ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 11 (546)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.984

Э.Ф. АХМЕРОВА

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА, ВОЗМУЩЕННОГО НЕГЛАДКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

1. В данной работе изучается оператор $H = H^0 + V$ в $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, где $H^0 = -d^2/dx^2 + x^2$, V — оператор умножения на вещественную, измеримую, убывающую при $x \to \infty$ функцию. Как известно (см., напр., [1], с. 326), спектр оператора H^0 состоит из чисел $2n+1$, а соответствующие нормированные собственные функции суть $\varphi_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}/\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где $H_n(x)$ — многочлены Чебышева–Эрмита. Асимптотика собственных чисел возмущенного оператора $H = H^0 + V$ для гладких убывающих на бесконечности функций впервые подробно изучена в работе [2], где использовано эталонное решение с помощью функций Эйри ([3], с. 377). Так как $V(x)$ не предполагается гладкой, то для функции $q(x) = x^2 + V(x)$ не можем непосредственно применить технику эталонных решений. В данной работе используем аппарат теории возмущений, основанный на изучении асимптотического представления ядра резольвенты невозмущенного оператора.

Обозначим через λ_n собственные значения оператора H^0, через P_n — соответствующие проекторы на собственные подпространства, а через $R^0(\lambda)$ — резольвенту оператора H^0, $R^0(\lambda) = (H^0 - \lambda)^{-1}$. Согласно [4], если V удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|\lambda-\lambda_n|\le 1/2} \|R_n^0(\lambda)V\| = 0,$$

где $R_n^0(\lambda) = R^0(\lambda) - (\lambda_n - \lambda)^{-1}P_n$, то спектр оператора $H = H^0 + V$ определяется из уравнения

$$\lambda = \lambda_n + (V\varphi_n, \varphi_n) - (VR_n(\lambda)V\varphi_n, \varphi_n). \tag{1}$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, φ_n — нормированный собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_n,

$$R_n(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m [R_n^0(\lambda)V]^m R_n^0(\lambda). \tag{2}$$

Представим оператор H^0 в виде

$$H^0 = H_D^0 \oplus H_N^0,$$

где H_D^0 и H_N^0 — сужения H^0 на инвариантные подпространства соответственно нечетных и четных функций из $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$. Пусть $R^0(\lambda)$, $R_D^0(\lambda)$, $R_N^0(\lambda)$ — резольвенты операторов H^0, H_D^0 и H_N^0. В силу соотношений $\varphi_n(-x) = (-1)^n\varphi_n(x)$ получим

$$R_D^0(-x,t,\lambda) = -R_D^0(x,t,\lambda) = R_D^0(x,-t,\lambda),$$
$$R_N^0(-x,t,\lambda) = R_N^0(x,t,\lambda) = R_N^0(x,-t,\lambda)$$

для всех $x, t \in \mathbf{R}$ и $\lambda \ne 2n+1$.

Таким образом, для изучения ядра $R^0(x,t,\lambda)$ оператора $R^0(\lambda)$ при $x\in(-\infty,\infty)$, $t\in(-\infty,\infty)$ достаточно изучить ядра $R^0_D(x,t,\lambda)$ и $R^0_N(x,t,\lambda)$ при $x\ge 0$, $t\ge 0$. А для этого последнее удобнее связать с ядрами $B^{\pm}_D(x,t,\lambda)$ и $B^{\pm}_N(x,t,\lambda)$ резольвент $B^{\pm}_D(\lambda)$ и $B^{\pm}_N(\lambda)$ операторов $L^{\pm}_D$ и $L^{\pm}_N$

$$R^0_D(x,t,\lambda)=\frac{1}{2}B^+_D(x,t,\lambda),\quad R^0_N(x,t,\lambda)=\frac{1}{2}B^+_N(x,t,\lambda),\quad x,t\ge 0,$$

где $L^{\pm}_D=H^0_D\big|_{\mathbf{H}^{\pm}}$, $L^{\pm}_N=H^0_N\big|_{\mathbf{H}^{\pm}}$, $H^{\pm}=\{y\in\mathbf{H}: y(\mp x)=0,\ x>0\}$. Пусть $R^0_n(x,t,\lambda)$ — ядро резольвенты $R^0_n(\lambda)$. Отсюда и согласно определению $R^0_n(x,t,\lambda)$ при $x,t\ge 0$ будем иметь

$$R^0_n(x,t,\lambda)=\frac{1}{2}\begin{cases}B^+_N(x,t,\lambda)+B^+_{Dn}(x,t,\lambda), & n \text{ нечетное};\\ B^+_D(x,t,\lambda)+B^+_{Nn}(x,t,\lambda), & n \text{ четное},\end{cases}\tag{3}$$

где

$$B^+_{Dn}(x,t,\lambda)=B^+_D(x,t,\lambda)-\frac{2\varphi_{2n+1}(t)\varphi_{2n+1}(x)}{4n+3-\lambda},$$
$$B^+_{Nn}(x,t,\lambda)=B^+_N(x,t,\lambda)-\frac{2\varphi_{2n}(t)\varphi_{2n}(x)}{4n+1-\lambda}.$$

Таким образом, чтобы исследовать поведение части $R^0_n(\lambda)$ резольвенты $R^0(\lambda)$ в окрестности $\lambda=\lambda_n$, нужно изучить поведения $B^+_{Dn}(x,t,\lambda)$ и $B^+_{Nn}(x,t,\lambda)$ в окрестности соответствующих собственных значений.

2. Получим представления для ядер $B^+_D(x,t,\lambda)$, $B^+_N(x,t,\lambda)$ резольвент $B^+_D(\lambda)$ и $B^+_N(\lambda)$. Начнем с изучения $B^+_D(x,t,\lambda)$. Построим линейно независимые решения $y_k(x,\lambda)$, где $k=1,2$, $y_1(x,\lambda)\in L^2(0,\infty)$, уравнения

$$-y''(x)+x^2y(x)=\lambda y(x).\tag{4}$$

Для этого, следуя работе [2], применим метод эталонных решений. Введем обозначения при $x\ge 0$, $\lambda>0$

$$\xi(x,\lambda)=\left(\frac{3}{2}\int_{\sqrt{\lambda}}^{x}|t^2-\lambda|^{\frac{1}{2}}dt\right)^{\frac{2}{3}}\operatorname{sgn}(x-\sqrt{\lambda}),$$
$$S(x,\lambda)=|\xi'(x,\lambda)|^{-\frac{1}{2}},\quad K(x,\lambda)=S''(x,\lambda)S^{-1}(x,\lambda)|x^2-\lambda|^{-\frac{1}{2}},$$
$$\widetilde{Q}(x,\lambda)=\begin{cases}Q(x,\lambda)=\int\limits_x^{\sqrt{\lambda}}(\lambda-t^2)^{\frac{1}{2}}dt & \text{при }\ 0\le x\le\sqrt{\lambda};\\ Q_1(x,\lambda)=\int\limits_{\sqrt{\lambda}}^{x}(t^2-\lambda)^{\frac{1}{2}}dt & \text{при }\ x>\sqrt{\lambda}.\end{cases}$$

В качестве эталонных решений возьмем функции

$$z_1(x,\lambda)=S(x,\lambda)Ai(\xi(x,\lambda)),\quad z_2(x,\lambda)=S(x,\lambda)Bi(\xi(x,\lambda)),$$

где $Ai(\xi), Bi(\xi)$ — вещественные функции Эйри. Соответствующие интегральные уравнения указанного метода имеют вид

$$y_1(x,\lambda)=z_1(x,\lambda)+\int_x^{\infty}H(x,t,\lambda)y_1(t,\lambda)dt,$$
$$y_2(x,\lambda)=z_2(x,\lambda)-\int_0^{x}H(x,t,\lambda)y_2(t,\lambda)dt,$$

где $H(x,t,\lambda)=\{z_1(x,\lambda)z_2(t,\lambda)-z_1(t,\lambda)z_2(x,\lambda)\}\,K(t,\lambda)|t^2-\lambda|^{1/2}$.

Пусть функция $u(x,\lambda)=[B_D^+(\lambda)h](x)$, где $\lambda\neq 4n+3, \quad n\geq 0$, $h(x)\in L^2(0,\infty)$. Тогда $u(x,\lambda)$ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$-u''(x)+x^2u(x)-\lambda u(x)=h(x) \tag{5}$$

и условиям $u(0,\lambda)=0$, $u(x,\lambda)\in L^2(0,\infty)$.

Введем ядро

$$G(x,t,\lambda)=\frac{1}{W(\lambda)}\begin{cases}y_1(x,\lambda)y_2(t,\lambda), & 0\leq t\leq x<\infty;\\ y_1(t,\lambda)y_2(x,\lambda), & 0\leq x<t<\infty,\end{cases}$$

где $W(\lambda)=y_1(x,\lambda)y_2'(x,\lambda)-y_1'(x,\lambda)y_2(x,\lambda)$.

Лемма. *Функция* $w(x,\lambda)=\int\limits_0^\infty G(x,t,\lambda)h(t)dt$ *удовлетворяет уравнению* (5) *и условию* $w(x,\lambda)\in L^2(0,\infty)$.

Из леммы следует, что функция $f(x,\lambda)=u(x,\lambda)-w(x,\lambda)$ удовлетворяет однородному уравнению (4) и принадлежит $L^2(0,\infty)$. Следовательно, $f(x,\lambda)=Ay_1(x,\lambda)$, где $A-$ некоторая постоянная. Ее нетрудно найти из условия $u(0,\lambda)=0$. Итак, справедлива

Теорема 1. *Ядра* $B_D^+(x,t,\lambda)$ *и* $B_{Dn}^+(x,t,\lambda)$ *резольвент* $B_D^+(\lambda)$ *и* $B_{Dn}^+(\lambda)$ *соответственно имеют вид*

$$B_D^+(x,t,\lambda)=G(x,t,\lambda)-\frac{y_2(0,\lambda)}{W(\lambda)y_1(0,\lambda)}y_1(x,\lambda)y_1(t,\lambda),$$

$$B_{Dn}^+(x,t,\lambda)=B_D^+(x,t,\lambda)-\frac{2\varphi_{2n+1}(t)\varphi_{2n+1}(x)}{4n+3-\lambda}=$$

$$=G(x,t,\lambda)-\frac{y_2(0,\lambda)y_1(x,\lambda)y_1(t,\lambda)}{W(\lambda)y_1(0,\lambda)}-\frac{y_2(0,4n+3)y_1(x,4n+3)y_1(t,4n+3)}{(4n+3-\lambda)W(4n+3)(y_1)'_\lambda(0,4n+3)}.$$

Замечание. Такие же представления имеют ядра $B_N^+(x,t,\lambda)$ и $B_{Nn}^+(x,t,\lambda)$ с тем отличием, что вместо отношения $y_2(0,\lambda)/y_1(0,\lambda)$ будет $y_2'(0,\lambda)/y_1'(0,\lambda)$, $4n+3$ заменится на $4n+1$ и вместо $(y_1)'_\lambda(0,\lambda_n)$ будем иметь $(y_1)''_{x\lambda}(0,\lambda_n)$.

3. Получим теперь асимптотику спектра возмущенного оператора. Из соотношений (1)–(3) следует, что для этого нужны асимптотические представления ядер $B_D^+(x,t,\lambda)$, $B_{Nn}^+(x,t,\lambda)$ в окрестности $\lambda_{2n}=4n+1$ и $B_N^+(x,t,\lambda)$, $B_{Dn}^+(x,t,\lambda)$ в окрестности $\lambda_{2n+1}=4n+3$. Из теоремы 1 и замечания следует, что для этого достаточно получить асимптотику решений $y_k(x,\lambda)$, $k=1,2$, и их производных, которые можно получить, используя асимптотические представления функций Эйри.

Пусть $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty-$ спектр оператора $H=H^0+V$. Доказана

Теорема 2. *Пусть* $V(x)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1^0. $V(x)\in L^2(\mathbf{R})$;

2^0. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)^\alpha|V(x)|^\beta dx<\infty$, *где* $\beta>2$, $\alpha>\beta-1$,

тогда при выполнении условия 1^0 *справедливо уравнение* (1), *а при выполнении условия* 2^0 *и при* $n\gg 1$ *имеет место*

$$\mu_n=\lambda_n+\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\lambda_n^{1/2}-\lambda_n^{-1/6}}V^+(x)\cos^2\left(Q(x,\lambda_n)-\frac{\pi}{4}\right)(\lambda_n-x^2)^{-1/2}dx+$$

$$+\frac{4}{3\lambda_n^{1/6}}\int\limits_{\lambda_n^{1/2}-\lambda_n^{-1/6}}^{\lambda_n^{1/2}+\lambda_n^{-1/6}}V^+(x)\left[\frac{1}{6^{1/3}\Gamma^2(\frac{4}{3})}-\frac{x^2-\lambda_n}{3\Gamma(\frac{4}{3})\Gamma(\frac{2}{3})\lambda_n^{1/3}}+\frac{(x^2-\lambda_n)^2}{6^{5/3}\Gamma^2(\frac{2}{3})\lambda_n^{2/3}}\right]dx-$$

$$
-\frac{4}{\pi}\int_0^{\sqrt{\lambda_n}/2}\frac{V^+(x)}{\sqrt{\lambda_n-x^2}}\cos^2\left(Q(x,\lambda_n)-\frac{\pi}{4}\right)\int_0^x\frac{V^+(t)}{\sqrt{\lambda_n-t^2}}\cos 2Q(t,\lambda_n)dt\,dx-
$$

$$
-\frac{4}{\pi}\int_0^{\sqrt{\lambda_n}/2}\frac{V^-(x)}{\sqrt{\lambda_n-x^2}}\cos^2\left(Q(x,\lambda_n)-\frac{\pi}{4}\right)\int_0^x\frac{V^-(t)}{\sqrt{\lambda_n-t^2}}\cos 2Q(t,\lambda_n)dt\,dx+
$$

$$
+\frac{1}{\pi}\int_{\lambda_n^{1/2}+\lambda_n^{-1/6}}^{\infty}\frac{V^+(x)e^{-2Q_1(x,\lambda_n)}}{\sqrt{x^2-\lambda_n}}dx-\frac{4}{\pi}\int_0^{\sqrt{\lambda_n}/2}\frac{V^+(x)}{\sqrt{\lambda_n-x^2}}\cos^2\left(Q(x,\lambda_n)-\frac{\pi}{4}\right)dx\times
$$

$$
\times\int_0^{\sqrt{\lambda_n}/2}V^+(t)(\lambda_n-t^2)^{-1/2}\cos 2Q(t,\lambda_n)\arccos\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}dt+O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right),
$$

где $\varepsilon=(\alpha+1-\beta)/(2\beta)$, $V^\pm(x)=(V(x)\pm V(-x))/2$, $\Gamma(x)$ *— гамма-функция Эйлера, функции* $Q(x,\lambda_n)$, $Q_1(x,\lambda_n)$ *определены выше.*

Литература

1. Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы.* – М.: Наука, 1970. – 672 с.
2. Муртазин Х.Х., Амангильдин Т.Г. *Асимптотика спектра оператора Штурма–Лиувилля* // Матем. сб. – 1979. – Т. 110. – № 1. – С. 135–149.
3. Олвер Ф. *Асимптотика и специальные функции.* – М.: Наука, 1990. – 528 с.
4. Ахмерова Э.Ф., Муртазин Х.Х. *Спектральная асимптотика для негладких возмущений дифференциальных операторов и формулы следов* // Докл. РАН. – 2003. – Т. 388. – № 6. – С. 731–733.

Башкирский государственный университет

Поступила 29.11.2006