ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 10 (473)

УДК 517.544

Н.Р. АБУБАКИРОВ, Р.Б. САЛИМОВ, П.Л. ШАБАЛИН

ВНЕШНЯЯ ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ПРИ КОМБИНИРОВАНИИ ДВУХ ПАРАМЕТРОВ ИЗ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ И ПОЛЯРНОГО УГЛА

1. Внешняя обратная краевая задача для параметров x, y

Требуется найти в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ контур $L_z = L_z^1 \cup L_z^2$ и функцию $w(z)$, аналитическую в области D_z, $\infty \in D_z$, $\partial D_z = L_z$, по краевому условию

$w = \varphi_1(x) + i\psi_1(x)$, $0 \le x \le a$, на одной части L_z^1,

$w = \varphi_2(x) + i\psi_2(x)$, $0 \le x \le a$, на остальной части L_z^1,

$w = \varphi(y) + i\psi(y)$, $-b \le y \le b$, на L_z^2.

Будем считать, что заданные однозначные функции определяют в плоскости w замкнутый жордановый контур L_w, являющийся границей односвязной конечной области D_w, причем $D_w = w(D_z)$, $\partial D_w = L_w = L_w^1 \cup L_w^2$. Предполагаем также, что начало координат не принадлежит D_z и $w_0 = w(\infty)$ фиксируем заранее [1]. Для определенности будем считать, что $O \in L_z^1$.

Отобразим конформно область $E = \{|\zeta| < 1\}$ в плоскости $\zeta = \rho e^{i\gamma}$ на D_w функцией $w = \omega(\zeta)$ так, чтобы $\omega(0) = w_0 = w(\infty)$, обозначим через $e^{i\gamma_A}$, $e^{i\gamma_B}$ точки окружности ∂E, соответствующие точкам $\varphi(-b) + i\psi(-b)$, $\varphi(b) + i\psi(b)$ контура L_w, причем $0 < \gamma_A < \pi\gamma_B = 2\pi - \gamma_A$, а через $e^{i\gamma_C}$, $\gamma_A < \gamma_C < \gamma_B$, — точку, отвечающую $\varphi_2(0) + i\psi_2(0)$.

Соотношения $w = w(z)$, $w = \omega(\zeta)$ определяют функцию $z = z(\zeta)$, отображающую область E на D_z, причем $z(0) = \infty$, и $\zeta = 0$ есть простой полюс функции $z(\zeta)$.

Обозначим

$$z(e^{i\gamma}) = x(\gamma) + iy(\gamma), \tag{1}$$

и из соответствия граничных значений функций $w = w(z)$, $w = \omega(\zeta)$ получим

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) + i\psi_2(x) &= \omega(e^{i\gamma}), \quad \gamma_A \le \gamma < \gamma_C, \\ \varphi_1(x) + i\psi_1(x) &= \omega(e^{i\gamma}), \quad \gamma_C \le \gamma \le \gamma_B, \\ \varphi(y) + i\psi(y) &= \omega(e^{i\gamma}), \quad 0 \le \gamma \le \gamma_A, \ \ \gamma_B \le \gamma \le 2\pi. \end{aligned} \tag{2}$$

Из первых двух равенств находим зависимость $x = x(\gamma)$, $\gamma_A \le \gamma \le \gamma_B$, из последнего — зависимость $y = y(\gamma)$, $0 \le \gamma \le \gamma_A$, $\gamma_B \le \gamma \le 2\pi$. Следовательно, получаем смешанную краевую задачу для нахождения функции $z(\zeta)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z(e^{i\gamma}) &= x(\gamma), \quad \gamma_A \le \gamma \le \gamma_B, \\ \operatorname{Im} z(e^{i\gamma}) &= y(\gamma), \quad 0 \le \gamma \le \gamma_A, \ \ \gamma_B \le \gamma \le 2\pi. \end{aligned} \tag{3}$$

Будем считать, что функции $x(\gamma)$, $y(\gamma)$ удовлетворяют условию Гёльдера.

Для решения этой задачи мы не можем непосредственно воспользоваться известными результатами ([2], с. 308–313), т. к. здесь искомая функция имеет простой полюс в точке $\zeta = 0$.

Поэтому будем пользоваться методами, разработанными в статьях [3], [4]. Краевую задачу (3) представим в виде одного краевого условия

$$\operatorname{Re}[e^{-i\nu(\gamma)}z(e^{i\gamma})] = c(\gamma), \tag{4}$$

$$\nu(\gamma) = \begin{cases} -\pi/2, & \gamma \in [0, \gamma_a]; \\ -\pi, & \gamma \in (\gamma_A, \gamma_B); \\ -3\pi/2, & \gamma \in [\gamma_B, 2\pi], \end{cases} \quad c(\gamma) = \begin{cases} -y(\gamma), & \gamma \in [0, \gamma_A]; \\ -x(\gamma), & \gamma \in (\gamma_A, \gamma_B); \\ y(\gamma), & \gamma \in [\gamma_B, 2\pi]. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим однородную задачу, соответствующую (4), и построим ее решение $F_0(\zeta)$, обращающееся в нуль только в точках $e^{i\gamma_A}$, $e^{i\gamma_B}$ и имеющее простой полюс в точке $\zeta = 1$. При этом образом единичного круга в плоскости F_0 будет верхняя полуплоскость без конечного разреза, лежащего на мнимой оси. Функция, осуществляющая это отображение, имеет вид

$$F_0(\zeta) = e^{iq}\frac{(\zeta - e^{i\gamma_A})^{1/2}(\zeta - e^{i\gamma_B})^{1/2}}{\zeta - 1}.$$

Произведение

$$-ie^{-i\nu(\gamma)}F_0(e^{i\gamma}) = |F_0(e^{i\gamma})| = \frac{|e^{i\gamma} - e^{i\gamma_A}|^{1/2}|e^{i\gamma} - e^{i\gamma_B}|^{1/2}}{|e^{i\gamma} - 1|} \tag{5}$$

является действительной величиной, поэтому краевое условие (4) можно записать в виде

$$\operatorname{Re}\frac{z(e^{i\gamma})}{-iF_0(e^{i\gamma})} = \frac{c(\gamma)}{|F_0(e^{i\gamma})|}.$$

Учитывая, что функция $z(\zeta)$ имеет простой полюс в точке $\zeta = 0$, находим ([5], с.269)

$$\frac{z(\zeta)}{-iF_0(\zeta)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{c(\sigma)}{|F_0(e^{i\sigma})|}\frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta}d\sigma + iB_0 + C\zeta - \frac{\overline{C}}{\zeta}, \tag{6}$$

где $C = A + iB$, A, B, B_0 – произвольные действительные постоянные. После перехода к пределу при $\zeta \to e^{i\gamma}$ формула примет вид (см., напр., [5], с. 59)

$$z(e^{i\gamma}) = -iF_0(e^{i\gamma})\left\{\frac{c(\gamma)}{|F_0(e^{i\gamma})|} - \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{c(\sigma)}{|F_0(e^{i\sigma})|}\operatorname{ctg}\frac{\sigma - \gamma}{2}d\sigma + i(B_0 + 2A\sin\gamma + 2B\cos\gamma)\right\}. \tag{7}$$

С учетом (5) заключаем, что в формуле (7) выражение в фигурных скобках должно обращаться в нуль при $\gamma = 0$, т. е. должно выполняться соотношение

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{c(\sigma)}{|F_0(e^{i\sigma})|}\operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2}d\sigma + B_0 + 2B = 0.$$

Этими рассуждениями доказана

Теорема 1. *Решение внешней обратной краевой задачи* (*ОКЗ*) *по параметрам* x, y *дается формулой* (6) *и зависит от двух произвольных постоянных* A *и* B.

2. Внешняя обратная краевая задача для параметров θ, y

1°. Рассмотрим задачу, отличающуюся от прежней только тем, что на части L_z^1 контура L_z значения аналитической функции $w(z)$ заданы в виде

$$w = \varphi_*(\theta) + i\psi_*(\theta), \quad \alpha \le \theta \le 2\pi - \beta, \tag{8}$$

где $\theta = \arg z$ — ветвь, непрерывная в плоскости, разрезанной по полуоси $x > 0$, числа α, β удовлетворяют условиям $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$.

Будем считать, что эти значения и значения функции $w(z)$, заданные на L_z^2 в виде

$$w = \varphi(y) + i\psi(y), \quad -b \le y \le b,$$

в плоскости w определяют замкнутый жордановый контур Ляпунова L_w, состоящий из L_w^1 и L_w^2, причем

$$\varphi_*(\alpha) + i\psi_*(\alpha) = \varphi(b) + i\psi(b),$$
$$\varphi_*(2\pi - \beta) + i\psi_*(2\pi - \beta) = \varphi(-b) + i\psi(-b).$$

Для определенности предполагаем, что в рассматриваемой задаче начало координат не принадлежит D_z и величина $w_0 = w(\infty)$ задана. Функции $\varphi(y)$, $\psi(y)$, $\varphi_*(\theta)$ и $\psi_*(\theta)$ будем считать дифференцируемыми, причем их производные не обращаются в нуль. Круг E в плоскости ζ отобразим конформно на область D_w, внутреннюю к L_w, функцией $w = \omega(\zeta)$ при том же соответствии точек, что и выше. Для граничных значений функции $z(\zeta) = w^{-1} \circ \omega(\zeta)$ будем использовать обозначения (1).

Соотношения (2) теперь заменяются следующими:

$$\varphi_*(\theta) + i\psi_*(\theta) = \omega(e^{i\gamma}), \quad \gamma_A < \gamma < \gamma_B,$$
$$\varphi(y) + i\psi(y) = \omega(e^{i\gamma}), \quad 0 \le \gamma \le \gamma_A, \ \ \gamma_B \le \gamma \le 2\pi.$$

Из первого равенства находим зависимость $\theta = \theta(\gamma)$, $\gamma_A < \gamma < \gamma_B$, причем $\theta(\gamma_B) = \alpha$, $\theta(\gamma_A) = 2\pi - \beta$, из второго — зависимость $y(\gamma)$, $0 \le \gamma \le \gamma_A$, $\gamma_B \le \gamma \le 2\pi$. Теперь приходим к следующей краевой задаче Гильберта для нахождения функции $z(\zeta)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[e^{-i\theta(\gamma)} z(e^{i\gamma})] = 0, \qquad & \gamma_A < \gamma < \gamma_B, \\ \operatorname{Im} z(e^{i\gamma}) = y(\gamma), \quad & 0 \le \gamma \le \gamma_A, \ \ \gamma_B \le \gamma \le 2\pi. \end{aligned} \tag{9}$$

Вначале найдем решение $F_0(\zeta)$ однородной задачи, соответствующей (9), обращающееся в нуль только в точках $e^{i\gamma_A}$, $e^{i\gamma_B}$ и имеющее простой полюс в точке $\zeta = 0$.

Краевое условие для $F_0(\zeta)$ запишем в виде

$$\operatorname{Re}[e^{-i\nu(\gamma)} F_0(e^{i\gamma})] = 0, \tag{10}$$

где

$$\nu(\gamma) = \begin{cases} -\pi/2, & \gamma \in [0, \gamma_A]; \\ -5\pi/2 + \theta(\gamma), & \gamma \in (\gamma_A, \gamma_B); \\ -5\pi/2, & \gamma \in [\gamma_B, 2\pi]. \end{cases} \tag{11}$$

Отсюда видно, что можно принять

$$\arg F_0(e^{i\gamma}) = \nu(\gamma) + \pi/2. \tag{12}$$

Известные граничные значения действительной части аналитической в E функции

$$K(\zeta) = -i \ln\{F_0(\zeta)\zeta / [(\zeta - e^{i\gamma_A})^{\beta/\pi} (\zeta - e^{i\gamma_B})^{\alpha/\pi}]\} \tag{13}$$

обозначим через $q(\gamma)$. По формуле Шварца ([5], с. 58) находим

$$K(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(\gamma) \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma, \tag{14}$$

затем на основании (13) определяем

$$F_0(\zeta) = \zeta^{-1} e^{iK(\zeta)} (\zeta - e^{i\gamma_A})^{\beta/\pi} (\zeta - e^{i\gamma_B})^{\alpha/\pi}. \tag{15}$$

Граничные значения $F_0(t)$ функции $F_0(\zeta)$ удовлетворяют краевому условию (10), поэтому $-ie^{-i\nu(\gamma)}\, F_0(e^{i\gamma})$ является действительной величиной, причем

$$-\, ie^{-i\nu(\gamma)} F_0(e^{i\gamma}) = |F_0(e^{i\gamma})|. \tag{16}$$

С учетом (11) по аналогии с (10) краевое условие (9) запишем в виде

$$\mathrm{Re}[e^{-i\nu(\gamma)}z(e^{i\gamma})] = c(\gamma),$$

где

$$c(\gamma) = \begin{cases} -y(\gamma), & \gamma \in [0, \gamma_A]; \\ 0, & \gamma \in (\gamma_A, \gamma_B); \\ -y(\gamma), & \gamma \in [\gamma_B, 2\pi]. \end{cases}$$

Это условие, имея в виду (16), представим следующим образом:

$$\mathrm{Re}\left[\frac{z(e^{i\gamma})}{-iF_0(e^{i\gamma})}\right] = \frac{c(\gamma)}{|F_0(e^{i\gamma})|},$$

затем с использованием формулы Шварца получим

$$z(\zeta) = -iF_0(\zeta)\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{c(\gamma)}{|F_0(e^{i\gamma})|}\frac{e^{i\gamma}+\zeta}{e^{i\gamma}-\zeta}d\gamma + iB_0\right], \tag{17}$$

где B_0 — произвольная действительная постоянная. Отсюда

$$z(e^{i\gamma}) = |F_0(e^{i\gamma})|e^{i\theta(\gamma)}\left[-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{c(\sigma)}{F_0(e^{i\sigma})}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-\gamma}{2}d\sigma + B_0\right], \quad \gamma \in (\gamma_A, \gamma_B), \tag{18}$$

$$\mathrm{Re}\, z(e^{i\gamma}) = x(\gamma) = |F_0(e^{i\gamma})|\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-c(\sigma)}{F_0(e^{i\sigma})}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-\gamma}{2}d\sigma + B_0\right], \quad \gamma \in [0, \gamma_A), \quad \gamma \in (\gamma_B, 2\pi]. \tag{19}$$

Из формулы (18) ясно, что постоянная B_0 должна удовлетворять условию

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{c(\sigma)}{F_0(e^{i\sigma})}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-\gamma}{2}d\sigma + B_0 > 0, \quad \gamma \in (\gamma_A, \gamma_B). \tag{20}$$

С учетом равенства (15) и результатов статьи [6] нетрудно проверить, что интеграл в последней формуле стремится к $+\infty$ при $\gamma \to \gamma_A$ и при $\gamma \to \gamma_B$ для $\gamma \in (\gamma_A, \gamma_B)$. Следовательно, неравенство (20) может быть удовлетворено за счет выбора постоянной B_0. Результаты из [6] и (19) показывают, что интеграл в формуле (19) стремится к $+\infty$ при $\gamma \to \gamma_A - 0$, $\gamma \to \gamma_B + 0$, т. е. постоянную B_0 можно выбрать так, чтобы

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{c(\sigma)}{F_0(e^{i\sigma})}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-\gamma}{2}d\sigma + B_0 > 0, \quad \gamma \in [0, \gamma_A), \quad \gamma \in (\gamma_B, 2\pi]. \tag{21}$$

Тогда согласно (19)

$$x(\gamma) > 0, \quad \gamma \in [0, \gamma_A), \quad \gamma \in (\gamma_B, 2\pi]. \tag{22}$$

Отметим, что каждый из контуров L_z^1, L_z^2 не имеет точек самопересечения. Эти контуры не будут иметь общих точек кроме концов, и область D_z будет однолистной, если при выполнении условия (22) будет иметь место соотношение

$$-\operatorname{tg}\beta \le \frac{y(\gamma)}{x(\gamma)} \le \operatorname{tg}\alpha, \quad \gamma \in [0, \gamma_A), \quad \gamma \in (\gamma_B, 2\pi]. \tag{23}$$

В самом деле, в этом случае для точек L_z^2 имеем $z(e^{i\gamma}) = x(\gamma) + iy(\gamma)$, $y(\gamma)/x(\gamma) = \operatorname{tg}\theta(\gamma)$, $\theta(\gamma) = \arg z(e^{i\gamma})$ и

$$-\beta \le \theta(\gamma) \le \alpha.$$

Используя результаты из [6], покажем, что для $\gamma \in (\gamma_B, 2\pi)$ функцию (19) можно представить в виде

$$x(\gamma) = b\operatorname{ctg}\alpha + |e^{i\gamma} - e^{i\gamma_B}|^{\alpha/\pi}(x_*(\gamma) + B_0),$$

где $x_*(\gamma)$ — функция, удовлетворяющая условию Гёльдера при $\gamma \in [\gamma_B, 2\pi]$. Поэтому, выбрав B_0 так, чтобы

$$\min_{\gamma_B \le \gamma \le 2\pi} x_*(\gamma) + B_0 > 0,$$

получим

$$x(\gamma) > b \operatorname{ctg} \alpha, \quad \gamma \in (\gamma_B, 2\pi).$$

С другой стороны, $y(\gamma) < b$, $\gamma \in (\gamma_B, 2\pi)$, следовательно,

$$\frac{y(\gamma)}{x(\gamma)} < \operatorname{tg} \alpha, \quad \gamma \in (\gamma_B, 2\pi).$$

Аналогично, замечая, что $-y(\gamma) < b$, $\gamma \in (0, \gamma_A)$, выбором постоянной B_0 добьемся выполнения неравенства

$$x(\gamma) > b \operatorname{ctg} \beta, \quad \gamma \in (0, \gamma_A),$$

тогда

$$-\operatorname{tg} \beta < \frac{y(\gamma)}{x(\gamma)}, \quad \gamma \in (0, \gamma_A).$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Решение внешней ОКЗ по параметрам θ, y, $\alpha \le \theta \le 2\pi - \beta$, дается формулой* (17) *и зависит от одной вещественной постоянной B_0. Если B_0 удовлетворяет условиям* (20), (21), (23), *то искомая область D_z является однолистной.*

2°. Теперь рассмотрим предыдущую задачу в случае, когда параметр θ в формуле (8) изменяется в интервале $-\beta \le \theta \le \alpha$, где α, β обозначают то же, что и выше. В этом случае считаем, что начало координат принадлежит D_z.

В отличие от предыдущего здесь имеем

$$\varphi_*(-\beta) + i\psi_*(-\beta) = \varphi(-\beta) + i\psi(-\beta), \; \theta(\gamma_A) = -\beta.$$

В условии (10)

$$\nu(\gamma) = \begin{cases} -\pi/2, & \gamma \in [0, \gamma_A]; \\ -\pi/2 + \theta(\gamma), & \gamma \in (\gamma_A, \gamma_B); \\ -\pi/2, & \gamma \in [\gamma_B, 2\pi]. \end{cases}$$

В силу (12) граничные значения действительной части аналитической в круге E функции

$$K(\zeta) = -i \ln\{F_0(\zeta)/[(\zeta - e^{i\gamma_A})^{\beta/\pi}(\zeta - e^{i\gamma_B})^{\alpha/\pi}]\}$$

известны, поэтому по формуле (14) находим $K(\zeta)$ и после этого

$$F_0(\zeta) = e^{iK(\zeta)}(\zeta - e^{i\gamma_A})^{\beta/\pi}(\zeta - e^{i\gamma_B})^{\alpha/\pi}. \tag{24}$$

Следовательно, искомое решение определяется формулой (7), поэтому

$$z(e^{i\gamma}) = x(\gamma) + iy(\gamma) = |F_0(e^{i\gamma})| e^{i\theta(\gamma)} \Big\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-c(\sigma)}{|F_0(e^{i\sigma})|} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \gamma}{2} d\sigma + \tag{25}$$

$$+ B_0 + 2A \sin\gamma + 2B \cos\gamma \Big\}, \quad \gamma \in (\gamma_A, \gamma_B),$$

$$\operatorname{Re} z(e^{i\gamma}) = x(\gamma) = |F_0(e^{i\gamma})| \Big\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-c(\sigma)}{|F_0(e^{i\sigma})|} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \gamma}{2} d\sigma + \tag{26}$$

$$+ B_0 + 2A \sin\gamma + 2B \cos\gamma \Big\}, \quad \gamma \in [0, \gamma_A), \quad \gamma \in (\gamma_B, 2\pi],$$

при этом необходимо выполнение неравенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-c(\sigma)}{|F_0(e^{i\sigma})|} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \gamma}{2} d\sigma + B_0 + 2A \sin\gamma + 2B \cos\gamma > 0, \quad \gamma \in (\gamma_A, \gamma_B). \tag{27}$$

Для обеспечения однолистности области D_z потребуем, чтобы линии L_z^1, L_z^2 были расположены по разные стороны от прямой, проходящей через концы этих линий, с уравнением

$$y = -b + \frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}(x - b\operatorname{ctg}\beta).$$

Поэтому будем считать, что при $\operatorname{ctg}\alpha > \operatorname{ctg}\beta$, когда $x(\gamma_B + 0) > x(\gamma_A - 0)$, выполнены условия

$$\begin{aligned} y &\geq -b + 2(x - b\operatorname{ctg}\beta)/(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta), \quad (x,y) \in L_z^1, \\ y &\leq -b + 2(x - b\operatorname{ctg}\beta)/(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta), \quad (x,y) \in L_z^2, \end{aligned}$$

при $\operatorname{ctg}\alpha < \operatorname{ctg}\beta$ — условия

$$\begin{aligned} y &\leq -b + 2(x - b\operatorname{ctg}\beta)/(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta), \quad (x,y) \in L_z^1, \\ y &\geq -b + 2(x - b\operatorname{ctg}\beta)/(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta), \quad (x,y) \in L_z^2, \end{aligned} \tag{28}$$

при $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$ — условия

$$\begin{aligned} x &\leq b\operatorname{ctg}\beta, \quad (x,y) \in L_z^1, \\ x &\geq b\operatorname{ctg}\beta, \quad (x,y) \in L_z^2. \end{aligned} \tag{29}$$

Остановимся на случае $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$. С учетом (25), (26) условие (29) запишем в виде

$$B_0 + 2A\sin\gamma \leq -2B\cos\gamma + \frac{b\operatorname{ctg}\beta}{|F_0(e^{i\gamma})|\cos\theta\gamma} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{-c(\sigma)}{|F_0(e^{i\sigma})|}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-\gamma}{2}d\sigma, \quad \gamma \in (\gamma_A, \gamma_B).$$

Правая часть есть функция, ограниченная вблизи γ_A, γ_B. Это согласуется и с тем, что данное неравенство при $\gamma \to \gamma_A + 0$, $\gamma \to \gamma_B - 0$ переходит в равенство.

Последнее соотношение представим в виде

$$B_0\cos\alpha_1(\gamma) + A\sin\alpha_1(\gamma) \leq E(\gamma, B), \quad \gamma \in (\gamma_A, \gamma_B), \tag{30}$$

где

$$\alpha_1(\gamma) = \operatorname{arctg} 2\sin\gamma,$$

$$E(\gamma, B) = \Big\{ -2B\cos\gamma + \frac{b\operatorname{ctg}\beta}{|F_0(e^{i\gamma})|\cos\theta(\gamma)} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{-c(\sigma)}{|F_0(e^{i\sigma})|}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-\gamma}{2}d\sigma \Big\} \Big/ \sqrt{1 + 4\sin^2\gamma}.$$

В плоскости комплексного переменного $u + iv$ неравенство

$$u\cos\alpha_1(\gamma) + v\sin\alpha_1(\gamma) \leq E(\gamma, B), \quad \gamma \in (\gamma_A, \gamma_B),$$

определяет семейство полуплоскостей, имеющих общую часть D, поскольку для нормального вектора $(\cos\alpha_1(\gamma), \sin\alpha_1(\gamma))$ границы каждой из полуплоскостей имеем

$$\sup_{\gamma\in(\gamma_A,\gamma_B)} \alpha_1(\gamma) - \inf_{\gamma\in(\gamma_A,\gamma_B)} \alpha_1(\gamma) = 2\sup_{\gamma\in(\gamma_A,\gamma_B)} \alpha_1(\gamma) < \pi,$$

причем в область D входит угол раствора $\pi - 2\sup\limits_{\gamma\in(\gamma_A,\gamma_B)} \alpha_1(\gamma)$ с вершиной в точке $u + iv = \inf\limits_{\gamma\in(\gamma_A,\gamma_B)} E(\gamma, B) = m(B)$. При $m(B) \geq 0$ этот угол содержит точки действительной оси, для которых $u < m(B)$, стороны его симметричны относительно действительной оси; при $m(B) > 0$ вершина угла совпадает с точкой

$$u + iv = \frac{m(B)}{\cos\big(\sup\limits_{\gamma\in(\gamma_A,\gamma_B)} \alpha_1(\gamma)\big)}.$$

Неравенство (30), равносильное (29), будет выполняться, если постоянные B_0, A будут выбраны так, что точка $(B_0, A) \in D$.

Считая $-\gamma_A < \gamma < \gamma_A$, совершенно аналогично покажем, что неравенства (29) выполняются, когда постоянные B_0, A выбраны так, что $(B_0, A) \in D_1$ — области в плоскости $u + iv$, причем в область D_1 входит угол раствора $\pi - 2 \sup\limits_{\gamma \in (\gamma_A, \gamma_B)} \alpha_1(\gamma)$, симметричный относительно действительной оси и содержащий точки положительной полуоси, включая сколь угодно большие значения u, а вершина угла совпадает с точкой

$$u + iv = \sup_{\gamma \in (-\gamma_A, \gamma_A)} E(\gamma, B) = M(B) \ \text{ при } M(B) < 0$$

и с точкой

$$u + iv = M(B) / \cos \big(\sup_{\gamma \in (-\gamma_A, \gamma_A)} \alpha_1(\gamma) \big) \ \text{ при } M(B) > 0.$$

Области D и D_1 имеют пересечение D_*, если

$$M(B) < \frac{m(B)}{\cos(\sup\limits_{\gamma \in (\gamma_A, \gamma_B)} \alpha_1(\gamma))} \quad \text{при } \ m(B) < 0,$$

$$\frac{M(B)}{\cos(\sup\limits_{\gamma \in (-\gamma_A, \gamma_A)} \alpha_1(\gamma))} < m(B) \quad \text{при } \ m(B) > 0.$$

Введем следующие обозначения:

$$M_1 = \sup_{\gamma \in (-\gamma_A, \gamma_A)} \left\{ \left[\frac{b \operatorname{ctg} \beta}{|F_0(e^{i\gamma})|} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-c(\sigma)}{|F_0(e^{i\sigma})|} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \gamma}{2} d\sigma \right] / \sqrt{1 + 4 \sin^2 \gamma} \right\},$$

$$m_1 = \inf_{\gamma \in (\gamma_A, \gamma_B)} \left\{ \left[\frac{b \operatorname{ctg} \beta}{|F_0(e^{i\gamma})| \cos \theta(\gamma)} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-c(\sigma)}{|F_0(e^{i\sigma})|} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \gamma}{2} d\sigma \right] / \sqrt{1 + 4 \sin^2 \gamma} \right\},$$

$$N = \max \left\{ \frac{M_1 \cos(\sup\limits_{\gamma \in (\gamma_A, \gamma_B)} \alpha_1(\gamma)) - m_1}{2(1 + \cos(\sup\limits_{\gamma \in (\gamma_A, \gamma_B)} \alpha_1(\gamma)))}, \ \frac{M_1 - m_1 \cos(\sup\limits_{\gamma \in (-\gamma_A, \gamma_A)} \alpha_1(\gamma))}{2(1 + \cos(\sup\limits_{\gamma \in (-\gamma_A, \gamma_A)} \alpha_1(\gamma)))} \right\}.$$

Теперь выберем постоянную B так, чтобы $0 > B > N$, тогда области D и D_1 имеют непустое, зависящее от B, пересечение D_*; выберем числа B_0, A так, чтобы $(B_0, A) \in D_*$, тогда будут выполняться неравенства (29). Если при выбранных значениях постоянных B_0, A, B имеет место неравенство (27), то область D_z будет однолистной.

Неравенство (28) запишем так (для $\operatorname{ctg} \alpha < \operatorname{ctg} \beta$):

$$B_0 \cos \alpha_1(\gamma) + A \sin \alpha_1(\gamma) \geq \widetilde{E}(\gamma, B), \quad -\gamma_A < \gamma < \gamma_A,$$

где $\alpha_1(\gamma)$ обозначает то же, что и выше,

$$\widetilde{E}(\gamma, B) = \Big\{ -2B \cos \gamma + \Big[b \operatorname{ctg} \beta + \frac{(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta)(y(\gamma) + b)}{2} \Big] / |F_0(e^{i\gamma})| - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-c(\sigma)}{|F_0(e^{i\sigma})|} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \gamma}{2} d\sigma \Big\} / \sqrt{1 + 4 \sin^2 \gamma}.$$

Это неравенство выполняется, когда постоянные B_0, A выбраны так, чтобы точка $(B_0, A) \in \widetilde{D}$ — области в плоскости $u + iv$, причем в область $\widetilde{D}$ входит угол раствора $\pi - 2 \sup\limits_{\gamma \in (-\gamma_A, \gamma_A)} \alpha_1(\gamma)$, симметричный относительно действительной оси и содержащий точки положительной полуоси, включая сколько угодно большие значения u, а вершина угла совпадает с точкой

$$u + iv = \sup_{\gamma \in (-\gamma_A, \gamma_A)} \widetilde{E}(\gamma, B) = \widetilde{M}(B) \quad \text{при } \ \widetilde{M}(B) < 0,$$

с точкой
$$u+iv=\widetilde{M}(B)/\cos(\sup_{\gamma\in(-\gamma_A,\gamma_A)}\alpha_1(\gamma))\quad \text{при}\quad \widetilde{M}(B)>0.$$
Аналогично убедимся в том, что неравенство (27) выполняется, когда постоянные B_0, A выбраны так, чтобы точка $(B_0,A)\in\widehat{D}$ — области в плоскости $u+iv$, причем в область $\widehat{D}$ входит угол раствора $\pi-2\sup_{\gamma\in(\gamma_A,\gamma_B)}\alpha_1(\gamma)$, симметричный относительно действительной оси и содержащий точки положительной действительной оси, а вершина угла совпадает с точкой
$$u+iv=\sup_{\gamma\in(-\gamma_A,\gamma_A)}\left\{-B\cos\gamma-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-c(\sigma)}{|F_0(e^{i\sigma})|}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-\gamma}{2}d\sigma\right\}/\sqrt{1+4\sin^2\gamma}=\widehat{M}(B)\ \text{ при }\ \widehat{M}(B)<0,$$
с точкой
$$u+iv=\widehat{M}(B)/\cos(\sup_{\gamma\in(\gamma_A,\gamma_B)}\alpha_1(\gamma))\quad \text{при}\quad \widehat{M}(B)>0.$$

Ясно, что области $\widetilde{D}$, $\widehat{D}$ имеют непустое пересечение $\widetilde{D}_*$, содержащее, в частности, пересечение вышеуказанных углов, входящих в $\widetilde{D}$, $\widehat{D}$. Пусть при заданном B постоянные B_0, A выбраны так, что $(B_0,A)\in\widetilde{D}_*$, тогда имеют место неравенства (27), (28) и область D_z будет однолистной.

Аналогичным образом исследуется случай $\operatorname{ctg}\alpha>\operatorname{ctg}\beta$. И здесь при некотором фиксированном B имеется непустая область $\widehat{D}_*$ такая, что при $(B_0,A)\in\widehat{D}_*$ искомое решение является однолистным. Выводом из этих рассуждений является

Теорема 3. *Решение $z(\zeta)$ ОКЗ по параметрам θ, y, $-\beta\le\theta\le\alpha$, определяется по формуле* (6). *Это решение будет однолистным, если входящие в* (6) *произвольные постоянные удовлетворяют неравенству* (27) *и точка $(B_0,A)\in D_*$ при $\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta$ либо $(B_0,A)\in\widetilde{D_*}$ при $\operatorname{ctg}\alpha<\operatorname{ctg}\beta$, либо $(B_0,A)\in\widehat{D_*}$ при $\operatorname{ctg}\alpha>\operatorname{ctg}\beta$.*

Литература

1. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. *Обратные краевые задачи и их приложения.* – 2-е изд. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965. – 333 с.
2. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – М.: Наука, 1968. – 511 с.
3. Абубакиров Н.Р., Салимов Р.Б. *Новый подход к решению краевой задачи Гильберта для аналитической функции в многосвязной области.* – Казанск. ун-т. – Казань, 1999. – 15 с. – Деп. в ВИНИТИ 28.05.99, № 1703-В99.
4. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *Новый подход к решению краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами для аналитической в круге функции* // Наука и язык. – Казань, 1999. – С. 33–37.
5. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.
6. Салимов Р.Б. *К вычислению сингулярных интегралов с ядром Гильберта* // Изв. вузов. Математика. – 1970. – № 12. – С. 93–96.

Казанский государственный университет
Казанская государственная
архитектурно-строительная академия

Поступила
07.07.2000