И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2007 МАТЕМАТИКА № 4 (539)

УДК 517.52

А.П. АНТОНОВ

ГЛАДКОСТЬ СУММ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Введение

Статья посвящена изучению взаимосвязи поведения коэффициентов тригонометрических рядов многих переменных и гладкости сумм этих рядов в пространствах L_p.

Пусть m — размерность пространства, $T = [-\pi, \pi]$, и функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_m) \in L(T^m)$ всюду предполагается 2π-периодической по каждой переменной. Через

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{Z}^m} a_{\mathbf{n}}(f)e^{i\mathbf{nx}} = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{Z}^m} a_{\mathbf{n}}e^{i\mathbf{nx}}$$

будем обозначать кратный ряд Фурье функции $f(\mathbf{x})$, где $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $\mathbf{nx} = \sum\limits_{l=1}^{m} n_l x_l$.

Определение 1. Пусть функция $\omega(\delta)$ неубывающая, непрерывная на $[0,1]^m$, $\omega(\mathbf{0}) = 0$, $\omega(\delta+\nu) \le \omega(\delta) + \omega(\nu)$, при $0 \le |\delta| \le |\nu| \le |\delta| + |\nu| \le 1$. Тогда $\omega(\delta)$ называется *модулем непрерывности.*

Известна доказанная Харди и Литтлвудом

Теорема A.
а) *Если* $1 < p \le 2$ *и* $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$, *то*

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{Z}^m} |a_{\mathbf{n}}(f)|^p \prod_{j=1}^{m} (|n_j|+1)^{p-2} \le c(p,m)\|f\|_p^p.$$

б) *Если* $2 \le p < \infty$ *и числа* $\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbf{Z}^m}$ *таковы, что*

$$J_p(a) = \Big(\sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{Z}^m} |a_{\mathbf{n}}(f)|^p \prod_{j=1}^{m} (|n_j|+1)^{p-2}\Big)^{1/p} < \infty,$$

то найдется функция $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$ *такая, что для любого* $\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^m$

$$a_{\mathbf{n}}(f) = a_{\mathbf{n}} \quad \textit{и} \quad \|f\|_p \le c(p,m)J_p(a).$$

Для $m = 1$ доказательство этой теоремы можно найти в [1], а для $m > 1$ его можно получить применением индукции.

Кроме того, Харди и Литтлвуд заметили, что в одномерном случае для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{inx}$, где $a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge 0$, $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, справедлив и более точный результат ([1], § 9.5).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-01-00268) и программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ-4681.2006.1.

Позднее теорема A обобщалась в работах [2] (для коэффициентов, монотонных в смысле Харди), [3] (для коэффициентов, монотонных по каждому направлению), [4] (для анизотропного случая).

В связи с этим представляет интерес задача об описании классов $H_p^{\omega_1\ldots\omega_m}$ в метрике L_p в терминах коэффициентов их тригонометрических рядов Фурье.

Пусть Γ_m — множество всех m-мерных векторов из 0 и 1. Если $\gamma \in \Gamma_m$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, то $|\gamma| = \sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i$. Обозначим $\Delta_1(f, \mathbf{x}, \mathbf{h}) = \sum\limits_{\gamma \in \Gamma_m} (-1)^{|\gamma|} f(\mathbf{x} + \gamma\mathbf{h})$, где $\gamma\mathbf{h} = (\gamma_1 h_1, \ldots, \gamma_m h_m)$.

Определение 2. Пусть $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$, $p \in (1, \infty]$, где $L_\infty \equiv C$. *Смешанным модулем непрерывности* назовем

$$\omega_p(f, \delta_1, \ldots, \delta_m) = \sup_{|h_1| \le \delta_1, \ldots, |h_m| \le \delta_m} \|\Delta_1(f, \mathbf{x}, \mathbf{h})\|_p.$$

Определение 3. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Будем говорить, что $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$, $p \in (1, \infty]$, $\alpha_j \in (0, 1)$, $j = 1, \ldots, m$, если

$$\omega_p(f, \delta_1, \ldots, \delta_m) = O\Big(\prod_{j=1}^{m} h_j^{\alpha_j}\Big), \quad h_j \to 0+, \quad j = 1, \ldots, m.$$

При $p = \infty$ соответствующий класс будем обозначать $\mathrm{Lip}(\alpha)$.

Пусть $f(\mathbf{x}) \in L_p([0, \pi]^m)$, $m \ge 1$, $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_m)$ и $0 < \delta_i < \pi$ при $1 \le i \le m$. Обозначим

$$\|f\|_{\delta\, p} = \left(\int_{\delta_1}^{\pi} \cdots \int_{\delta_m}^{\pi} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}.$$

Определение 4. Последовательность комплексных чисел $\{\lambda_\mathbf{k}\}_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^m}$ назовем *обобщенно-монотонной*, если найдется такое число $c > 0$, что для любого $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m$ имеет место неравенство

$$|\lambda_\mathbf{k}| \le \frac{c}{|Q_\mathbf{k}|} \Big| \sum_{\mathbf{r} \in Q_\mathbf{k}} \lambda_\mathbf{r} \Big|,$$

где $Q_\mathbf{k} = \{\mathbf{r} \in \mathbf{Z}^m : 0 \le |r_j| \le |k_j|,\ j = 1, \ldots, m\}$.

Пусть $1 \le p \le \infty$ и заданы модули непрерывности $\omega_1(\delta_1), \ldots, \omega_m(\delta_m)$. Через $H_p^{\omega_1\ldots\omega_m}$ обозначим множество всех функций $f(\mathbf{t})$ таких, что $f(\mathbf{t}) \in L_p(T^m)$ и $\omega_p(f, \delta_1, \ldots, \delta_m) = O\Big(\prod\limits_{j=1}^{m} \omega_j(\delta_j)\Big)$.

В одномерном случае для монотонных коэффициентов Фурье известны следующие утверждения.

Теорема Б ([5]). *Если $f(x) = \sum a_n \cos nx$, где $a_n \downarrow 0$, то для того чтобы $f(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, необходимо и достаточно, чтобы $a_n = O(\frac{1}{n^{1+\alpha}})$.*

Теорема В ([6]). *Пусть $a_n \downarrow 0$. Тогда для того чтобы функция $f(x) = \sum a_n \cos nx$ принадлежала классу Липшица $\mathrm{Lip}(\alpha)$ в метрике L_p, $0 < \alpha < 1$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы $a_n = O(\frac{1}{n^{1+\alpha-1/p}})$.*

Для кратного случая возможны различные определения монотонности.

Определение 5. Будем говорить, что последовательность $a_{n_1,\ldots,n_m}$ *монотонна в смысле Харди*, если для любых $n_1, \ldots, n_m \ge 1$ верно неравенство

$$\sum_{j_1=0,\ldots,j_m=0}^{1} (-1)^{|\mathbf{j}|} a_{n_1+j_1,\ldots,n_m+j_m} \ge 0.$$

Определение 6. Будем говорить, что последовательность $a_{n_1,\dots,n_m}$ *монотонно убывает (возрастает) по каждому направлению*, если для любых $n_1,\dots,n_m \ge 1$ и для любых $j_1,\dots,j_m \ge 0$ верно неравенство

$$a_{n_1,\dots,n_m} \ge a_{n_1+j_1,\dots,n_m+j_m} \quad (a_{n_1+j_1,\dots,n_m+j_m} \ge a_{n_1,\dots,n_m}).$$

Очевидно, что если $a_{n_1,\dots,n_m} \to 0$ при $\max(n_1,\dots,n_m) \to \infty$, то из монотонности по Харди вытекает монотонность по каждому направлению.

Для двойных тригонометрических рядов с коэффициентами, монотонными в смысле Харди, аналоги теорем Б и В были полученны в [7] и [8].

Обобщим эти результаты на случай произвольной конечной размерности и коэффициентов, монотонных по каждому направлению.

1. Вспомогательные утверждения

Через $c(p,m)$ ниже будут обозначаться положительные постоянные, зависящие лишь от p и m (не обязательно равные между собой).

Лемма А ([3]). *Пусть* $Q(\mathbf{x}) = \sum\limits_{\mathbf{n}=1}^{\mathbf{M}} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}x}$, $a_{\mathbf{n}}$ *монотонны по каждому направлению*, $\|\mathbf{a}\|_\infty = \max\limits_{1\le\mathbf{n}\le\mathbf{M}} |a_{\mathbf{n}}|$. *Тогда для* $\frac{2m}{m+1} < p \le 2$ *и любого* $\delta \in (0,1]^m$

$$\|Q(\mathbf{x})\|_{\delta,p} \le c(p,m)\|\mathbf{a}\|_\infty (\Pi_1(\mathbf{M}))^{\frac{m-1}{2m}} (\Pi_1(\delta))^{\frac{1}{p}-\frac{m+1}{2m}},$$

где $\Pi_1(\mathbf{k}) = \prod\limits_{l=1}^{m} k_l$.

Лемма Б ([9]). *Если* $1 < p < \infty$, W_0 *— множество всех отрезков в* $\mathbf{N}^m$ *и коэффициенты Фурье функции* f ($\mathbf{a} = \{a_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{N}^m}$) *обобщенно-монотонны*, $f \in L_p[0,\pi]^m$, *то для коэффициентов Фурье верно неравенство*

$$\|f(\mathbf{x})\|_p \ge c(p,m)\left(\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=1}^{\infty} a_{\mathbf{k}}^p \prod_{j=1}^{m} k_j^{p-2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Лемма В. *Пусть* $Q(\mathbf{x}) = \sum\limits_{\mathbf{n}=1}^{\mathbf{M}} a_{\mathbf{n}} \Big(\prod\limits_{i=1}^{m} b_{n_i}\Big) e^{i\mathbf{n}x}$, *где последовательность* $a_{\mathbf{n}}$ *монотонно убывает по каждому направлению, а* $b_i = \{b_{n_i}\}_{n_i=1}^{m}$ *— монотонно возрастающие, неотрицательные, ограниченные последовательности*, $i = 1,\dots,m$, $p > \frac{2m}{m+1}$. *Тогда*

$$\|Q(\mathbf{x})\|_{\delta\, p} \le c(p,m)\|\mathbf{a}\|_\infty \prod_{i=1}^{m} \|b_i\|_\infty M_i^{\frac{m-1}{2m}} \delta_i^{\frac{1}{p}-\frac{m+1}{2m}}.$$

Доказательство. Применим преобразование Абеля к $Q(\mathbf{x})$ по первому индексу

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{n_1=1}^{M_1-1} (b_{n_1} - b_{n_1+1}) Q_{1\,n_1}(\mathbf{x}) + b_{M_1} \sum_{\mathbf{n}=1}^{\mathbf{M}} a_{\mathbf{n}} \prod_{i=2}^{m} b_{n_i} e^{i\mathbf{n}x},$$

где $Q_{1\,n_1}(\mathbf{x}) = \sum\limits_{k_1=1}^{n_1}\sum\limits_{n_2=1}^{M_2}\cdots\sum\limits_{n_m=1}^{M_m} a_{k_1,n_2,\dots,n_m} \prod\limits_{i=2}^{m} b_{n_i} e^{i(k_1x_1+n_2x_2+\dots+n_mx_m)}$. Тогда

$$\|Q(\mathbf{x})\|_{\delta\, p} \le \sum_{n_1=1}^{M_1-1} |b_{n_1} - b_{n_1+1}| \max_{n_1<M_1} \|Q_{1\,n_1}(\mathbf{x})\|_{\delta\, p} + b_{M_1}\|Q_{1\,M_1}(\mathbf{x})\|_{\delta\, p} \le 2b_{M_1} \max_{n_1\le M_1} \|Q_{1\,n_1}(\mathbf{x})\|_{\delta\, p}.$$

Последовательно применив преобразование Абеля по остальным индексам и используя лемму А, получим

$$\|Q(\mathbf{x})\|_{\delta\, p} \le c(p,m)\|\mathbf{a}\|_\infty \prod_{i=1}^{m} \|b_i\|_\infty M_i^{\frac{m-1}{2m}} \delta_i^{\frac{1}{p}-\frac{m+1}{2m}}. \quad \square$$

Теорема 1. *Пусть* $Q(\mathbf{x}) = \sum\limits_{\mathbf{n}=1}^{\mathbf{M}} a_{\mathbf{n}} \prod\limits_{i=1}^{m} b_{n_i} e^{i\mathbf{n}x}$, *где последовательность* $a_{\mathbf{n}}$ *монотонно убывает по каждому направлению, а* b_{n_i} — *монотонно возрастающие, неотрицательные, ограниченные последовательности,* $\frac{b_{2n_i}}{b_{n_i}} \le \mathrm{const}$, $i = 1, \dots, m$, $\frac{2m}{m+1} < p < 2$. *Тогда*

$$\|Q(\mathbf{x})\|_p \le c(p,m)\Big(\sum_{\mathbf{n}=1}^{\mathbf{M}} a_{\mathbf{n}}^p \prod_{i=1}^{m} b_{n_i}^p n_i^{p-2}\Big)^{1/p}.$$

Доказательство. Положим $Q(\mathbf{x}) = \sum\limits_{\mathbf{n}=1}^{\infty} a_{\mathbf{n}} \prod\limits_{i=1}^{m} b_{n_i} e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}}$, где $a_{\mathbf{n}} = 0$ при $\max(n_j - M_j) > 0$, $j = 1, \dots, m$.

Достаточно доказать требуемую оценку для $\Big(\int\limits_{[0,\pi)^m} |Q(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\Big)^{1/p}$, т. к. интегралы по остальным кубам оцениваются аналогично.

Обозначим $I = \int\limits_{[0,\pi)^m} |Q(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}$, для любого $\mathbf{n} \in \mathbf{Z}_+^m$ множество $B_{\mathbf{n}}$ есть декартово произведение $\prod\limits_{i=1}^{m} [\pi \cdot 2^{-n_i}, \pi \cdot 2^{1-n_i}]$.

Тогда

$$I = \sum_{\mathbf{n}=1}^{\infty} \int_{B_{\mathbf{n}}} |Q(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \le c(p,m) \sum_{\Lambda \subseteq \{1,\dots,m\}} \sum_{\mathbf{n}=1}^{\infty} \int_{B_{\mathbf{n}}} |Q_{\mathbf{n}\,\Lambda}(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x},$$

где $Q_{\mathbf{n}\,\Lambda}(\mathbf{x}) = \sum\limits_{\lambda=\nu}^{\nu'} a_\lambda \prod\limits_{s=1}^{m} b_{\lambda_s} e^{i\lambda x}$, и для $s = 1, \dots, m$

$$\nu_s = \nu_s(\mathbf{n}, \Lambda) = \begin{cases} 1 & \text{для } s \in \Lambda; \\ 2^{n_s} + 1 & \text{для } s \notin \Lambda, \end{cases} \qquad \nu'_s = \nu'_s(\mathbf{n}, \Lambda) = \begin{cases} 2^{n_s} & \text{для } s \in \Lambda; \\ \infty & \text{для } s \notin \Lambda. \end{cases}$$

Не ограничивая общности, будем полагать $\Lambda = \{1, \dots, k\}$, $k \le m$. Тогда если $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$, обозначим $\mathbf{y}(1,k) = (y_{k+1}, \dots, y_m)$ и $\mathbf{y}(2,k) = (y_1, \dots, y_k)$, если $k < m$ и $\Lambda \ne \emptyset$. Если же $\Lambda = \emptyset$, то полагаем $k = 0, n_1 + \dots + n_m = 0$. Для $k < m$ положим $B_{\mathbf{n}\,k} = \prod\limits_{j=k+1}^{m} [\pi \cdot 2^{-n_j}, \pi \cdot 2^{1-n_j}]$. Согласно введенным обозначениям имеем $\nu(1,k) = (2^{n_{k+1}} + 1, \dots, 2^{n_m} + 1)$ и $\nu'(2,k) = (2^{n_1}, \dots, 2^{n_k})$. При $k = m$ положим $\mathbf{y}(1,k) = 0$ и $\mathbf{y}(2,k) = (y_1, \dots, y_m)$.

При фиксированном $\mathbf{n}$, $k < m$, используя неравенство Гёльдера, получим оценку

$$\int_{B_{\mathbf{n}}} |Q_{\mathbf{n}\,\Lambda}(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \le \Big(\sum_{\lambda(2,k)=1}^{\nu'(2,k)} \prod_{s=1}^{k} b_{\lambda_s}^p \int_{B_{\mathbf{n}}} \Big|\sum_{\lambda(1,k)=\nu(1,k)}^{\infty} a_\lambda \prod_{r=k+1}^{m} b_{\lambda_r} e^{i\lambda(1,k)\mathbf{x}(1,k)}\Big|^p d\mathbf{x}\Big)\Big(\sum_{\lambda(2,k)=1}^{\nu'(2,k)} 1\Big)^{p-1} =$$

$$= \Big(\sum_{\lambda(2,k)=1}^{\nu'(2,k)} \prod_{s=1}^{k} b_{\lambda_s}^p \int_{B_{\mathbf{n}\,k}} \Big|\sum_{\lambda(1,k)=\nu(1,k)}^{\infty} a_\lambda \prod_{r=k+1}^{m} b_{\lambda_r} e^{i\lambda(1,k)\mathbf{x}(1,k)}\Big|^p d\mathbf{x}(1,k)\Big) \times$$

$$\times \pi^k 2^{-(n_1+\dots+n_k)} 2^{(n_1+\dots+n_k)(p-1)} = \pi^k 2^{(n_1+\dots+n_k)(p-2)} \sum_{\lambda(2,k)=1}^{\nu'(2,k)} \prod_{s=1}^{k} b_{\lambda_s}^p I_{\mathbf{n}\,\lambda(2,k)}.$$

Аналогично для $k = m$ получим оценку

$$\int_{B_{\mathbf{n}}} |Q_{\mathbf{n}\,\Lambda}(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \le \pi^m 2^{(n_1+\dots+n_m)(p-2)} \sum_{\lambda=1}^{(2^{n_1},\dots,2^{n_m})} a_\lambda^p \prod_{s=1}^{m} b_{\lambda_s}^p.$$

Положим $\alpha = \frac{1}{2}\big(\frac{m+1}{2m} - \frac{1}{p}\big)$, тогда $\frac{1}{p} - \frac{m+1}{2m} + \alpha < 0$.

Согласно обозначениям положим $a(\lambda,\mathbf{s},k)=a_{\lambda_1,\dots,\lambda_k,2^{s_{k+1}},\dots,2^{s_m}}$ при $\lambda,\mathbf{s}\in\mathbf{Z}^m\cap\mathbf{R}^m_+$. Тогда, пользуясь леммой B, для $k<m$ будем иметь

$$I^{1/p}_{\mathbf{n}\,\lambda(2,k)}\le\sum_{\mathbf{s}(1,k)=\mathbf{n}(1,k)}^{\infty}\left(\int_{B_{\mathbf{n}\,k}}\Bigg|\sum_{\lambda(1,k)=(2^{s_{k+1}}+1,\dots,2^{s_m}+1)}^{(2^{s_{k+1}+1},\dots,2^{s_m+1})}a_\lambda\prod_{r=k+1}^{m}b_{\lambda_r}e^{i\lambda(1,k)\mathbf{x}(1,k)}\Bigg|^p d\mathbf{x}(1,k)\right)^{1/p}\le$$

$$\le c(p,m)\sum_{\mathbf{s}(1,k)=\mathbf{n}(1,k)}^{\infty}a(\lambda,\mathbf{s},k)\prod_{r=k+1}^{m}b_{2^{s_r}}2^{(s_{k+1}+\dots+s_m)\frac{m-k-1}{2(m-k)}}\times$$

$$\times\,2^{-(n_{k+1}+\dots+n_m)(\frac{1}{p}-\frac{m-k+1}{2(m-k)})}=c(p,m)2^{-(n_{k+1}+\dots+n_m)(\frac{1}{p}-\frac{m-k+1}{2(m-k)})}\times$$

$$\times\sum_{\mathbf{s}(1,k)=\mathbf{n}(1,k)}^{\infty}a(\lambda,\mathbf{s},k)\prod_{r=k+1}^{m}b_{2^{s_r}}2^{(s_{k+1}+\dots+s_m)(\frac{m-k-1}{2(m-k)}+\alpha)}2^{-(s_{k+1}+\dots+s_m)\alpha}\le$$

$$\le c(p,m)2^{-(n_{k+1}+\dots+n_m)(\frac{1}{p}-\frac{m-k+1}{2(m-k)})}2^{-(n_{k+1}+\dots+n_m)\alpha}\times$$

$$\times\left(\sum_{\mathbf{s}(1,k)=\mathbf{n}(1,k)}^{\infty}(a(\lambda,\mathbf{s},k))^p\prod_{r=k+1}^{m}b^p_{2^{s_r}}2^{(s_{k+1}+\dots+s_m)\left(\frac{m-k-1}{2(m-k)}+\alpha\right)p}\right)^{1/p}.$$

Окончательно получим

$$\sum_{\mathbf{n}=1}^{\infty}\int_{B_\mathbf{n}}|Q_{\mathbf{n}\,\Lambda}(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\le c(p,m)\sum_{\mathbf{n}=1}^{\infty}\sum_{\lambda(2,k)=1}^{\nu'(2,k)}\prod_{l=1}^{k}b^p_{\lambda_l}\times$$

$$\times\left(\sum_{\mathbf{s}(1,k)=\mathbf{n}(1,k)}^{\infty}(a(\lambda,\mathbf{s},k))^p\prod_{r=k+1}^{m}b^p_{2^{s_r}}2^{(s_{k+1}+\dots+s_m)(\frac{m-k-1}{2(m-k)}+\alpha)p}\right)\times$$

$$\times\,2^{(n_1+\dots+n_k)(p-2)}2^{(n_{k+1}+\dots+n_m)(\frac{m-k+1}{2(m-k)}-\frac{1}{p}-\alpha)p}\le$$

$$\le c(p,m)\sum_{\mathbf{n}(2,k)=1}^{\infty}2^{(n_1+\dots+n_k)(p-2)}\sum_{\lambda(2,k)=1}^{\nu'(2,k)}\prod_{l=1}^{k}b^p_{\lambda_l}\sum_{\mathbf{s}(1,k)=1}^{\infty}(a(\lambda,\mathbf{s},k))^p\prod_{r=k+1}^{m}b^p_{2^{s_r}}\times$$

$$\times\,2^{(s_{k+1}+\ldots+s_m)(\frac{m-k+1}{2(m-k)}-\frac{1}{p}-\alpha)p}\cdot 2^{(s_{k+1}+\ldots+s_m)(\frac{m-k-1}{2(m-k)}+\alpha)p}=$$

$$=c(p,m)\sum_{\mathbf{n}(2,k)=1}^{\infty}2^{(n_1+\dots+n_k)(p-2)}\sum_{\lambda(2,k)=1}^{\nu'(2,k)}\prod_{l=1}^{k}b^p_{\lambda_l}\sum_{\mathbf{s}(1,k)=1}^{\infty}(a(\lambda,\mathbf{s},k))^p\prod_{r=k+1}^{m}b^p_{2^{s_r}}2^{(s_{k+1}+\dots+s_m)(p-1)}\le$$

$$\le c(p,m)\sum_{\lambda(2,k)=1}^{\nu'(2,k)}\prod_{l=1}^{k}b^p_{\lambda_l}\sum_{\mathbf{s}(1,k)=1}^{\infty}(a(\lambda,\mathbf{s},k))^p\times$$

$$\times\prod_{r=k+1}^{m}b^p_{2^{s_r}}2^{(s_{k+1}+\dots+s_m)(p-1)}\prod_{t=1}^{k}\lambda_t^{p-2}\le c(p,m)\sum_{\lambda=1}^{\infty}a^p_\lambda\prod_{l=1}^{m}b^p_{\lambda_l}\lambda_l^{p-2}.$$

Аналогично для $k=m$ получим оценку

$$\sum_{\mathbf{n}=1}^{\infty}\int_{B_\mathbf{n}}|Q_{\mathbf{n}\,\Lambda}(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\le c(p,m)\sum_{\mathbf{n}=1}^{\infty}2^{(n_1+\dots+n_m)(p-2)}\sum_{\lambda=1}^{(2^{n_1},\dots,2^{n_m})}a^p_\lambda\prod_{s=1}^{m}b^p_{\lambda_s}\le c(p,m)\sum_{\lambda=1}^{\infty}a^p_\lambda\prod_{s=1}^{m}b^p_{\lambda_s}\lambda_s^{p-2}.$$

Замечание 1. Из теоремы Харди–Литтлвуда следует, что оценка теоремы 1 остается справедливой и при $p\ge 2$.

Также из теоремы 1 вытекает

Следствие. Пусть $\frac{2m}{m+1} < p < 2$, $1 \le k \le m$, тригонометрический ряд имеет вид

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=1}^{\infty} \sum_{n_{k+1}=1}^{M_{k+1}} \cdots \sum_{n_m=1}^{M_m} a_{\mathbf{n}} \Big(\prod_{j=k}^{m} b_{n_j} \Big) e^{i\mathbf{n}x},$$

где коэффициенты $a_{\mathbf{n}}$ монотонно убывают по каждому направлению, b_{n_j} — монотонно возрастающие, неотрицательные, ограниченные последовательности, $\frac{b_{2n_j}}{b_{n_j}} \le \mathrm{const}$, $j = k, \ldots, m$, а также имеет место неравенство

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=1}^{\infty} \sum_{n_{k+1}=1}^{M_{k+1}} \cdots \sum_{n_m=1}^{M_m} a_{\mathbf{n}}^p \prod_{j=k}^{m} b_{n_j}^p (\Pi_1(\mathbf{n}))^{p-2} \le \infty.$$

Тогда ряд сходится по прямоугольникам к $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$ и

$$\|f(\mathbf{x})\|_p^p \le c(p,m) \sum_{n_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=1}^{\infty} \sum_{n_{k+1}=1}^{M_{k+1}} \cdots \sum_{n_m=1}^{M_m} a_{\mathbf{n}}^p \prod_{j=k}^{m} b_{n_j}^p (\Pi_1(\mathbf{n}))^{p-2}.$$

2. Ряды с монотонными коэффициентами из классов $H_p^{\omega_1 \ldots \omega_m}$

Теорема 2. *Пусть* $\sum\limits_{\mathbf{n}=1}^{\infty} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}x}$ *— ряд Фурье функции* $f(\mathbf{x}) \in L(T^m)$, $p > \frac{2m}{m+1}$, $\omega_i(\delta)$ *— модули непрерывности такие, что для всех* $i = 1, \ldots, m$

1) $\int\limits_0^{\delta} \frac{\omega_i(t)}{t} dt = O(\omega_i(\delta))$,

2) $\delta \int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{\omega_i(t)}{t^2} dt = O(\omega_i(\delta))$, *коэффициенты* $a_{\mathbf{n}}$ *монотонно убывают по каждому направлению. Для того чтобы* $f(\mathbf{x}) \in H_p^{\omega_1 \ldots \omega_m}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$a_{\mathbf{n}} = a_{n_1,\ldots,n_m} = O\Big(\frac{\omega_1(\frac{1}{n_1})}{n_1^{1-\frac{1}{p}}} \cdot \ldots \cdot \frac{\omega_m(\frac{1}{n_m})}{n_m^{1-\frac{1}{p}}} \Big).$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $a_{\mathbf{n}} = O\Big(\prod\limits_{s=1}^{m} \frac{\omega_s(\frac{1}{n_s})}{n_s^{1-\frac{1}{p}}} \Big)$.

Проверим вначале, что $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$. Имеем

$$\sum_{\mathbf{n}=1}^{\infty} a_{\mathbf{n}}^p \prod_{j=1}^{m} (n_j+1)^{p-2} \le c(f) \prod_{j=1}^{m} \sum_{n_j=1}^{\infty} \frac{\omega_j^p(\frac{1}{n_j})}{n_j} \le c(f) \prod_{j=1}^{m} \int_0^1 \frac{\omega_j^p(t_j)}{t_j} dt_j \le c(f) \prod_{j=1}^{m} \int_0^1 \frac{\omega_j(t_j)}{t_j} dt_j < \infty.$$

Используя теорему 3 из работы [3], получаем $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$.

Теперь покажем, что $f \in H_p^{\omega_1 \ldots \omega_m}$, т. е. что $\omega_p(f, h_1, \ldots, h_m) = O(\omega_1(h_1) \cdot \ldots \cdot \omega_m(h_m))$.

Заметим, что $\Delta_1(f, \mathbf{x}, \mathbf{h}) = \sum\limits_{\mathbf{n}=1}^{\infty} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}x} \prod\limits_{j=1}^{m} (e^{in_jh_j} - 1)$. Обозначим $\nu_j = [1/h_j]$, $j = 1, \ldots, m$.

Оценим $S' = \sum\limits_{n_1=1}^{\nu_1} \cdots \sum\limits_{n_m=1}^{\nu_m} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}x} \prod\limits_{j=1}^{m} (e^{in_jh_j} - 1)$. Заметим, что т. к. $\omega_j(\delta_j)$ — модуль непрерывности, то $\frac{\omega_j(\delta_j)}{\delta_j}$ почти убывает ([10], с. 116), а также $\mathrm{Re}(e^{in_jh_j} - 1) = \cos n_jh_j - 1$ и $\mathrm{Im}(e^{in_jh_j} - 1) = \sin n_jh_j$ при $1 \le n_j \le \nu_j$ являются монотонными последовательностями при $j = 1, \ldots, m$. Таким образом, по теореме 1

$$\begin{aligned}
\|S'\|_p^p &\le c(p,m)\sum_{n_1=1}^{\nu_1}\cdots\sum_{n_m=1}^{\nu_m} a_{\mathbf{n}}^p \prod_{j=1}^m |e^{in_jh_j}-1|^p n_j^{p-2} \le \\
&\le c(p,m)\sum_{n_1=1}^{\nu_1}\cdots\sum_{n_m=1}^{\nu_m}\prod_{j=1}^m \omega_j\left(\frac{1}{n_j}\right)^p n_j^{1-p}(n_jh_j)^p n_j^{p-2} \le \\
&\le c(p,m)\prod_{l=1}^m h_l^p \sum_{n_1=1}^{\nu_1}\cdots\sum_{n_m=1}^{\nu_m}\prod_{j=1}^m \omega_j\left(\frac{1}{n_j}\right)^p n_j^{p-1} \le \\
&\le c(p,m)\prod_{l=1}^m h_l^p\left(\omega_l\left(\frac{1}{\nu_l}\right)\nu_l\right)^{p-1}\sum_{n_1=1}^{\nu_1}\cdots\sum_{n_m=1}^{\nu_m}\prod_{j=1}^m \omega_j\left(\frac{1}{n_j}\right) \le \\
&\le c(p,m)\prod_{l=1}^m h_l^p\left(\omega_l\left(\frac{1}{\nu_l}\right)\nu_l\right)^{p-1}\prod_{j=1}^m\int_{\frac{1}{\nu_j}}^{\pi}\frac{\omega_j(t_j)}{t_j^2}dt_j \le \\
&\le c(p,m)\prod_{l=1}^m h_l^p\left(\omega_l\left(\frac{1}{\nu_l}\right)\nu_l\right)^{p-1}\prod_{j=1}^m \nu_j\omega_j\left(\frac{1}{\nu_j}\right) \le \\
&\le c(p,m)\prod_{l=1}^m h_l^p\left(\omega_l\left(\frac{1}{\nu_l}\right)\nu_l\right)^{p} = c(p,m)\prod_{l=1}^m(\omega_l(h_l))^p. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Теперь возьмем любое $k<m$ и оценим

$$S'' = \sum_{n_1=\nu_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=\nu_k+1}^{\infty}\sum_{n_{k+1}=1}^{\nu_{k+1}}\cdots\sum_{n_m=1}^{\nu_m} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}x}\prod_{j=1}^m (e^{in_jh_j}-1).$$

Сначала заметим, что

$$\begin{aligned}
S'' = \sum_{\gamma_1=0,\ldots,\gamma_k=0}^{1} S''_{\gamma_1,\ldots,\gamma_k} = \sum_{\gamma_1=0,\ldots,\gamma_k=0}^{1}\sum_{n_1=\nu_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=\nu_k+1}^{\infty}\sum_{n_{k+1}=1}^{\nu_{k+1}}\cdots\sum_{n_m=1}^{\nu_m}(-1)^{k-\gamma_1-\ldots-\gamma_k}a_{\mathbf{n}}\times \\
\times e^{i(n_1(x_1+\gamma_1h_1)+\cdots+n_k(x_k+\gamma_kh_k))}e^{i(n_{k+1}x_{k+1}+\cdots+n_mx_m)}\prod_{j=k+1}^m(e^{in_jh_j}-1).
\end{aligned}$$

Таким образом, при фиксированных $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$ достаточно оценить $S''_{\gamma_1,\ldots,\gamma_k}$. Имеем (см. следствие)

$$\begin{aligned}
\|S''_{\gamma_1,\ldots,\gamma_k}\|_p^p \le c(p,m)\Bigg\|\sum_{n_1=\nu_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=\nu_k+1}^{\infty}\sum_{n_{k+1}=1}^{\nu_{k+1}}\cdots\sum_{n_m=1}^{\nu_m}a_{\mathbf{n}}\times \\
\times\prod_{j=1}^k e^{i(n_j-\nu_j)x_j}\prod_{l=k+1}^m e^{in_lx_l}(e^{in_lh_l}-1)\Bigg\|_p^p \le c(p,m)\sum_{n_1=\nu_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=\nu_k+1}^{\infty}\sum_{n_{k+1}=1}^{\nu_{k+1}}\cdots\sum_{n_m=1}^{\nu_m}a_{\mathbf{n}}^p\times \\
\times\prod_{j=1}^k(n_j-\nu_j)^{p-2}\prod_{l=k+1}^m n_l^{p-2}|e^{in_lh_l}-1|^p \le c(p,m)\prod_{s=k+1}^m h_s^p\times \\
\times\sum_{n_1=\nu_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=\nu_k+1}^{\infty}\sum_{n_{k+1}=1}^{\nu_{k+1}}\cdots\sum_{n_m=1}^{\nu_m}\prod_{j=1}^k\left(\omega_j\left(\frac{1}{n_j}\right)\right)^p n_j^{1-p}(n_j-\nu_j)^{p-2}\times \\
\times\prod_{l=k+1}^m\left(\omega_l\left(\frac{1}{n_l}\right)\right)^p n_l^{p-1} \le c(p,m)\prod_{s=k+1}^m h_s^p\times
\end{aligned}$$

$$\times \prod_{j=1}^{k} \sum_{n_j=\nu_j+1}^{\infty} \left(\omega_j\left(\frac{1}{n_j}\right)\right)^p n_j^{1-p}(n_j-\nu_j)^{p-2} \prod_{l=k+1}^{m} \sum_{n_l=1}^{\nu_l} \left(\omega_l\left(\frac{1}{n_l}\right)\right)^p n_l^{p-1}.$$

Из оценок, полученых ранее для (1), при $l = k+1, \ldots, m$ следует

$$h_l^p \sum_{n_l=1}^{\nu_l} \omega_l\left(\frac{1}{n_l}\right)^p n_l^{p-1} \le c(p,m)\omega_l\left(\frac{1}{\nu_l}\right)^p.$$

Получим оценку для $\sum\limits_{n_j=\nu_j+1}^{\infty} \omega_j\big(\frac{1}{n_j}\big)^p n_j^{1-p}(n_j-\nu_j)^{p-2}$, $j = 1, \ldots, k$,

$$\sum_{n_j=\nu_j+1}^{\infty} \omega_j\left(\frac{1}{n_j}\right)^p n_j^{1-p}(n_j-\nu_j)^{p-2} = \left(\sum_{n_j=\nu_j+1}^{2\nu_j} + \sum_{n_j=2\nu_j+1}^{\infty}\right)\omega_j\left(\frac{1}{n_j}\right)^p n_j^{1-p}(n_j-\nu_j)^{p-2} \le$$

$$\le c(p,m)\left(\omega_j\left(\frac{1}{\nu_j}\right)^p + \sum_{n_j=2\nu_j+1}^{\infty} \frac{\omega_j\big(\frac{1}{n_j}\big)^p}{n_j}\right) \le$$

$$\le c(p,m)\left(\omega_j\left(\frac{1}{\nu_j}\right)^p + \omega_j\left(\frac{1}{2\nu_j+1}\right)^{p-1} \sum_{n_j=2\nu_j+1}^{\infty} \frac{\omega_j\big(\frac{1}{n_j}\big)}{n_j}\right) \le$$

$$\le c(p,m)\left(\omega_j\left(\frac{1}{\nu_j}\right)^p + \omega_j\left(\frac{1}{2\nu_j+1}\right)^{p-1} \int_0^{\frac{1}{2\nu_j+1}} \frac{\omega_j(u)}{u}du\right) \le$$

$$\le c(p,m)\left(\omega_j\left(\frac{1}{\nu_j}\right)^p + \omega_j\left(\frac{1}{2\nu_j+1}\right)^p\right) \le c(p,m)\left(\omega_j\left(\frac{1}{\nu_j}\right)^p + \omega_j\left(\frac{1}{\nu_j}\right)^p\right) \le c(p,m)\omega_j\left(\frac{1}{\nu_j}\right)^p.$$

Окончательно имеем оценку

$$\omega_p(f,\mathbf{h}) \le c(p,m)\omega_1(h_1)\cdot\ldots\cdot\omega_m(h_m).$$

Необходимость. Для фиксированного $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ положим $h_i = [\frac{1}{n_i}]$, $i = 1, \ldots, m$. Обозначим

$$P_{\mathbf{n}}(f;\mathbf{x},\mathbf{h}) = \frac{1}{2^m i}\sum_{\gamma\in\Gamma_m}(-1)^{|\gamma|}S_{\mathbf{n}}(f;(\mathbf{x}+2(\gamma-1/2)\mathbf{h})) = \sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{n}}\lambda_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}x},$$

$$\lambda_{\mathbf{k}} = \begin{cases} a_{\mathbf{k}}\prod\limits_{j=1}^{m}\sin k_j h_j & \text{при } 1 \le k_j \le n_j,\ j = 1, \ldots, m; \\ 0 & \text{при } \max\big(\frac{k_1}{n_1}, \ldots, \frac{k_m}{n_m}\big) > 1. \end{cases}$$

Используя теорему Рисса и линейность $S_{\mathbf{n}}(f;\mathbf{t})$, получим

$$\|P_{\mathbf{n}}(f;\mathbf{x},\mathbf{h})\|_p = \frac{1}{2^m}\|S_n(\Delta_1(f,\mathbf{x}-h,2\mathbf{h}))\|_p \le c(p,m)\|\Delta_1(f,\mathbf{x},2\mathbf{h})\|_p \le c(p,m)\prod_{j=1}^{m}\omega_j(h_j). \quad (2)$$

Покажем, что последовательность $\{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}=1}^{\infty}$ является обобщенно-монотонной. Если существует $j = 1, \ldots, m$ такое, что $k_j > n_j$, то требуемое неравенство очевидно. Пусть для любого $j = 1, \ldots, m$ верно $1 \le k_j \le n_j$. Тогда

$$\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{m}k_j}\left|\sum_{\mathbf{r}=1}^{\mathbf{k}}\lambda_{\mathbf{r}}\right| \ge \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{m}k_j}\sum_{\mathbf{r}=1}^{\mathbf{k}}a_{\mathbf{r}}\prod_{j=1}^{m}\sin r_j h_j \ge c\frac{a_{\mathbf{k}}}{\prod\limits_{j=1}^{m}k_j}\sum_{\mathbf{r}=1}^{\mathbf{k}}\prod_{j=1}^{m}r_j h_j \ge$$

$$\ge c\frac{a_{\mathbf{k}}}{\prod\limits_{j=1}^{m}k_j}\prod_{j=1}^{m}k_j^2 h_j \ge c a_{\mathbf{k}}\prod_{j=1}^{m}\sin k_j h_j = c|\lambda_{\mathbf{k}}|, \quad \text{что и требовалось.}$$

Теперь можно применить лемму Б. Получим

$$\|P_{\mathbf{n}}(f;\mathbf{x},\mathbf{h})\|_p \geq c(p,m)\Bigg(\sum_{k_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{k_m=1}^{n_m} a_{\mathbf{k}}^p \prod_{l=1}^{m} |\sin k_l h_l|^p k_l^{p-2}\Bigg)^{1/p} \geq$$

$$\geq c(p,m)\Bigg(\sum_{k_1=[n_1/2]}^{n_1}\cdots\sum_{k_m=[n_m/2]}^{n_m} a_{\mathbf{k}}^p \prod_{l=1}^{m} |\sin k_l h_l|^p k_l^{p-2}\Bigg)^{1/p} \geq$$

$$\geq c(p,m)\Bigg(a_{\mathbf{n}}^p \prod_{l=1}^{m}\bigg(\Big[\frac{n_l}{2}\Big]h_l\bigg)^p n_l^{p-2}\frac{n_l}{2}\Bigg)^{1/p} \geq c(p,m)\Bigg(a_{\mathbf{n}}^p \prod_{l=1}^{m} n_l^{p-1}\Bigg)^{1/p} = c(p,m)a_{\mathbf{n}}\prod_{l=1}^{m} n_l^{1-1/p}.$$

Отсюда и из (2) получаем требуемую оценку

$$a_{\mathbf{n}} \leq c(p,m)\prod_{l=1}^{m}\omega_l(h_l)n_l^{1/p-1} \leq c(p,m)\prod_{l=1}^{m}\omega_l\Big(\frac{1}{n_l}\Big)n_l^{1/p-1}. \quad \square$$

Замечание 2. Если $\omega(\delta)=\delta^\alpha$ при $0\leq\delta\leq 1$, $0<\alpha<1$, то теорема 2 сводится к следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть* $\sum\limits_{\mathbf{n}=1}^{\infty} a_{\mathbf{n}}e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}}$ *— ряд Фурье функции* $f(\mathbf{x})\in L(T^m)$, $p>\frac{2m}{m+1}$, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, $0<\alpha_i<1$, $i=1,\ldots,m$, *коэффициенты* $a_{\mathbf{n}}$ *монотонно убывают по каждому направлению. Для того чтобы* $f(\mathbf{x})\in \mathrm{Lip}(\alpha,p)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$a_{\mathbf{n}}=a_{n_1,\ldots,n_m}=O\Big(n_1^{\frac{1}{p}-1-\alpha_1}\cdot\ldots\cdot n_m^{\frac{1}{p}-1-\alpha_m}\Big).$$

Литература

1. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т. 2. – М.: Мир, 1965. – 537 с.
2. Moricz F. *On double cosine, sine and Walsh series with monotone coefficients* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1990. – V. 109. – № 2. – P. 417–435.
3. Дьяченко М.И. *Нормы ядер Дирихле и некоторых других тригонометрических полиномов в пространствах L_p* // Матем. сб. – 1993. – Т. 184. – № 3. – С. 3–20.
4. Драгошанский О.С. *Анизотропные нормы ядер Дирихле и некоторые другие нормы тригонометрических полиномов* // Матем. заметки. – 2000. – Т. 67. – № 5. – С. 686–701.
5. Lorentz G.G. *Fourier-Koeffizienten und Funktionenklassen* // Math. Z. – 1948. – Bd. 51. – H. 2. – S. 135–149.
6. Конюшков А.А. *О классах Липшица* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1957. – Т. 21. – № 3. – С. 423–448.
7. Тевзадзе Т.Ш. *О некоторых классах функций и тригонометрических рядах Фурье* // Сообщ. АН ГрузССР. – 1982. – Т. 105. – № 2. – С. 253–256.
8. Вуколова Т.М., Дьяченко М.И. *Оценки норм сумм двойных тригонометрических рядов с кратно монотонными коэффициентами* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 7. – С. 20–28.
9. Нурсултанов Е.Д. *О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p пространств* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2000. – Т. 64. – № 1. – С. 95–122.
10. Тиман А.Ф. *Теория приближений функций действительного переменного.* – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

Московский государственный университет

Поступила 27.09.2005