ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 12 (523)

УДК 519.642

С.Г. СОЛОДКИЙ

ОБ ЭКОНОМИЧНОМ ВЫБОРЕ ДИСКРЕТНОЙ ИНФОРМАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

1. Постановка задачи

Продолжая исследования, начатые в работах [1]–[3], рассмотрим задачу экономичной дискретизации операторных уравнений I рода

$$Ax = f, \quad f \in \mathrm{Range}(A), \tag{1}$$

которая состоит в построении алгоритмов, обеспечивающих заданный уровень точности восстановления решений (1) при минимальном, по-возможности, расходовании вычислительных ресурсов. Под такими ресурсами ниже будем понимать дискретную информацию, заданную в виде значений скалярных произведений, вычисленных на операторе и правой части решаемого уравнения.

Полагаем, что в (1) оператор A принадлежит совокупности $\mathcal{C}(X)$ компактных линейных операторов, действующих в действительном гильбертовом пространстве X. Считаем, что в X введены скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ и порождаемая им норма $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Пусть вместо точной правой части f известно лишь некоторое возмущение $f_\delta \in X$ такое, что $\|f - f_\delta\| \le \delta$ и $f_\delta \notin \mathrm{Range}(A)$. Приближения будем строить к нормальному решению $x^\dagger$ уравнения (1), т.е. к решению (1) с минимальной нормой в X.

Определим теперь класс изучаемых уравнений (1). В отношении $x^\dagger$ будем предполагать его принадлежность при некоторых $\nu > 0$ и $\rho \ge 1$ множеству

$$\mathcal{M}_{\nu,\rho}(A) = \{x : x = |A|^\nu u,\ \|u\| \le \rho\}, \quad |A| = (A^*A)^{1/2}, \tag{2}$$

где A^* — оператор, сопряженный к A. Через $\mathcal{H}^r$, $r = 1,2,\dots$, обозначим класс операторов $A \in \mathcal{C}(X)$, $\|A\| \le 1$, таких, что при любом $m = 1,2,\dots$ выполняется

$$\|(I - P_m)A\| \le m^{-r}, \quad \|A(I - P_m)\| \le m^{-r}. \tag{3}$$

Здесь I — тождественный оператор в X, а P_m — ортопроектор на линейную оболочку первых m элементов некоторого ортонормированного базиса $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ в X, т.е. $P_m = \sum\limits_{k=1}^m e_k(\cdot, e_k)$.

Примером уравнения (1) с решением из множества (2) и оператором из $\mathcal{H}^r$ может служить интегральное уравнение Фредгольма

$$\widetilde{A}x(t) := \int_0^1 h(t,\tau)x(\tau)\,d\tau = f(t)$$

с ядром в виде функции Грина для краевой задачи $x(t) = -f''(t)$, $f(0) = f(1) = 0$,

$$h(t,\tau) = \begin{cases} t(1-\tau), & t \le \tau; \\ \tau(1-t), & \tau \le t, \end{cases}$$

где $x(t), f(t) \in X = L_2(0,1)$. Принадлежность искомого решения множеству $\mathcal{M}_{\nu,\rho}(\widetilde{A})$ означает его гладкость, а параметр ν характеризует порядок дифференцируемости $x^\dagger(t)$. Хорошо известно (напр., [4]), что интегральный оператор $\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$ действует из $L_2(0,1)$ в соболевское пространство $W_2^2(0,1)$, т.е. в наших обозначениях принадлежит классу $\mathcal{H}^2$. В этом случае условию (3) удовлетворяют, например, ортопроекторы на подпространство тригонометрических многочленов и на систему полиномов Лежандра.

В рамках данной работы будем считать, что в (1) $A \in \mathcal{H}^r$, $r = 1, 2, \dots$, а решение $x^\dagger$ принадлежит $\mathcal{M}_{\nu,\rho}(A)$, где неизвестный параметр ν полагается принадлежащим некоторому ограниченному интервалу $(0, \nu_1]$. Для случая, когда точное значение ν известно, задача построения экономичного метода решения (1) изучалась ранее автором, например, в [5].

Характерной чертой некорректных задач является потеря точности нахождения решения по сравнению с точностью задания исходных данных. Так, наилучшая гарантированная точность восстановления решений из $\mathcal{M}_{\nu,\rho}(A)$ определяется (напр., [6], с. 14) величиной $\rho^{1/(\nu+1)}\delta^{\nu/(\nu+1)}$. Предполагаемый алгоритм решения (1) должен отвечать двум требованиям: во-первых, достигать на всем классе уравнений (1) оптимальную по порядку точность $O(\delta^{\nu/(\nu+1)})$, а во-вторых, быть экономичным в смысле затрат упомянутой дискретной информации.

2. Схема дискретизации

В силу принятых выше предположений задача (1) является неустойчивой к возмущениям правой части. Стандартным приемом для обеспечения устойчивости решаемого уравнения является его регуляризация. В качестве регуляризатора воспользуемся обобщенным методом Тихонова [1], который состоит в отыскании приближенного решения (1) из уравнения II рода

$$(A^*A)^{q+1}x_{\alpha,\delta} + \alpha^{q+1}x_{\alpha,\delta} = (A^*A)^q A^* f_\delta, \tag{4}$$

где $q \geq -1/2$, α — параметр регуляризации. Для порождающей системы функций метода (4) $g_\alpha(\lambda) = \lambda^q(\alpha^{q+1} + \lambda^{q+1})^{-1}$ справедливы оценки [1]

$$\sup_{0\leq\lambda<\infty} g_\alpha(\lambda) \leq \chi_0\alpha^{-1}, \quad \sup_{0\leq\lambda<\infty} \lambda^{1/2}g_\alpha(\lambda) \leq \chi_*\alpha^{-1/2}, \quad \sup_{0\leq\lambda<\infty} \lambda^p(1-\lambda g_\alpha(\lambda)) \leq \chi_p\alpha^p, \quad 0 \leq p \leq q+1, \tag{5}$$

где

$$\chi_* = \frac{(2q+1)^{\frac{q+1/2}{q+1}}}{2q+2}, \quad \chi_p = \frac{(q+1-p)^{1-\frac{p}{q+1}}\, p^{\frac{p}{q+1}}}{q+1}.$$

Опишем схему дискретизации, которая будет задействована при решении (1). Возьмем некоторую ограниченную область Ω, принадлежащую множеству $[1,\infty) \times [1,\infty)$ координатной плоскости. Под дискретизацией уравнения (1) согласно Ω будем понимать переход от исходных коэффициентов

$$Ax = \sum_{i,j=1}^{\infty}(Ae_j, e_i)(x, e_j)e_i, \quad f_\delta = \sum_{k=1}^{\infty}(f_\delta, e_k)e_k$$

решаемой задачи к конечномерным элементам

$$A_\Omega x = \sum_{(i,j)\in\Omega}(Ae_j, e_i)(x, e_j)e_i, \quad P_\Omega f_\delta = \sum_{k\in\{\forall i:(i,j)\in\Omega\}}(f_\delta, e_k)e_k,$$

где $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис, фигурирующий в определении класса $\mathcal{H}^r$. Обозначим через $\mathrm{card}(\Omega)$ число точек (i,j) координатной плоскости, входящих в множество Ω. Более экономичным будем считать тот алгоритм, который использует дискретизацию с меньшим значением $\mathrm{card}(\Omega)$. Нашей целью является построение экономичного алгоритма, гарантирующего точность решения $O(\delta^{\nu/(\nu+1)})$ на исследуемом классе уравнений.

Для стандартной галеркинской дискретизации ($\Omega = [1,m] \times [1,l]$) эта задача была решена в [1], где оптимальные значения m и l выбирались из условия $m = O(\delta^{-1/r})$, $l = O(\delta^{-1/r})$. Отсюда

$$\mathrm{card}([1,m] \times [1,l]) = O(\delta^{-2/r}).$$

Приведенный результат был улучшен при $\nu_1 = 1$ (т.е. для любого неизвестного $\nu \in (0,1]$) в [2] за счет выбора другой области

$$\Omega = \Gamma_n := \{1\} \times [1, 2^{2n}] \bigcup_{k=1}^{2n} (2^{k-1}, 2^k] \times [1, 2^{2n-k}]$$

и адаптивной стратегии дискретизации, состоящей в согласовании уровня дискретизации $n = n(\alpha)$ с параметром регуляризации α. Оператор A_Ω в этом случае принимает вид

$$A_\Omega = A_n := \sum_{k=1}^{2n} (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A P_{2^{2n-k}} + P_1 A P_{2^{2n}}, \tag{6}$$

где, как и прежде, P_m — ортопроектор на линейную оболочку первых m элементов базиса $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. В качестве регуляризатора в [2] был использован стандартный метод Тихонова (см. (4) при $q = 0$), а полученная при этом оценка информационных затрат имеет вид

$$\operatorname{card}(\Gamma_n) = O(\delta^{-\frac{\nu+2}{(\nu+1)r}} \log^{1+1/r} 1/\delta).$$

Нам предстоит обобщить результат [2] на случай произвольного $0 < \nu_1 < \infty$ путем применения обобщенного метода Тихонова (4), где $q \geq (\nu_1 - 1)/2$, с сохранением дискретизации согласно (6).

3. Вспомогательные утверждения

Для произвольного оператора $A \in \mathcal{C}(X)$ запишем его сингулярное разложение $Ax = \sum_k \lambda_k \varphi_k (x, \psi_k)$, где $\varphi_k, \psi_k \in X$ — сингулярные элементы A, а λ_k — соответствующие им сингулярные значения. Тогда для элемента $x_\alpha = g_\alpha(A^*A)A^* f$ выполняется

$$\|Ax_\alpha - f\|^2 = \alpha^{\nu+1} |d_{\nu,\alpha}(u)|^2, \tag{7}$$

$$\|x^\dagger - x_\alpha\|^2 = \alpha^\nu |c_{\nu,\alpha}(u)|^2, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} |d_{\nu,\alpha}(u)|^2 &= \alpha^{2q-\nu+1} \sum_k \frac{\lambda_k^{2(\nu+1)} (u, \psi_k)^2}{(\alpha^{q+1} + \lambda_k^{2(q+1)})^2}, \\ |c_{\nu,\alpha}(u)|^2 &= \alpha^{2(q+1)-\nu} \sum_k \frac{\lambda_k^{2\nu} (u, \psi_k)^2}{(\alpha^{q+1} + \lambda_k^{2(q+1)})^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Для функций $d_{\nu,\alpha}(u)$ и $c_{\nu,\alpha}(u)$ справедливы следующие оценки.

Лемма 1. *Имеют место неравенства*

$$|c_{\nu,\alpha}(u)| \leq |d_{\nu,\alpha}(u)|^{\nu/(\nu+1)} \|u\|^{1/(\nu+1)}, \quad |d_{\nu,\alpha}(u)| \leq \|u\|.$$

Доказательство леммы состоит в применении неравенства Гёльдера к (9).

Лемма 2. *При любых $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{H}^r$ справедлива оценка*

$$\|x^\dagger - g_\alpha(A_n^* A_n) A_n^* f_\delta\| \leq |c_{\nu,\alpha}(u)| \alpha^{\nu/2} + \chi_* \delta / \sqrt{\alpha} + \frac{\|x^\dagger\|}{\alpha} (\sigma \|A^*A - A_n^* A_n\| + \chi_0 \|(A^* - A_n^*) A_n\|),$$

где $\sigma = \sum_{j=0}^{q} \chi_j \chi_{q-j}$.

Доказательство. Представим погрешность в виде

$$x^\dagger - g_\alpha(A_n^* A_n) A_n^* f_\delta = (x^\dagger - g_\alpha(A^*A)A^*f) + g_\alpha(A_n^*A_n)A_n^*(f - f_\delta) + (g_\alpha(A^*A)A^*f - g_\alpha(A_n^*A_n)A_n^*f). \tag{10}$$

Требуется оценить все слагаемые из правой части (10). Соотношение (8) дает оценку первого слагаемого. Для оценки второго слагаемого воспользуемся (5)

$$\|g_\alpha(A_n^*A_n)A_n^*(f - f_\delta)\| \le \|f - f_\delta\| \sup_{0\le\lambda<\infty} \lambda^{1/2} g_\alpha(\lambda) \le \chi_* \delta/\sqrt{\alpha}. \tag{11}$$

Третье слагаемое перепишем

$$g_\alpha(A^*A)A^*f - g_\alpha(A_n^*A_n)A_n^*f = T_1 x^\dagger + T_2 x^\dagger, \tag{12}$$

где

$$T_1 = g_\alpha(A^*A)A^*A - g_\alpha(A_n^*A_n)A_n^*A_n, \quad T_2 = g_\alpha(A_n^*A_n)A_n^*(A_n - A).$$

Согласно определению порождающей системы функций имеем

$$\begin{aligned} T_1 &= (A^*A)^{q+1}(\alpha^{q+1}I + (A^*A)^{q+1})^{-1} - (A_n^*A_n)^{q+1}(\alpha^{q+1}I + (A_n^*A_n)^{q+1})^{-1} = \\ &= (A^*A)^{q+1}[(\alpha^{q+1}I + (A^*A)^{q+1})^{-1} - (\alpha^{q+1}I + (A_n^*A_n)^{q+1})^{-1}] + \\ &+[(A^*A)^{q+1} - (A_n^*A_n)^{q+1}](\alpha^{q+1}I + (A_n^*A_n)^{q+1})^{-1} = \\ &= \alpha^{q+1}\sum_{j=0}^{q}(\alpha^{q+1}I + (A^*A)^{q+1})^{-1}(A^*A)^j(A^*A - A_n^*A_n)(A_n^*A_n)^{q-j}(\alpha^{q+1}I + (A_n^*A_n)^{q+1})^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\|T_1\| \le \sum_{j=0}^{q} \chi_j \alpha^j \chi_{q-j} \alpha^{q-j} \frac{\|A^*A - A_n^*A_n\|}{\alpha^{q+1}} \le \frac{\|A^*A - A_n^*A_n\|}{\alpha} \sum_{j=0}^{q} \chi_j \chi_{q-j}. \tag{13}$$

С учетом (5) находим

$$\|T_2\| \le \|g_\alpha(A_n^*A_n)\| \|A_n^*(A_n - A)\| \le \frac{\chi_0}{\alpha} \|(A^* - A_n^*)A_n\|. \tag{14}$$

Комбинация (8), (10)–(14) дает искомую оценку. □

Лемма 3. *При любых* $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{H}^r$ *выполняется*

$$\|Ax_\alpha - f\| \le \|A_n g_\alpha(A_n^*A_n)A_n^* f_\delta - P_\Omega f_\delta\| + (\|(I - P_\Omega)f\|^2 + \delta^2)^{1/2} + \frac{\|AA^* - A_nA_n^*\|}{\sqrt{\alpha}} \|x^\dagger\| \widehat{\sigma},$$

где $P_\Omega = P_{2^{2n}}$, $\widehat{\sigma} = \sum_{j=0}^{q} \chi_j \chi_{q-j+1/2}$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$Ax_\alpha - f := Ag_\alpha(A^*A)A^*f - f = F_1 + F_2 + F_3, \tag{15}$$

где

$$F_1 = -(I - A_n g_\alpha(A_n^*A_n)A_n^*)(f - P_\Omega f_\delta), \quad F_2 = (Ag_\alpha(A^*A)A^* - A_n g_\alpha(A_n^*A_n)A_n^*)f,$$
$$F_3 = A_n g_\alpha(A_n^*A_n)A_n^* f_\delta - P_\Omega f_\delta.$$

Для доказательства леммы достаточно оценить нормы элементов F_1 и F_2. Очевидна оценка $\|I - g_\alpha(A_nA_n^*)A_nA_n^*\| \le 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|F_1\| &\le \|I - A_n g_\alpha(A_n^*A_n)A_n^*\| \, \|f - P_\Omega f_\delta\| \le \\ &\le \|I - g_\alpha(A_nA_n^*)A_nA_n^*\| \, \|(I - P_\Omega)f + P_\Omega(f - f_\delta)\| \le (\|(I - P_\Omega)f\|^2 + \delta^2)^{1/2}. \end{aligned} \tag{16}$$

Для элемента F_2 справедливо представление

$$F_2 = [(AA^*)^{q+1}(\alpha^{q+1}I + (AA^*)^{q+1})^{-1} - (A_nA_n^*)^{q+1}(\alpha^{q+1}I + (A_nA_n^*)^{q+1})^{-1}]f =$$
$$= [(AA^*)^{q+1} - (A_nA_n^*)^{q+1}](\alpha^{q+1}I + (AA^*)^{q+1})^{-1}f + (A_nA_n^*)^{q+1} \times$$
$$\times [I - (\alpha^{q+1}I + (A_nA_n^*)^{q+1})^{-1}(\alpha^{q+1}I + (AA^*)^{q+1})](\alpha^{q+1}I + (AA^*)^{q+1})^{-1}f =$$
$$= (\alpha^{q+1}I + (A_nA_n^*)^{q+1})^{-1}[(AA^*)^{q+1} - (A_nA_n^*)^{q+1}](\alpha^{q+1}I + (AA^*)^{q+1})^{-1}Ax^\dagger/\alpha^{q+1} =$$
$$= \alpha^{q+1}\sum_{j=0}^{q}(\alpha^{q+1}I + (A_nA_n^*)^{q+1})^{-1}(A_nA_n^*)^j(AA^* - A_nA_n^*)^{q-j}(\alpha^{q+1}I + (AA^*)^{q+1})^{-1}Ax^\dagger.$$

Тогда

$$\|F_2\| \le \frac{\|x^\dagger\|\,\|AA^* - A_nA_n^*\|}{\alpha^{q+1}}\sum_{j=0}^{q}\chi_j\alpha^j\chi_{q-j+1/2}\alpha^{q-j+1/2} = \frac{\|x^\dagger\|\,\|AA^* - A_nA_n^*\|}{\sqrt{\alpha}}\sum_{j=0}^{q}\chi_j\chi_{q-j+1/2}. \quad (17)$$

Объединяя (15)–(17), получаем искомое неравенство. □

4. Экономичный алгоритм

В рамках исследуемого алгоритма уровень дискретизации n не фиксирован заранее, а зависит от текущего значения параметра α и вычисляется согласно правилу

$$c_1 2^{-2rn} n = \frac{\delta\sqrt{\alpha_l}}{\rho(\chi_0 + \sigma)}, \quad (18)$$

где $c_1 = 1 + 2^{r+3}$, а α_l — текущее значение параметра α на l-м шаге итерации.

Как следует из работы [2], при таком выборе $n(\alpha_l)$ оператор A_n (6) обладает следующими аппроксимационными свойствами.

Лемма 4. *Пусть параметры n и α_l связаны соотношением* (18). *Тогда для любого $A \in \mathcal{H}^r$ выполняется*

$$\|A^*A - A^*_{n(\alpha_l)}A_{n(\alpha_l)}\| \le \delta\sqrt{\alpha_l}/\rho, \quad \|(A - A_{n(\alpha_l)})A^*\| \le \delta\sqrt{\alpha_l}/\rho,$$
$$\|(A^* - A^*_{n(\alpha_l)})A_{n(\alpha_l)}\| \le \delta\sqrt{\alpha_l}/\rho,$$
$$\|A - A_{n(\alpha_l)}\| \le (\delta\sqrt{\alpha_l})^{1/2}, \quad \|(I - P_{2^{2n(\alpha_l)}})A\| \le \delta/\rho.$$

Предлагаемый алгоритм состоит в следующем. Предварительно устанавливаются значения параметров $\alpha_0 > 0$, $0 < \Theta < 1$, $q \ge (\nu_1 - 1)/2$, $b > \sqrt{2} + 1$. На каждом шаге итерации $l = 1, 2, \ldots$ находятся новые значения α и n согласно формулам

$$\alpha = \alpha_l := \Theta^l\alpha_0 \quad (19)$$

и (18) соответственно. Затем вычисляются значения скалярных произведений

$$(f_\delta, e_k), \quad (Ae_j, e_i) \quad (20)$$

с номерами $k \in (2^{2n(\alpha_{l-1})}, 2^{2n(\alpha_l)}]$, $(i,j) \in \Gamma_{n(\alpha_l)} \setminus \Gamma_{n(\alpha_{l-1})}$.

Промежуточное решение $\widehat{x}_l$ находится из уравнения

$$\alpha_l^{q+1}\widehat{x}_l + (A^*_{n(\alpha_l)}A_{n(\alpha_l)})^{q+1}\widehat{x}_l = (A^*_{n(\alpha_l)}A_{n(\alpha_l)})^q A^*_{n(\alpha_l)}f_\delta. \quad (21)$$

Правило остановки вычислительного процесса выполняется по принципу невязки (напр., [7]), т. е. процедура завершается на шаге с таким номером L, что

$$\|A_{n(\alpha_L)}\widehat{x}_L - P_{2^{2n(\alpha_L)}}f_\delta\| \le b\delta, \quad (22)$$
$$\|A_{n(\alpha_l)}\widehat{x}_l - P_{2^{2n(\alpha_l)}}f_\delta\| > b\delta \quad \forall l < L. \quad (23)$$

В качестве приближенного решения берется элемент $\widehat{x}_L$.

Лемма 5. *Пусть $\alpha = \alpha_L$ удовлетворяет принципу невязки* (22), (23), *где $b > \sqrt{2}+1$. Тогда найдутся константы $b_1, b_2 > 0$ такие, что при любом $A \in \mathcal{H}^r$*

$$b_1\delta \le \|Ax_{\alpha_L} - f\| \le b_2\delta.$$

Доказательство. Для нахождения верхней оценки достаточно воспользоваться леммами 3 (при $\alpha = \alpha_L$) и 4, а также соотношением (22)

$$\|Ax_{\alpha_L} - f\| \le (b + \sqrt{2} + 1)\delta.$$

Чтобы установить нижнюю оценку, применим к (15), где $\alpha = \alpha_{L-1}$, неравенство треугольника

$$\|Ax_{\alpha_{L-1}} - f\| \ge \|A_{n(\alpha_{L-1})}\widehat{x}_{L-1} - P_{2^{2n(\alpha_{L-1})}} f_\delta\| - (\sqrt{2}+1)\delta. \tag{24}$$

Учитывая (7), находим

$$\|Ax_{\alpha_L} - f\|^2 = \sum_k \lambda_k^{2(\nu+1)} \left(\frac{\alpha_L^{q+1}}{\alpha_L^{q+1} + \lambda_k^{2(q+1)}}\right)^2 (v,\psi_k)^2 =$$

$$= \Theta^{2(q+1)} \sum_k \lambda_k^{2(\nu+1)} \left(\frac{\alpha_{L-1}^{q+1}}{\Theta^{q+1}\alpha_{L-1}^{q+1} + \lambda_k^{2(q+1)}}\right)^2 (v,\psi_k)^2 >$$

$$> \Theta^{2(q+1)} \sum_k \lambda_k^{2(\nu+1)} \left(\frac{\alpha_{L-1}^{q+1}}{\alpha_{L-1}^{q+1} + \lambda_k^{2(q+1)}}\right)^2 (v,\psi_k)^2.$$

Следовательно,

$$\|Ax_{\alpha_L} - f\| > \Theta^{q+1}\|Ax_{\alpha_{L-1}} - f\|. \tag{25}$$

Подставляя в (25) соотношения (23) и (24), получаем

$$\|Ax_{\alpha_L} - f\| > \Theta^{q+1}(b - \sqrt{2} - 1)\delta.$$

Таким образом, утверждение леммы доказано при $b_1 = \Theta^{q+1}(b - \sqrt{2} - 1)$, $b_2 = b + \sqrt{2} + 1$. □

5. Квазиоптимальность алгоритма

Теорема. *Пусть $A \in \mathcal{H}^r$ и $x^\dagger \in \mathcal{M}_{\nu,\rho}(A)$, $0 < \nu \le \nu_1$. Оптимальный порядок точности $O(\delta^{\nu/(\nu+1)})$ на заданном классе уравнений* (1) *реализуется в рамках алгоритма* (18)–(23). *Объем задействованной при этом дискретной информации вида (Ae_j, e_i) имеет порядок $O(\delta^{-\frac{\nu+2}{(\nu+1)r}} \log^{1+1/r}(\delta^{-1}))$.*

Доказательство. Оценка погрешности для предлагаемого алгоритма следует из лемм 2, 4

$$\|x^\dagger - \widehat{x}_L\| \le |c_{\nu,\alpha}(u)|\alpha_L^{\nu/2} + \frac{\delta}{\sqrt{\alpha_L}}(\chi_* + \chi_0 + \sigma). \tag{26}$$

Учитывая правила (18), (23) для выбора параметров n и L соответственно, при помощи лемм 1, 5 и соотношения (7) получаем

$$\begin{gathered} \delta/\sqrt{\alpha_L} \le (\rho/b_1)^{1/(\nu+1)}\chi_{(\nu+1)/2}\delta^{\nu/(\nu+1)}, \\ |c_{\nu,\alpha}(u)|\alpha_L^{\nu/2} \le \rho^{1/(\nu+1)}(b_2\delta)^{\nu/(\nu+1)}. \end{gathered} \tag{27}$$

Подстановка найденных выше оценок в (26) приводит к неравенству

$$\|x^\dagger - \widehat{x}_L\| \le \big((\chi_* + \chi_0 + \sigma)b_1^{-1/(\nu+1)}\chi_{(\nu+1)/2} + b_2^{\nu/(\nu+1)}\big)\rho^{1/(\nu+1)}\delta^{\nu/(\nu+1)}.$$

Тем самым для алгоритма (18)–(23) установлен оптимальный порядок точности.

Для завершения доказательства осталось оценить объем N дискретной информации вида (Ae_j, e_i), использованной при построении оператора A_n (6). Для этого, учитывая (27), вычислим

$$(\delta\sqrt{\alpha_L})^{-1/r} \le \delta^{-1/r} O(\delta^{-\frac{1}{(\nu+1)r}}) = O(\delta^{-\frac{\nu+2}{(\nu+1)r}}).$$

Тогда с учетом (18) имеем

$$N = (n+1)2^{2n} = O((\delta\sqrt{\alpha_L})^{-1/r}) n^{1+1/r} \le O(\delta^{-\frac{\nu+2}{(\nu+1)r}}) n^{1+1/r} = O(\delta^{-\frac{\nu+2}{(\nu+1)r}} \log^{1+1/r} 1/\delta). \quad \square$$

Литература

1. Plato R., Vainikko G. *On the regularization of projection methods for solving ill-posed problems* // Numer.Math. – 1990. – V. 57. – P. 63–79.
2. Maass P., Pereverzev S.V., Ramlau R., Solodky S.G. *An adaptive discretization for Tikhonov–Phillips regularization with a posteriori parameter selection* // Numer. Math. – 2001. – V. 87. – P. 485–502.
3. Солодкий С.Г. *Адаптивная дискретизация некорректных задач* // Докл. РАН. – 2002. – Т. 382. – № 4. – С. 460–462.
4. Louis A.K. *Inverse und schlecht gestellte Probleme.* – Stuttgart: Teubner, 1989. – 205 S.
5. Солодкий С.Г. *О модификации проекционной схемы решения некорректных задач* // Изв.вузов.Математика. – 1998. – № 11. – С. 83–90.
6. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. *Итерационные процедуры в некорректных задачах.* – М.: Наука, 1986. – 182 с.
7. Морозов В.А. *О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1966. – Т. 6. – № 1. – С. 170–175.

Институт математики Национальной академии наук Украины

Поступила
20.08.2004