-387.
4. Кручкович Г.И. *Условия интегрируемости регулярной гиперкомплексной структуры* // Укр. геом. сб. – 1970. – вып. 9. – С. 67-75.
5. Kodaira K., Spencer D.C. *On deformations of complex analytic structures* I–II // Ann. Math. – 1958. – V. 67. – P. 328-466.
6. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия.* – М.: Наука, 1979. – 760 с.
7. Уэллс Р. *Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях.* – Пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 290 с.
8. Гишарде А. *Когомологии топологических групп и алгебр Ли.* – М.: Мир, 1984. – 262 с.

Казанский государственный университет

Поступила
11.04.1996