Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Казанский (Приволжский) Федеральный Университет»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

КАФЕДРА АЭРОГИДРОМЕХАНИКИ

Направление: 010900.68 – механика и математическое моделирование

Специализация: механика жидкости, газа и плазмы

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(бакалаврская работа)

ТЕМА

Задача одномерного уплотнения бентонитовой пасты

Работа завершена:

"___"_____ 2014 г. _____ (Р.Р. Мухарлямов)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель,
доктор ф.–м. наук, профессор

"___"_____ 2014 г. _____ (А.Г. Егоров)

Заведующий кафедрой,
доктор ф.–м. наук, профессор

"___"_____ 2014 г. _____ (А.Г.Егоров)

Казань – 2014.

Оглавление.

Введение ……. 3

Реологические свойства бентонита …….. 4

Физическая постановка задачи одномерного уплотнения …….. 8

Математическая постановка задачи ……... 10

Численное решение задачи …… 17

Выводы …….. 23

Приложение …….. 24

Список литературы ……. 28

Введение.

Бентонит - это природный глинистый минерал, обладающий свойством разбухать при взаимодействии с жидкостями (гидратация) до 14-16 раз. Имеет свойство при взаимодействии с водой, в ограниченном для разбухания пространстве, образовывать плотную гелиевую массу, это препятствует проникновению жидкости. Также обладает свойством нетоксичности и имеет химическую стойкостьс

Эти и другие свойства бентонита находят широкое применение в мире. Для улучшения технологических свойств бентонита их активируют. Активацию бентонита различают на "сухую" и "мокрую". Под "мокрой" подразумевают, приготовление смеси из бентонита, воды и соды, и последующую высушку и размельчение. "Сухая" активация бентонита происходит путем простого механического смешения соды и бентонита.

- В пищевой промышленности его применяют в качестве добавки препятствующей комкованию и слеживанию.

- Его используют при приготовлении бурового раствора.

- В местах возможного разлива горючих жидкостей.

- При изготовлении почвенных удобрений.

- В виноделии для ускорения скорости осветления сусла.

Но самым основным, в рамках данной работы, применением будет использование бентонита в гидростроительстве для экранировки каналов, в процессе борьбы с фильтрацией. А именно, будет поставлена и решена задача одномерного уплотнения бентонитовой пасты.

Глава I.

Реологические свойства бентонита.

Бентонитовая паста широко используется в разных отраслях промышленности: при бурении скважин, при строительстве ГНБ, в построении полигонов для радиоактивных, химических и бытовых отходов, а также в нефтехимии.

Вплоть до недавнего времени при моделировании поведения бентонитовых паст предполагалось, что материал можно рассматривать как однородный и гомогенный. Однако начиная с работы Covey и Stanmore *[1]* стало ясно, что жидкость в пределах пасты может двигаться относительно твердых частиц, и такого сорта фильтрационное движение теперь хорошо зарегистрировано *[2-4]*. Оценки порядка величины фильтрационных потоков, сделанные в *[5]* для процесса консолидации бентонитовой пасты на фильтре, показали, что движение жидкости относительно твердых частиц относительно невелико из-за низкой проницаемости уплотненной пасты, но это не обязательно так для более проницаемых паст. В *[6]* в частности отмечается, что именно фильтрация ответственна за наблюдаемое в экспериментах изменение однородности образца, помещенного в реометр с параллельными стенками. Причина изменения пористости здесь связывается с различной степени отжима жидкости вдоль образца.

Любая модель, которая различает жидкую и твердую фазы материала по необходимости более сложна, чем та, которая рассматривает материал как гомогенный. Такого сорта модели опираются на концепцию Герцаги эффективных напряжений и восходят к пионерским работам Френкеля и Био. В настоящее время о таких моделях говорят как о моделях фильтрационной консолидации. Оригинальная теория Фрепкеля-Био поро-упругих материалов *[7,8]* имеет дело лишь с малыми упругими деформациями пористой матрицы. Непосредственной реакцией на напряжения σ является упругая деформация матрицы и повышение порового давления, вызывающего фильтрационные перетоки. Однако характерной особенностью процессов деформирования паст является то, что деформации обычно не являются малыми, поэтому непосредственное использование теории Био оказывается невозможным. Необходимо использовать более сложные нелинейные реологические соотношения.

При записи реологических соотношений полные напряжения а в пасте представляется как сумма изотропного давления p в жидкости и эффективных напряжений в пористой матрице. Разделяя последние на изотропную компоненту $-\psi I$ и девиатор S, имеем:

$$\boldsymbol{\sigma} = -\boldsymbol{p}\boldsymbol{l} - \boldsymbol{\psi}\boldsymbol{l} + \boldsymbol{s} \quad (1.1)$$

Матрица принимается нелинейно упругой, так, что эффективные напряжения, является функцией доли ϕ объема твердых частиц в пасте

$$\phi = \frac{\text{объем твердых частиц}}{\text{объем твердых частиц+объем жидкости}}$$

Вместо доли ϕ часто используют отношение e объема, занятого

жидкостью к объему твердых частиц. Эти две величины связаны между собой соотношениями:

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+e}} \qquad (1.2)$$

$$\boldsymbol{e} = \frac{\mathbf{1-\phi}}{\boldsymbol{\phi}} \qquad (1.3)$$

Таким образом $\psi = \psi(e)$. Важно подчеркнуть, что сдвиговые напряжения *в* пастах как правило много меньше чем $\psi(e)$ поэтому девиатором S в (1.1) обычно пренебрегают. Сжимаемость жидкости и твердых частиц также мала по сравнению со сжимаемостью самой матрицы твердых частиц, ими также пренебрегается. Таким образом, важнейшей реологической характеристикой паст является зависимость $\psi(e)$, которая предполагается не зависящей от истории напряжений, которым паста была подвергнута. Из общих соображений ясно, что $\psi > 0$, $\psi(e)$ монотонно уменьшается с ростом e, и $\psi(e) \to 0$ при бесконечном разбавлении пасты, т.е.

при $e \to \infty$ Принятое реологическое соотношение описывает уплотнение суспензии коллоидных частиц с дальним взаимодействием (н-р электростатическим), или броуновских частиц с напряжениями осмотической природы, но никак не уплотнение суспензии неброуновских твердых сфер, для которых y = 0 при низких e, когда твердые частицы не взаимодействуют друг с другом.

Жидкий поток, движущийся со скоростью фильтрации U_{rel} относительно твердых частиц описывается законом Дарси:

$$\boldsymbol{U_{rel} = -\frac{k(e)}{\mu}\nabla p}$$

где $\boldsymbol{\mu}$ – вязкость фильтрата, а $\boldsymbol{k(e)}$- проницаемость пасты, принимаемая изотропной. Зависимость ***k(e)*** является еще одной реологической зависимостью, необходимой для описания поведения бентонитовых паст при их уплотнении. Из физических соображений ясно, что с ростом объема $\boldsymbol{e}$ занятого жидкостью величина $\boldsymbol{k}$ будет монотонно возрастать, стремясь к бесконечности при $e \to \infty$.

Обратимся к экспериментальным данным по определению зависимостей ***ψ(e)*** и ***k(e).*** Широко используемой зависимостью эффективного давления $\boldsymbol{\psi}$ в матрице от относительного объема жидкости $\boldsymbol{e}$ является зависимость вида :

$$\boldsymbol{e = e_\infty + \left(\frac{p_1}{\psi}\right)^\alpha}$$

Она и другие эмпирические зависимости такого сорта обсуждаются в *[10]*. Все они не имеют твердого теоретического базиса. В особой степени это относится к случаю очень густых паст, когда $\psi \to \infty$. Отмечается, однако, что во многих ситуациях величина $\boldsymbol{e_\infty}$ мала по сравнению с реально достигаемым в течении процесса консолидации уплотнением пасты. При этом величиной $\boldsymbol{e_\infty}$ пренебрегают и записывают реологическое соотношение как:

$$\psi = p_1 e^{-1/\alpha} \qquad (1.4)$$

Типичные значения параметров, согласно *[9]* равны p_1= 1.7*10^6 Па, α= 0.48, при том, что соотношение (1.4) справедливо в диапазоне 0.8 <e <9 (0.1 <ϕ<0.56). Именно такие значения параметров будут использоваться в дальнейших численных расчетах.

Что касается зависимости проницаемости $\boldsymbol{k}$ от относительного объема жидкости $\boldsymbol{e}$, то вместо нее в экспериментах обычно измеряют так называемую диффузивность, *D(e),* связанную с $\boldsymbol{k}$ соотношением:

$$D(e)=\frac{\mathbf{k(e)}}{\boldsymbol{\mu}\mathbf{(1+e)}}\frac{\mathbf{d\psi}}{\mathbf{de}} \qquad (1.5)$$

Согласно *[12]* зависимость *D(e)* может быть аппроксимирована выражением:

$$D = \boldsymbol{D_0 e^{-\beta}} \qquad (1.6)$$

с D_0 = 1.8*10^{-10} м$^2/c$, β = 1.92. Обратим внимание, что (1.6) подразумевает, что $D \to \infty$ при $e \to \infty$, из-за того, что с уменьшением e модуль $|d\psi/de|$ увеличился быстрее, чем уменьшается проницаемость $\boldsymbol{k}$. Комбинация уравнений (1.5) и (1.6) дает

$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{D_0 \mu \alpha}}{\boldsymbol{p_1}}(\mathbf{1}-\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}^{(\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta})+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}}} \qquad (1.7)$$

предсказывая таким образом практически линейную (1- β + α^{-1}= 1.1) зависимость ***к(е)*** при малых e. Укажем также, что согласно (1.7) проницаемость пасты изменяется от 7*10^{-20} м^2 до 6*10^{-18} м^2 (миллионные доли дарси!) в диапазоне 0,8 < e < 9.

Глава II.

Одномерное уплотнение бентонитовой пасты.

2.1 Физическая постановка задачи.

Важным элементом различных технологических процессов является одномерное уплотнение бентонитовой пасты под действием внешней нагрузки. Одномерное уплотнение используется также в лабораторных экспериментах по определению реологических свойств пасты. Схема соответствующего опыта представлена на рис. 1. Вертикальная колонка заполняется бентонитовой суспензией с небольшой концентрацией твердых частиц ϕ_0 и следовательно с большим отношением :

$$\boldsymbol{e_0 = (1 - \phi_0)/\phi_0}$$

В нижней части колонки размещается фильтр, проницаемый для жидкости, но непроницаемый для частиц бентонита. Сверху устанавливается непроницаемый поршень, к которому прикладывается внешняя нагрузка. Величину внешней нагрузки, приходящейся на единицу площади поршня будем обозначать через П. Под действием этой нагрузки поршень перемещается вниз, жидкость отжимается из колонки, а на фильтре формируется осадок, плотность e_1 которого определяется величиной внешней нагрузки.

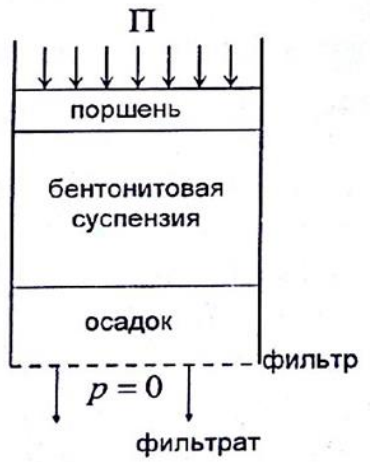

Рис.1.

Схема одномерного процесса уплотнения бентонитовой пасты.

В пренебрежением трением о боковые стенки полные вертикальные напряжения в каждом сечении колонки одинаковы и совпадают с П. На самом фильтре давление жидкости равно атмосферному давлению (принимаемому в дальнейшем за нуль). Поэтому, согласно (1.1) эффективные напряжения ψ в матрице совпадают с П, а величина e_1 определяется соотношением П = ψ(e1). Вне слоя осадка эффективные напряжения малы и всю внешнюю нагрузку П принимает на себя жидкость. Именно под действием возникающего (≈П) перепада давлений в жидкости и происходит фильтрация флюида через слой осадка. С течением времени осадок накапливается и в конечном итоге между поршнем и фильтром образуется однородный слой бентонитовой пасты. Отношение объемов жидкой и твердой фазы в этом слое равно e1 , внешнюю нагрузку принимает на себя матрица твердых частиц, а давление жидкости всюду равно атмосферному. Описанная схема процесса предполагает, что внешняя нагрузка достаточно велика, так, что гравитационными силами, а значит и гравитационной сегрегацией пасты, можно пренебречь.

2.2 Математическая постановка задачи.

2.2.1. Эйлерова постановка.

Исходная система уравнений фильтрационной консолидации включает в себя уравнения сохранения массы твердой и жидкой фазы

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{t}} + \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{t}}(\boldsymbol{\phi U_s}) = \mathbf{0} \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{1}-\boldsymbol{\phi})}{\partial \boldsymbol{t}} + \frac{\partial((\mathbf{1}-\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{U_e})}{\partial \boldsymbol{t}} = \mathbf{0} \qquad (2.2)$$

Закон фильтрации:

$$(\mathbf{1}-\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{U_e}-\boldsymbol{U_s}) = -\frac{\boldsymbol{k(e)}}{\boldsymbol{\mu}}\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{y}} \qquad (2.3)$$

Уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0} \qquad (2.4)$$

и реологическое соотношение

$$\boldsymbol{\sigma} = -\boldsymbol{p} - \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{e}) \qquad (2.5)$$

между напряжением $\boldsymbol{\sigma}$ и отношением $\boldsymbol{e}$ объемов занимаемых жидкой и твердой фазой. При записи уравнения равновесия пренебрегли трением пасты о боковые стенки сосуда, под $\boldsymbol{\sigma}$ понимается величина $\boldsymbol{\sigma}_{yy}$.

Заметим что из уравнения (2.4) и постоянства прикладываемой к поршню нагрузки П следует, что $\boldsymbol{\sigma} = -\Pi$. Поэтому вместо (2.4) и (2.5) можно использовать соотношение:

$$\boldsymbol{p} + \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{e}) = \Pi \qquad (2.6)$$

Его дифференцирование по $\boldsymbol{y}$ последующей постановкой в (2.3) дает

$$(\mathbf{1}-\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{u_e}-\boldsymbol{u_s})=\frac{\boldsymbol{k(e)}}{\mu}\frac{\boldsymbol{\partial\psi}}{\boldsymbol{\partial e}}\frac{\boldsymbol{\partial e}}{\boldsymbol{\partial y}}=-\boldsymbol{D(e)}(\mathbf{1}+\boldsymbol{e})\frac{\boldsymbol{\partial e}}{\boldsymbol{\partial y}} \qquad (2.6)$$

Через *D* обозначена диффузивность

$$\boldsymbol{D(e)}=-\frac{\boldsymbol{k(e)}}{\mu(\mathbf{1}+\boldsymbol{e})}\frac{\boldsymbol{d\psi}}{\boldsymbol{de}}$$

Складывая далее (2.1) и (2.2) получим суммарное уравнение баланса массы

$$\frac{\boldsymbol{\partial(\phi u_s+(1-\phi)u_e)}}{\boldsymbol{\partial y}}=\mathbf{0}$$

Интегрируя его и учитывая, что скорости $\boldsymbol{u_s}$, $\boldsymbol{u_e}$ фаз на поршне совпадают со скоростью ***V(t)*** движения поршня имеем

$$\boldsymbol{\phi u_s}+(\mathbf{1}-\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{u_e}=\boldsymbol{V(t)}$$

Исключая из (2.6) и (2.7) скорость движения жидкой фазы найдем

$$\boldsymbol{u_s}=\boldsymbol{V(t)}+\boldsymbol{D(e)}(\mathbf{1}+\boldsymbol{e})\frac{\boldsymbol{\partial e}}{\boldsymbol{\partial y}}$$

Подставляя это выражение в (2.1), получаем

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(\phi V + \phi(1+e)D(e)\frac{\partial e}{\partial y})}{\partial y} = 0$$

Учитывая, наконец, связь между ϕ и e

$$\phi = \frac{1}{(1+e)}$$

придем к уравнению относительно отношения e объемов занимаемых данной макроточке среды жидкой и твердой фазы

$$-\frac{1}{(1-e)^2}\frac{\partial e}{\partial t} - V\frac{1}{(1-e)^2}\frac{\partial e}{\partial y} + \frac{\partial D(e)}{\partial y}\frac{\partial e}{\partial y} = 0$$

или, что то же самое,

$$\frac{\partial e}{\partial t} + V\frac{\partial e}{\partial y} - (1+e)^2\frac{\partial D(e)}{\partial y}\frac{\partial e}{\partial y} = 0 \qquad (2.8)$$

Данное нелинейное конвективно-диффузионное уравнение работает в области $0<y<L(t)$ с подлежащей нахождению в ходе решения задачи верхней границей $L(t)$, отвечающей положению поршня. По определению $V = L$. Начальное положение поршень $L(0) = L_0$ считается заданным. Кроме того, в начальный момент времени известно распределение твердой и жидкой фазы в пласте. Принимая его однородным, запишем

$$t = 0; \quad e = e_0; \quad L = L_0. \qquad (2.9)$$

Граничное условие на нижней границе является следствием соотношения (2.6) и требования равенства на ней давления атмосферному. Принимая последнее за нуль, имеем

$$y = 0: \quad e = e_1 = \psi^{-1}(\Pi) \qquad (2.10)$$

На верхней границе $\boldsymbol{u_s = u_e = V}$. Поэтому в силу (2.3)

$$\boldsymbol{y = L(t)}: \quad \boldsymbol{D(e)\frac{\partial e}{\partial y} = 0} \qquad (2.11)$$

Еще одно условие, интегрального вида, для нахождения неизвестной подвижной границы получаем интегрированием уравнение (2.1) по расчетной области

$$\boldsymbol{\int_0^{L(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} dy + \phi u_s|_{y=L\{t\}} - \phi u_s\,|_{y=0} = 0}$$

Преобразуем полученное соотношение к виду

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\int_0^{L(t)} \phi dy - L\phi|_{y=L} - \phi u_s|_{y=L} - \phi u_s|_{y=0} = 0}$$

и учтем, что а) $\boldsymbol{u_s = 0}$ в силу непроницаемости для твердой части нижней границы б) $\boldsymbol{u_s = V = L}$ на поршне. В результате получим

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\int_0^{L(t)} \frac{dy}{1+e} = 0}$$

После интегрирования найдем окончательно

$$\boldsymbol{\int_0^{L(t)} \frac{dy}{1+e} = \frac{L_0}{1+e_0}} \qquad (2.12)$$

Уравнение (2.8) с начальным и граничными уравнениями (2.9) - (2.12) служит для нахождения поля $e(y,t)$ и положения L(t) верхней границы. Будем говорить о системе (2.8) - (2.12) как о задаче консолидации пасты в эйлеровой постановке.

2.2.2. Лагранжева постановка.

Полученная эйлерова постановка задачи об уплотнении пасты достаточно сложна. Это связано, во-первых, с тем, что в ходе решения задачи необходимо отслеживать положение неизвестной подвижной границы (движущегося поршня). Во-вторых, основное уравнение (2.8) есть уравнение конвекции - диффузии. Его численное решение при доминировании конвекции представляет определенные технические трудности.

Обеих сложностей удается избежать при переходе от эйлерова к лагранжеву описанию процесса. Для этого вместо эйлеровой координаты y вводится лагранжева координата

$$\boldsymbol{\xi = \int_0^y \phi(y',t)dy' = \int_0^y \frac{dy'}{1+e(y',t)}}.$$

Перейдем в уравнении (2.1) к новым координатам t,ξ . Преобразуя первое слагаемое в (2.1), получим

$$\boldsymbol{\frac{\partial\phi(t,y)}{\partial t} = \frac{\partial\phi(t,\xi)}{\partial t} + \frac{\partial\phi(t,\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\int_0^y \frac{\partial\phi(y',t)}{\partial t}dy' =}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\int_0^y \frac{\partial}{\partial y'}(\phi u_s)dy' = \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\phi u_s.}$$

Преобразование второго слагаемого в (2.1) дает

$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial y}(\phi u_s) = \frac{\partial\phi u_s}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} = \phi\frac{\partial}{\partial\xi}(\phi u_s)}$$

Объединяя полученные выражения, получим, что

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi^2 \frac{\partial u_s}{\partial \xi} = 0 \qquad (2.13)$$

Учитывая, наконец, что

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(1+e)^{-1} = -(1+e)^{-2}\frac{\partial e}{\partial t} = -\phi^2 \frac{\partial e}{\partial t}$$

преобразуем (2.13) к виду

$$\frac{\partial e}{\partial t} - \frac{\partial u_s}{\partial \xi} = 0 \qquad (2.14)$$

Учитывая, что

$$u_s = V - \frac{k}{\mu}\frac{\partial \psi}{\partial y} = V - \frac{k}{\mu}\frac{\partial \psi}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} = V - \frac{k}{\mu}\frac{\partial \psi}{\partial e}\frac{1}{1+e}\frac{\partial e}{\partial \xi} = V(t) + D(e)\frac{\partial e}{\partial \xi}$$

имеем окончательно

$$\frac{\partial e}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \xi} D(e)\frac{\partial e}{\partial \xi} = 0 \qquad (2.15)$$

Нелинейное диффузионное уравнение (2.15) является искомым уравнением уплотнения пасты в лагранжевых координатах. В силу определения ξ и соотношения (2.12) это уравнение работает в фиксированной области

$$\mathbf{0} < \boldsymbol{\xi} < \boldsymbol{\xi_0} = \boldsymbol{L_0}/(\mathbf{1} + \boldsymbol{e_0})$$

Начальное и граничное условие для него имеют вид

$$\boldsymbol{t} = \mathbf{0}: \quad \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e_0} \qquad (2.16)$$

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi_0}: \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \mathbf{0} \qquad (2.17)$$

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}: \quad \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e_1} \qquad (2.18)$$

При решении задачи (2.15)-(2.18), если не оговорено противного, функции $D(e)$ и $\psi(e)$ будут задаваться согласно (1.4), (1.6) с указанными в главе I значениями параметров D_0, p_1, β, α. При этом, в силу (2.10)

$$e_1 = \left(\frac{p_1}{\Pi}\right)^{\alpha}$$

2.3 Численное решение задачи

Перейдем к безразмерным переменным, нормировав $\boldsymbol{e}$ на $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{c}$– на $\boldsymbol{\xi_0 = L_0/(1+e_0)}$, а время $\boldsymbol{t}$ – на $\boldsymbol{t_0 = \xi_0^2 D_0^{-1} e_1^{\beta}}$:

$$\boldsymbol{u = \frac{e}{e_1}, \quad x = \frac{\xi}{\xi_0}, \quad \tau = \frac{tD_0}{\xi_0^2 e_1^{\beta}}}$$

При этом исходная задача (1.15) – (2.18) преобразуется к виду

$$\frac{\partial г}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} u^{-\beta} \frac{\partial u}{\partial x} \qquad 0 < x < 1, \tau > 0, \qquad (2.19)$$

$$x = 0: \quad u = 1 \qquad (2.20)$$

$$x = 1: \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (2.21)$$

$$t = 0: \quad u = u_0 \qquad (2.22)$$

Здесь $\boldsymbol{u_0 = e_0/e_1 > 1}$. Как видно, решение задачи (2.19) –(2.22) управлятся единственным безразмерным параметром u_0 .

При численном решении задачи (2.19) –(2.22) удобным оказывается перейти к новой функции

$$\boldsymbol{s = u^{1-\beta}}$$

В терминах $\boldsymbol{s}$ задача (2.19) –(2.22) запишется как

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left((1-\beta) s^{\frac{1}{1-\beta}}\right) - \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0 \qquad (2.23)$$

$$x = 0: \quad s = 1, \qquad (2.24)$$

$$x = 1: \quad \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \qquad (2.25)$$

$$\boldsymbol{t = 0}: \qquad \boldsymbol{s = \varepsilon} \qquad (2.26)$$

Безразмерный управляющий параметр задачи $\boldsymbol{\varepsilon = u_0^{1-\beta}}$ может изменятся в диапазоне (0,1). При дискретезации уравнения (2.23) используется неявная по времени схема. Во внутренних точках расчетной области она имеет вид

$$\frac{(1-\beta)}{\Delta\tau}\left(s_i^{\frac{1}{1-\beta}} - \hat{s}_i^{\frac{1}{1-\beta}}\right) + \frac{1}{(\Delta x)^2}(2s_i - s_{i-1} - s_{i+1}) = 0, \quad i = \overline{2, N-1} \quad (2.27)$$

$$\Delta x = \frac{1}{1-N}$$

Здесь $\Delta\tau$ – шаг по времени, Δt – равномерный шаг пространственной сетки, s_i – значении функции в сеточном узле

$x_i = (1-i)\Delta x$ на расчетном временном слое, $\widehat{s_i}$ – значение на предыдущем временном слое. При решении нелинейной задачи (2.27) используется метод Ньютона. В качестве начального приближения выбирается значение $\widehat{s_i}$ с предыдущего временного слоя. Следующее приближение s_i отыскивается по предыдущему $\overline{s_i}$ как

$$s_i = \overline{s_i} + z_i$$

С учетом того, что

$$(1-\beta)s_i^{\frac{1}{1-\beta}} = (1-\beta)\overline{s_i}^{\frac{1}{1-\beta}} + \overline{s_i}^{\frac{\beta}{1-\beta}} + O(z_1^2)$$

Имеем для поправки *z* следующую систему линейных уравнений

$$\overline{s_i}^{\frac{1}{1-\beta}} z_i - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}(2z_i - z_{i-1} - z_{i+1}) = -r_i \qquad \mathbf{(2.28)}$$

Невязка *r* определяется как

$$r_i = (1-\beta)\left(\overline{s_i}^{\frac{1}{1-\beta}} - \hat{s}_i^{\frac{\beta}{1-\beta}}\right) + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}(2\overline{s_i} - \overline{s_{i-1}} - \overline{s_{i+1}})$$

Решение трехдиагональной линейной системы уравнений (2.28) осуществлялось методом прогонки.

Типичные сетки, используемые в расчетах, содержали *N*=100 узлов. Результаты тестировались на вдвое более подробных сетках. Шаг по времени

варьировался в зависсимости от значения ε. При умеренных ε он выбирался равных Δx и существенно увеличивался с уменьшением ε на первом, медленном этапе процесса – этапе первичного уплотнения (см. ниже). Для сходимости метода Ньютона обычно требвалось 3-4 итерации.

На рис. 2-5 зависсимость $s(x,\tau)$ для значений ε=0.3; 0.1; 0.03; 0.01

Во всех случаях динамика уплотнения пасты однотипна. На первом этапе процесса (первичное уплотнение) волна уплотнения движется с течением времени от выходного сечения вглубь колонки. Процесс происходит так же как в полубесконечном пространстве и влияние поршня на самоподобно развивающуюся волну уплотнения не сказывается. На этом этапе концентрация твердых частиц вблизи поршня остается той же самой, что в начальный момент. Первый этап заканчивается на достижении волны уплотнения поверхности поршня. Далее, на втором этапе(вторичного уплотнения), концентрация твердых частиц на поршне непрерывно возрастает, стремясь при $t \to \infty$ к их концентрации в выходном сечении колонки. Предельное ($t \to \infty$) состояние отвечает однородно уплотненной пасте. Указанные два этапа отчетливо проявляются в зависсимотях $S(\tau) = s(1,\tau)$ степени уплотнения пасты на поршне от времени. Их характерный вид представлен на рис. 11 для двух различных значений ε . По этим графикам можно определить характерные времена $\tau_1(\varepsilon)$ первичного и $\tau_2(\varepsilon)$ вторичного уплотнения пасты. Первые из них мы определяем как время, при котором значение s на поршне достигает значения 1.05 ε, так, что

$$\boldsymbol{S(\tau_1) = 1.05\,\varepsilon}$$

Второе определяется как время, при котором паст на поршне остается недоуплотненной лишь на 5%, т.е.

$$\boldsymbol{S(\tau_1) = 0.95}$$

Расчет величин $\boldsymbol{\tau_1}$ и $\boldsymbol{\tau_2}$ проведен для различных значений ε . Его результаты сведены в таблицу 1 и изображены на рисунке 6. Сплошная линия отвечает времени окончания первого, а штрихованная – второго этапа процесса уплотнения пасты. Разность $\boldsymbol{\tau_1}$-$\boldsymbol{\tau_2}$ равна времени протекания второго этапа.

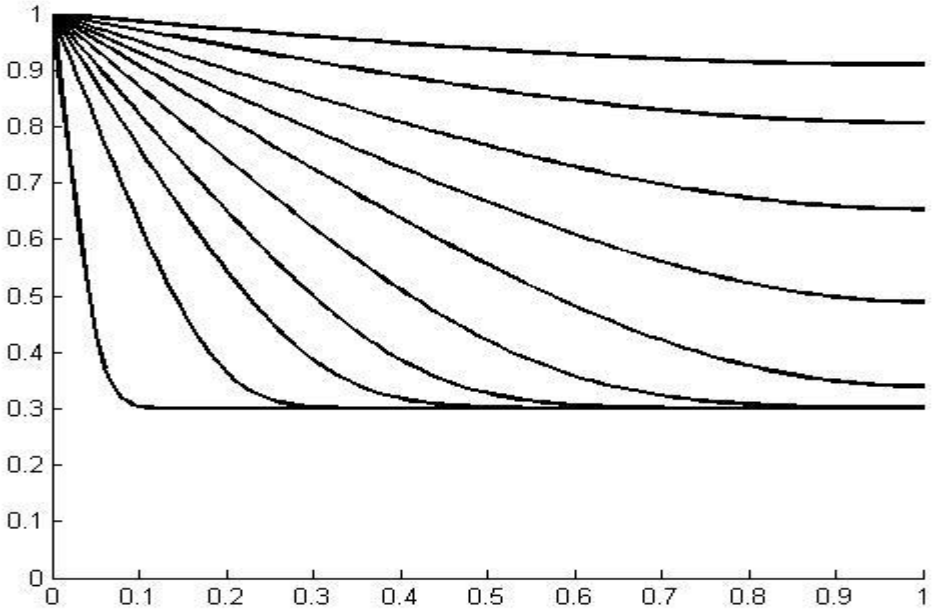

Рис. 2 Зависсимость $S(\xi)$ при

$t = 0.02, 0.15, 0.4, 0.8, 1.5, 2.5, 4, 5, 5.5, 6, 6.5$ для $\varepsilon = 0.3$

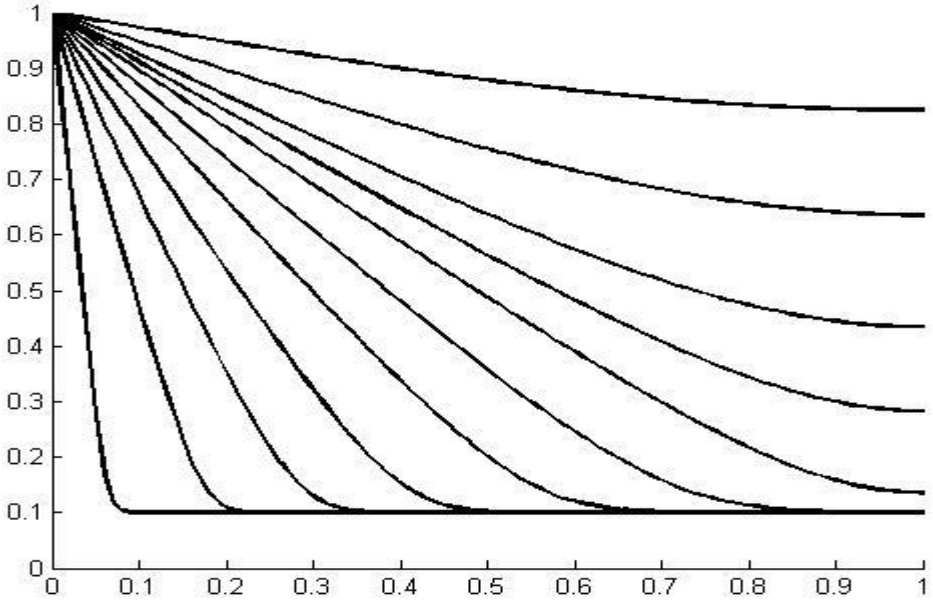

Рис. 3 Зависсимость $S(\xi)$ при

t =0.02,0.15,0.4,0.8,1.5,2.5,4,5,5.5,6,6.5 $\varepsilon = 0.1$

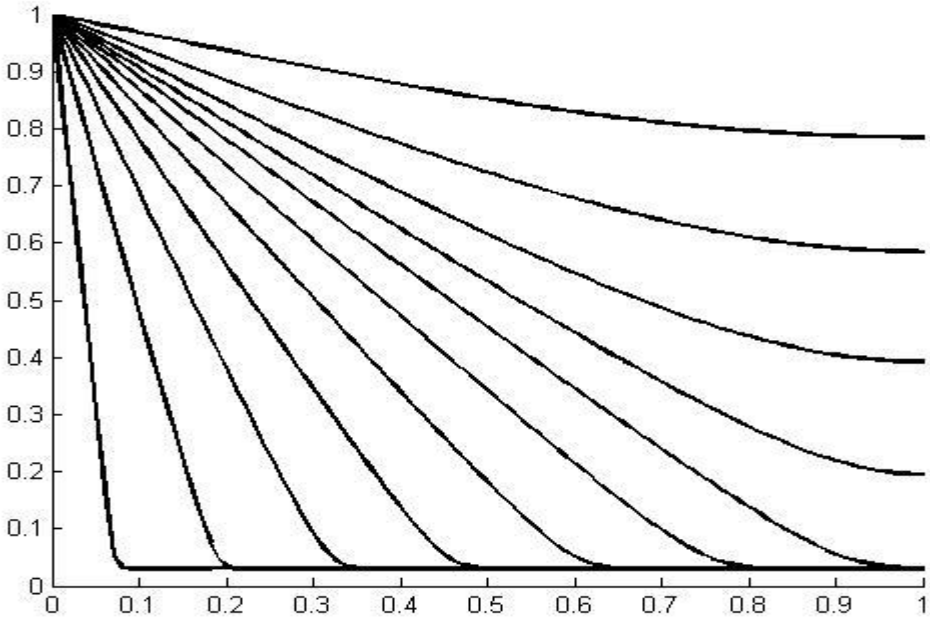

Рис.4 Зависсимость $S(\xi)$ при

$t = 0.1,0.7,2,4,7,11,16,20,20.8,21.3,21.8$ $\varepsilon = 0.03$

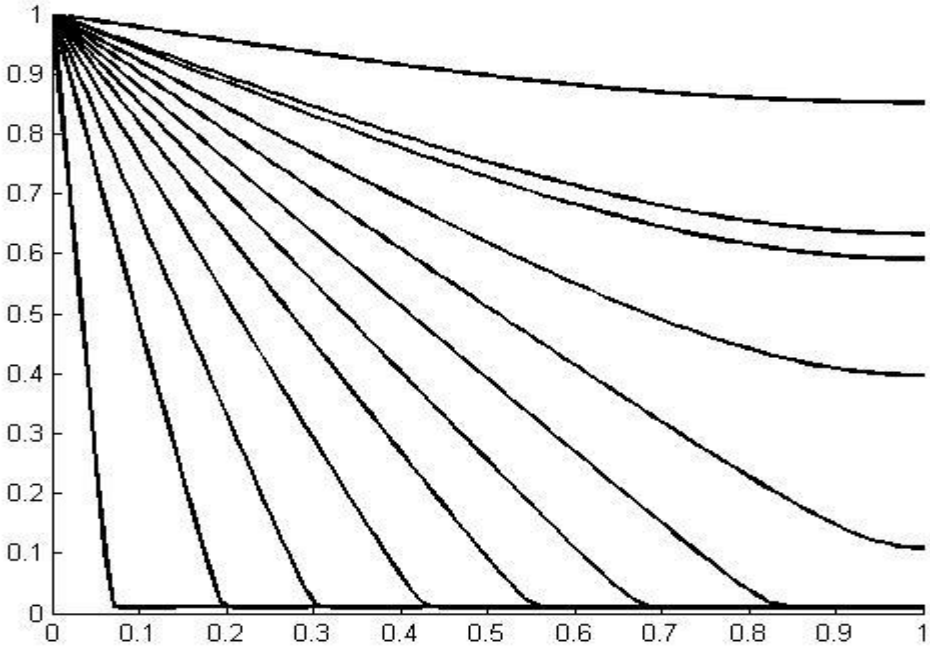

Рис.4 Зависсимость $S(\xi)$ при

$t = 0.3,2.5,6,12,20,30,45,67.3,68.8,69.3,69.4,70$ $\varepsilon = 0.01$

Выводы.

В ходе решения одномерной задачи об уплотнении бентонитовой пасты выявлены две стадии протекания процесса. На первом этапе уплотнения концентрация твердых частиц вблизи поршня остается той же самой, что и в начальный момент. Первый этап заканчивается на достижении волны уплотнения поверхности поршня. Далее на втором этапе, концентрация твердых частиц на поршне непрерывно возрастает, стремясь к их концентрации в выходном сечении колонки. Предельное состояние отвечает однородно уплотненной пасте . Продолжительность первичного уплотнения существенно зависит от начальной концентрации ε бентонитовой суспензии. Время вторичного уплотнения слабо зависит от величины ε.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Все программы для решения задачи и построения графиков строилась в Matlab.

Программа использует функцию (2.28), являющуюся основной функцией для всех процедур.

```
function v=Finds(beta,tau,time_fin,v0)
   g1=1./(1-beta);
   g2=beta/(1-beta);
   N=length(v0);    % число узлов
   h=1./(N-1);  % шаг по пространству
   h2=1./h/h;
   v=v0;
   r=zeros(size(v));
   dv=zeros(size(v));
   vold=zeros(size(v));
   A=sparse(N,N);
   A0=sparse(N,N);
   A0(1,1)=1;
   for i=2:N-1
      A0(i,i)=2*h2;
      A0(i,i-1)=-h2;
      A0(i,i+1)=-h2;
   end
```

```
A0(N,N)=2*h2;
A0(N,N-1)=-2*h2;
t=0;
while t<time_fin-1.e-8,
    if (t+tau>time_fin)
        tau=time_fin-t;
    end
    vold=v;
    norm_nev=1;
    while norm_nev>1.e-7,
        for i=2:N-1
            r(i)=(1-beta)*(v(i)^g1-vold(i)^g1)/tau+h2*(2*v(i)-v(i-1)-v(i+1));
        end
        r(N)=(1-beta)*(v(N)^g1-vold(N)^g1)/tau+2*h2*(v(N)-v(N-1));
        r(1)=0;
        norm_nev=norm(r,inf);
        A=A0;
        for i=2:N
            A(i,i)=A(i,i)+(v(i)^g2)/tau;
        end
        dv=A\(-r);
        v=v+dv;
    end
t=t+tau;
```

```
    end
end
```

Процедура строит зависимость ***s(x,t)*** для различных значении

s = 0.3; 0.1; 0.03; 0.01.

```
N=100;
eps=0.03;
beta=1.92;
s=eps*ones(N,1);
s(1)=1;
tau=0.01;
time_e=[ 0.005 0.05 0.02 0.1 0.2 0.4 0.8 1.3 1.7 2.1 2.5];
tk=length(time_e);
x=linspace(0,1,N);
for k=1:tk
    if k==1
        tfin=time_e(1);
    else
        tfin=time_e(k)-time_e(k-1);
    end
    if k<3
        tau=0.001;
    else
```

```
        tau=0.01;
    end
        s=Finds(beta,tau,tfin,s);
        figure(1)
    hold on
plot(x,s,'k-','Linewidth',2)
end
xlim([0 1])
ylim([0 1])
```

Список литературы.

1) А. В. Пахарев. Разработка бентонитов: Томский политехнический университет 6 — 11 апреля 2009 г

2) Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 2006. 631 с.

3) Воробьев Г. Н., Данилова А. Н. “Практикум по численным методам.” - М.:”Высш. шк.”, 2007 г. -184

4) Дьяконов В. П. Справочник по применению системы PC MATLAB. — М.: «Физматлит», 1993. — С. 112.

5) Седов Л.И. - Механика сплошной среды. Том 1. М., Наука, 1970 г., 492 стр.

6) Седов Л.И. - Механика сплошной среды. Том 2. М., Наука, 1970 г., 568 стр.

7) Геологический словарь, М:"Недра", 1978.