И З В Е С Т И Я В Ы С Ш И Х У Ч Е Б Н Ы Х З А В Е Д Е Н И Й

2002 МАТЕМАТИКА № 1 (476)

УДК 512.532

В.Н. САЛИЙ

ИДЕМПОТЕНТНЫЕ ПОЛУГРУППЫ С ТРАНЗИТИВНЫМ ОТНОШЕНИЕМ КОММУТАТИВНОСТИ

Работа посвящена идемпотентным полугруппам, в которых выполняется квазитождество $xy = yx \,\&\, yz = zy \Rightarrow xz = zx$ (транзитивность коммутативности). Показано, что эти полугруппы являются в точности прямоугольными связками полурешеток и в совокупности образуют наименьшее квазимногообразие полугрупп, содержащее все полурешетки и все прямоугольные связки (теорема 1). Основной результат (теорема 2) утверждает, что идемпотентные полугруппы с транзитивной коммутативностью, и только такие полугруппы, вложимы в квазибулевы степени прямоугольных полугрупп. Материалы статьи были представлены автором в сообщении [1].

Напомним некоторые необходимые понятия и факты, связанные с идемпотентными полугруппами (см. [2]). Полурешетка — это идемпотентная коммутативная полугруппа. Полугруппа называется прямоугольной, если она удовлетворяет тождеству $xyx = x$. Такие полугруппы, очевидно, идемпотентны. Кроме того, они антикоммутативны в том смысле, что в них никакие два различных элемента не перестановочны. Любая идемпотентная полугруппа B разложима в полурешетку прямоугольных полугрупп, т.е. на B существует конгруэнция ε такая, что каждый ε-класс является прямоугольной полугруппой, а факторполугруппа B/ε — полурешеткой. Идемпотентная полугруппа по определению нормальна, если в ней имеет место тождество $xyzx = xzyx$ (или, по виду более общее, но равносильное ему, тождество $xyzt = xzyt$). Многообразие нормальных идемпотентных полугрупп является наименьшим полугрупповым многообразием, содержащим многообразие полурешеток и многообразие прямоугольных полугрупп.

Пусть Q обозначает квазимногообразие идемпотентных полугрупп с транзитивным отношением коммутативности.

Теорема 1. 1) *Полугруппа B принадлежит квазимногообразию Q тогда и только тогда, когда B является прямоугольной связкой полурешеток*;

2) *квазимногообразие Q является наименьшим полугрупповым квазимногообразием, содержащим многообразие полурешеток и многообразие прямоугольных полугрупп.*

Доказательство. 1) Пусть полугруппа B представляет собой прямоугольную связку полурешеток, т.е. на ней существует конгруэнция ε такая, что ε-классы являются полурешетками, а факторполугруппа B/ε — прямоугольной полугруппой. Если элементы $x, y \in B$ перестановочны, то $\varepsilon(x)\varepsilon(y) = \varepsilon(xy) = \varepsilon(yx) = \varepsilon(y)\varepsilon(x)$, откуда в силу антикоммутативности полугруппы B/ε получаем $\varepsilon(x) = \varepsilon(y)$, т.е. x и y лежат в одном ε-классе. Из $yz = zy$ следует, что и z лежит в том же ε-классе. Следовательно, элементы x и z перестановочны как элементы полурешетки $\varepsilon(x)$. Таким образом, отношение коммутативности в полугруппе B транзитивно.

Обратно, пусть B — идемпотентная полугруппа с транзитивным отношением коммутативности $\theta = \{(x,y) \in B \times B \mid xy = yx\}$. Так как $(xyx, x), (x, xzx) \in \theta$, то $(xyx, xzx) \in \theta$, откуда $xyxzx = xzxyx$. Пусть θ^* обозначает отношение регулярной сопряженности на B, т.е. $\theta^* = \{(x,y) \in B \times B \mid xyx = x \,\&\, yxy = y\}$. Известно ([3], с. 402), что θ^* является конгруэнцией на любой идемпотентной полугруппе. В нашем случае $(xy, xyx), (zx, xzx) \in \theta^*$ и, значит, $(xyzx, xyxzx) \in \theta^*$. Аналогично из $(xzx, xz), (xyx, yx) \in \theta^*$ следует $(xzxyx, xzyx) \in \theta^*$. В силу транзитивности $(xyzx, xzyx) \in \theta^*$. С другой стороны, $(xyzx, xzyx) \in \theta$, поскольку $(xyzx, x) \in \theta$ и $(x, xzyx) \in \theta$. Так как $\theta \cap \theta^* = \Delta$ (тождественное отношение), то $xyzx = xzyx$. Таким образом, каждая идемпотентная полугруппа с транзитивной коммутативностью нормальна. Но тогда отношение θ будет конгруэнцией на B: если $(x, y), (z, t) \in \theta$, то $xz \cdot yt = xyzt = yxtz = yt \cdot xz$, т. е. $(xz, yt) \in \theta$. При этом каждый θ-класс является полурешеткой, а факторполугруппа B/θ – прямоугольной полугруппой. Следовательно, B – прямоугольная связка полурешеток.

2) Как следует из доказательства первого утверждения теоремы, на каждой полугруппе B из квазимногообразия Q имеются конгруэнции θ (отношение коммутативности) и θ^* (отношение регулярной сопряженности) такие, что $\theta \cap \theta^* = \Delta$. Следовательно, B разлагается в подпрямое произведение факторполугрупп B/θ и B/θ^*, первая из которых — прямоугольная полугруппа, а вторая — полурешетка. Значит, любое квазимногообразие полугрупп, содержащее все полурешетки и все прямоугольные полугруппы, содержит квазимногообразие Q. $\square$

Как установлено в доказательстве теоремы 1, квазимногообразие Q включается в многообразие всех нормальных идемпотентных полугрупп. Следующий пример показывает, что это включение собственное: идемпотентная полугруппа $B = \{x, y, 0\}$, где 0 — нулевой элемент и $xy = x, yx = y$, нормальна, но не принадлежит Q, т. к. x и y перестановочны с нулем, однако $xy \neq yx$.

К числу прямоугольных полугрупп относятся, в частности, левосингулярные полугруппы, или полугруппы левых нулей ($xy = x$) и правосингулярные полугруппы, или полугруппы правых нулей ($xy = y$). В ([4], теорема 3) было установлено, что наименьшее полугрупповое квазимногообразие, содержащее многообразие левосингулярных (соответственно правосингулярных) полугрупп и многообразие полурешеток, выделяется из квазимногообразия идемпотентных полугрупп с транзитивной коммутативностью дополнительным тождеством $xyx = xy$ (соответственно $xyx = yx$).

Теперь перейдем к описанию полугрупп, вложимых в квазибулевы степени прямоугольных полугрупп.

Ортогональной системой в полной решетке L называется подмножество $\lambda = \{l_i \mid i \in I\} \subseteq L$ такое, что $l_i \wedge l_j = 0$ при $i \neq j$. Ортогональная система λ по определению независима, если $\bigvee_{j \in J} l_j \wedge \bigvee_{k \in K} l_k = 0$ для любого разбиения $I = J \cup K$, $J \cap K = \emptyset$. Под квазибулевой решеткой понимается полная решетка с дополнениями, в которой каждая ортогональная система независима. Всякая полная булева решетка является квазибулевой, но в общем случае квазибулева решетка не обязана быть ни дистрибутивной, ни модулярной. Полная решетка с дополнениями тогда и только тогда будет квазибулевой, когда она допускает $\wedge$-гомоморфизм на полную булеву решетку, который сохраняет точные верхние грани ортогональных систем и при котором единственным прообразом нуля является нуль и единственным прообразом единицы — единица ([2], с. 271–272). Такой $\wedge$-гомоморфизм называется каноническим.

Если L — квазибулева решетка и S — полугруппа, то L-степенью полугруппы S называется группоид $S[L]$, элементами которого являются всевозможные отображения $\nu : S \to L$ такие, что 1) $\nu(a) \wedge \nu(b) = 0$ при $a \neq b$, 2) $\bigvee_{a \in S} \nu(a) = 1$, а умножение определяется формулой

$$(\mu\nu)(a) = \bigvee_{a=bc} (\mu(b) \wedge \nu(c))$$

для любых $a \in S$, $\mu, \nu \in S[L]$. Когда L пробегает класс всех полных булевых алгебр, получаем булевы степени полугруппы S. Все они будут полугруппами и, более того, сохраняют эквациональную теорию полугруппы S. В общем случае квазибулевы степени полугруппы не обязаны быть полугруппами, т.е. ассоциативными группоидами. Подробнее о квазибулевых степенях полугрупп см. в [5].

Следующая теорема характеризует полугруппы, вложимые в группоиды, являющиеся квазибулевыми степенями прямоугольных полугрупп.

Теорема 2. *Полугруппа B тогда и только тогда вложима в подходящую квазибулеву степень некоторой прямоугольной полугруппы, когда B — идемпотентная полугруппа с транзитивным отношением коммутативности.*

Доказательство. Необходимость. Пусть S — прямоугольная полугруппа и L — квазибулева решетка. Квазибулева степень $S[L]$ является идемпотентным группоидом. Действительно, для $\nu \in S[L]$ выполняется $\nu(a) \wedge \nu(b) = 0$ при $a \neq b$, так что для произвольного $a \in S$ имеем

$$(\nu\nu)(a) = \bigvee_{a=bc} (\nu(b) \wedge \nu(c)) = \bigvee_{a=bb} (\nu(b) \wedge \nu(b)) = \bigvee_{a=b} \nu(b) = \nu(a),$$

т. е. $\nu\nu = \nu$.

Покажем, что в $S[L]$ отношение коммутативности θ транзитивно. Пусть $f_0 : L \to L_0$ — канонический $\wedge$-гомоморфизм квазибулевой решетки L на полную булеву решетку L_0. Полагая $f(\nu)(a) = f_0(\nu(a))$ для любых $a \in S$, $\nu \in S[L]$, получаем отображение квазибулевой степени $S[L]$ полугруппы S на булеву степень $S[L_0]$ этой полугруппы. Оно является гомоморфизмом (см. [6]). Оказывается, ядро этого гомоморфизма $\operatorname{Ker} f$ совпадает с отношением коммутативности θ в группоиде $S[L]$, т. е. $f(\mu) = f(\nu)$ тогда и только тогда, когда $\mu\nu = \nu\mu$.

В самом деле, пусть $f(\mu) = f(\nu)$. Тогда из свойств канонического $\wedge$-гомоморфизма f_0 следует, что $\mu(a) \wedge \nu(b) = 0$ при $a \neq b$, и для произвольного $a \in S$ получаем

$$(\mu\nu)(a) = \bigvee_{a=bc} (\mu(b) \wedge \nu(c)) = \bigvee_{a=bb=b} (\mu(b) \wedge \nu(b)) =$$
$$= \mu(a) \wedge \nu(a) = \nu(a) \wedge \mu(a) = \bigvee_{a=bc} (\nu(b) \wedge \mu(c)) = (\nu\mu)(a),$$

откуда $\mu\nu = \nu\mu$, так что $\operatorname{Ker} f \subseteq \theta$. Обратно, если $\mu\nu = \nu\mu$, то $f(\mu)f(\nu) = f(\mu\nu) = f(\nu\mu) = f(\nu)f(\mu)$, а т. к. $S[L_0]$ — прямоугольная полугруппа, то $f(\mu) = f(\nu)$. Следовательно, $\theta \subseteq \operatorname{Ker} f$.

Поскольку отношение $\theta = \operatorname{Ker} f$ является конгруэнцией группоида $S[L]$, оно транзитивно. Таким образом, любая полугруппа B, вложимая в квазибулеву степень прямоугольной полугруппы, идемпотентна и имеет транзитивное отношение коммутативности.

Достаточность. Пусть полугруппа B идемпотентна и имеет транзитивное отношение коммутативности θ. Как показано в доказательстве теоремы 1, отношение θ является конгруэнцией на B. При этом все θ-классы будут полурешетками, а факторполугруппа $S_0 = B/\theta$ – прямоугольной полугруппой.

Объединяя естественные упорядоченности, существующие на θ-классах как на полурешетках, получаем порядок на всей полугруппе B, именно $x \leqslant y \Leftrightarrow xy = yx = x$. Так как B — нормальная полугруппа, то из $x \leqslant y$ и $z \leqslant t$ следует $xz \cdot yt = xyzt = xz$, откуда $xz \leqslant yt$ и, значит, порядок $\leqslant$ устойчив относительно умножения в B.

Прямоугольная полугруппа S_0 разлагается в прямое произведение $U_0 \times V_0$, где U_0 — левосингулярная, а V_0 — правосингулярная полугруппы. При этом, если для $a, b \in S_0$ их образами в прямом произведении $U_o \times V_0$ являются пары (u_i, v_k) и (u_j, v_l) соответственно, то элементу ab сопоставляется пара (u_i, v_l) (см. [2], с. 32).

Положим $L_0 = \mathcal{P}(U_0 \cup V_0)$ (множество всех подмножеств объединения компонент декартова произведения $U_0 \times V_0 = S_0$). Квазибулева решетка L получится из булевой решетки L_0 путем замены некоторых элементов решетки L_0 полными решетками с последующим доопределением возникающего порядка до решеточного. Через $\mathcal{I}(u_i, v_k)$ обозначим решетку всех идеалов полурешетки (u_i, v_k) (это θ-класс в B). В решетке L_0 заменим элемент $(U_0 \cup V_0) \setminus \{u_i, v_k\}$ решеткой $\mathcal{I}(u_i, v_k)$.

Пара $\{x, y\} \subseteq B$ называется правильной, если она образует подполугруппу в B. Например, если $x \in (u_i, v_k)$, $y \in (u_i, v_l)$, то $xy \in (u_i, v_l)$ и $yx \in (u_i, v_k)$, откуда $x(yx) = (yx)x = yx$ и $y(xy) = (xy)y = xy$, и, следовательно, $(xy)(yx) = yx$ и $(yx)(xy) = xy$, так что пара $\{xy, yx\}$ правильная. Аналогично, если $x \in (u_i, v_k)$, $z \in (u_j, v_k)$, то $\{xz, zx\}$ — правильная пара.

Пусть $u_i \in U_0$, $v_k, v_l \in V_0$, $v_k \neq v_l$. В L_0 элемент $(U_0 \cup V_0) \setminus \{u_i, v_k, v_l\}$ заменим решеткой $\mathcal{P}(R(u_i, v_k, v_l))$ всех подмножеств множества $R(u_i, v_k, v_l)$, состоящего из всевозможых правильных пар $\{x, y\}$, где $x \in (u_i, v_k)$, $y \in (u_i, v_l)$. Точно так же поступим с элементом $(U_0 \cup V_0) \setminus \{u_i, u_j, v_k\}$, т. е. заменим его решеткой $\mathcal{P}(R(u_i, u_j, v_k))$ всех подмножеств множества $R(u_i, u_j, v_k)$, состоящего из всевозможных правильных пар вида $\{x, z\}$, где $x \in (u_i, v_k)$, $z \in (u_j, v_k)$.

Четверка $\{x, y, z, t\} \subseteq B$ называется правильной, если она образует подполугруппу в B. Например, если $x \in (u_i, v_k)$, $t \in (u_j, v_l)$, где $u_i \neq u_j$, $v_k \neq v_l$, то четверка $\{xt, tx, xtx, txt\}$ будет правильной.

Пусть $u_i, u_j \in U_0$, $u_i \neq u_j$, и $v_k, v_l \in V_0$, $v_k \neq v_l$. В решетке L_0 элемент $(U_0 \cup V_0) \setminus \{u_i, u_j, v_k, v_l\}$ заменим решеткой $\mathcal{P}(R(u_i, u_j, v_k, v_l))$ всех подмножеств множества $R(u_i, u_j, v_k, v_l)$, состоящего из всевозможных правильных четверок $\{x, y, z, t\}$, где $x \in (u_i, v_k)$, $y \in (u_i, v_l)$, $z \in (u_j, v_k)$, $t \in (u_j, v_l)$.

Теперь в множестве L, полученном из L_0 вышеуказанными заменами некоторых элементов, определим порядок, превращающий L в квазибулеву решетку.

1) Сохраним все порядковые связи, которые были в L_0, для оставшихся элементов.

2) Наибольший элемент решетки идеалов $\mathcal{I}(u_i, v_k)$ полурешетки (u_i, v_k) (т. е. сама (u_i, v_k)) считается меньше элемента $(U_0 \cup V_0) \setminus \{u_i\}$ и меньше элемента $(U_0 \cup V_0) \setminus \{v_k\}$.

3) Если $I \in (u_i, v_k)$, $P \subseteq R(u_i, v_k, v_l)$, то положим $I > P \Leftrightarrow (\forall \{x, y\} \in P)(x \in I)$. То же определение принимается и для случая $P \subseteq R(u_i, u_j, v_k)$.

4) Наибольший элемент решетки $\mathcal{P}(R(u_i, u_j, v_k))$, т. е. множество $R(u_i, u_j, v_k)$, считается меньше элемента $(U_0 \cup V_0) \setminus \{u_i, u_j\}$, а наибольший элемент решетки $\mathcal{P}(R(u_i, v_k, v_l))$, т.е. множество $R(u_i, v_k, v_l)$, считается меньше элемента $(U_0 \cup V_0) \setminus \{v_k, v_l\}$.

5) Если $P \subseteq R(u_i, v_k, v_l)$ и $Q \subseteq R(u_i, u_j, v_k, v_l)$, то положим $P > Q \Leftrightarrow (\forall \{x, y, z, t\} \in Q)(\{x, y\} \in P)$. Аналогично, если $P \subseteq R(u_i, u_j, v_k)$, то $P > Q \Leftrightarrow (\forall \{x, y, z, t\} \in Q)(\{x, z\} \in P)$.

6) Наименьший элемент решетки $\mathcal{P}(R(u_i, u_j, v_k, v_l))$ (т. е. пустое подмножество) считается больше любого из элементов вида $(U_0 \cup V_0) \setminus X$, где $\{u_i, u_j, v_k, v_l\} \subset X$.

Утверждаем, что рефлексивно-транзитивное замыкание введенных порядковых соотношений задает на L структуру полной решетки. Нетривиальными здесь представляются следующие случаи.

а) Пусть $I \in \mathcal{I}(u_i, v_k)$, $P \subseteq R(u_i, v_k, v_l)$. Тогда $I \vee P = I \cup I(P)$, где $I(P)$ — идеал полурешетки (u_i, v_k), порожденный элементами x, входящими в пары $\{x, y\} \in P$, и $I \wedge P = P(I) \cap P$, где $P(I)$ — множество всех пар $\{x, y\} \in R(u_i, v_k, v_l)$, в которых $x \in I$.

Если $I_1, I_2 \in \mathcal{I}(u_i, v_k)$, то непосредственно не видно, существует ли точная нижняя грань $I_1 \wedge I_2$, поскольку общими минорантами для I_1 и I_2 будут $I_1 \cap I_2$ и $P(I_1) \cap P(I_2)$, лежащие в разных "встроенных" подрешетках. Однако $P(I_1) \cap P(I_2) = P(I_1 \cap I_2) < I_1 \cap I_2$, откуда $I_1 \wedge I_2 = I_1 \cap I_2$. Аналогично, если $P_1, P_2 \subseteq R(u_i, v_k, v_l)$, то общими мажорантами для P_1 и P_2 будут $P_1 \cup P_2$ и $I(P_1) \cup I(P_2)$. Но поскольку $I(P_1) \cup I(P_2) = I(P_1 \cup P_2) > P_1 \cup P_2$, то $P_1 \vee P_2 = P_1 \cup P_2$.

б) Пусть $P \subseteq R(u_i, v_k, v_l)$, $Q \subseteq R(u_i, u_j, v_k, v_l)$. Тогда $P \vee Q = P \cup P(Q)$, где $P(Q)$ — множество всех пар $\{x, y\}$, входящих в состав четверок $\{x, y, z, t\} \in Q$ (заметим, что если элементы $x \in (u_i, v_k)$, $y \in (u_i, v_l)$, $z \in (u_j, v_k)$, $t \in (u_j, v_l)$ образуют правильную четверку, то правильными будут и все пары $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, t\}$, $\{z, t\}$). Далее, $P \wedge Q = Q(P) \cap Q$, где $Q(P)$ — множество всех четверок $\{x, y, z, t\}$ с $\{x, y\} \in P$.

Если $P_1, P_2 \subseteq R(u_i, v_k, v_l)$, то непосредственно не видно, существует ли точная нижняя грань $P_1 \wedge P_2$, поскольку общими минорантами для P_1 и P_2 будут $P_1 \cap P_2$ и $Q(P_1) \cap Q(P_2)$, лежащие в разных "встроенных" решетках. Однако $Q(P_1) \cap Q(P_2) = Q(P_1 \cap P_2) < P_1 \cap P_2$, откуда $P_1 \wedge P_2 = P_1 \cap P_2$. Аналогично, если $Q_1, Q_2 \in R(u_i, u_j, v_k, v_l)$, то общими мажорантами для Q_1 и Q_2 будут $Q_1 \cup Q_2$ и $P(Q_1) \cup P(Q_2)$. Но поскольку $P(Q_1) \cup P(Q_2) = P(Q_1 \cup Q_2) > Q_1 \cup Q_2$, то $Q_1 \vee Q_2 = Q_1 \cup Q_2$.

Решетка L квазибулева, т. к. отождествлением элементов, входящих в состав каждой из подрешеток, вставленных в L_0 на место элементов видов $(U_0 \cup V_0) \setminus \{u_i, v_k\}$, $(U_0 \cup V_0) \setminus \{u_i, v_k, v_l\}$, $(U_0 \cup V_0) \setminus \{u_i, u_j, v_k\}$, $(U_0 \cup V_0)\{u_i, u_j, v_k, v_l\}$, получим канонический $\wedge$-гомоморфизм на полную булеву решетку L_0.

Теперь нужно выбрать прямоугольную полугруппу S таким образом, чтобы заданная идемпотентная полугруппа B с транзитивной коммутативностью вкладывалась в квазибулеву степень $S[L]$. Для этого присоединим к левосингулярной полугруппе U_0 элемент o и на $U = U_0 \cup \{o\}$ доопределим умножение, полагая $u \cdot o = u$, $o \cdot u = o \cdot o = o$ для любых $u \in U_0$. Присоединим к V_0 элемент ω и в $V = V_0 \cup \{\omega\}$ положим $v \cdot \omega = \omega \cdot \omega = \omega$, $\omega \cdot v = v$ для любого $v \in V_0$. Тогда $S = U \times V$ получает структуру прямоугольной полугруппы.

Вложение полугруппы B в группоид $S[L]$ строится следующим образом. Если $x \in (u_i, v_k)$, то сопоставим этому элементу отображение $\nu_x : S \to L$, полагая

$$\nu_x(u,v) = \begin{cases} I(x), & \text{если } (u,v) = (u_i, v_k); \\ \{v_k\}, & \text{если } (u,v) = (u_i, \omega); \\ \{u_i\}, & \text{если } (u,v) = (o, v_k); \\ \varnothing & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

(здесь $I(x)$ обозначает главный идеал, порожденный элементом x в полурешетке (u_i, v_k)). Очевидно, что $\nu_x \in S[L]$. Соответствие $\nu \mapsto \nu_x$ взаимно однозначно отображает полугруппу B в квазибулеву степень $S[L]$. Действительно, если $\nu_x = \nu_y$, то $I(x) = I(y)$, откуда $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$ и, значит, $x = y$. Покажем, что оно является гомоморфизмом, т. е. что $\nu_{xy} = \nu_x \nu_y$ для любых $x, y \in B$. По определению умножения в $S[L]$ имеем

$$(\nu_x \nu_y)(u,v) = \bigvee_{(u,v)=(u,v^*)(u^*,v)} (\nu_x(u,v^*) \wedge \nu_y(u^*,v)).$$

Требуется рассмотреть три типовых случая.

1. Пусть $y \in (u_i, v_l)$. Тогда

$$\nu_y(u,v) = \begin{cases} I(y), & \text{если } (u,v) = (u_i, v_l); \\ \{v_l\}, & \text{если } (u,v) = (u_i, \omega); \\ \{u_i\}, & \text{если } (u,v) = (o, v_l); \\ \varnothing & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Если $(u,v) = (u_i, v_l)$, то

$$\begin{aligned}(\nu_x\nu_y)(u_i,v_l) = (\nu_x(u_i,v_k) \wedge \nu_y(u_i,v_l)) \vee (\nu_x(u_i,v_k) \wedge \nu_y(o,v_l)) \vee (\nu_x(u_i,\omega) \wedge \nu_y(u_i,v_l)) \vee \\ \vee (\nu_x(u_i,\omega) \wedge \nu_y(o,v_l)) = (I(x) \wedge I(y)) \vee (I(x) \wedge \{u_i\}) \vee (\{v_k\} \wedge I(y)) \vee (\{v_k\} \wedge \{u_i\}) = \\ = (I(x) \wedge I(y)) \vee \{v_k\} = \{\{x^*, y^*\} \in R(u_i, v_k, v_l) \mid x^* \leqslant x \,\&\, y^* \leqslant y\} \vee \{v_k\}.\end{aligned}$$

Так как пары $\{x^*, y^*\}$ правильные и $(u_i, v_k)(u_i, v_l) = (u_i, v_l)$, то $x^* y^* = y^*$. Тогда $y^* = x^* y^* \leqslant xy$. Следовательно, $(\nu_x\nu_y)(u_i,v_l) \leqslant I(xy)$. С другой стороны, пусть $(\nu_x\nu_y)(u_i,v_l) < I(y_0)$. Пара $\{xy, yx\}$ правильная и принадлежит множеству $\{\{x^*, y^*\} \in R(u_i, v_k, v_l) \mid x^* \leqslant x \,\&\, y^* \leqslant y\}$, т. к. $xy \leqslant y$ и $yx \leqslant x$. Но тогда $xy \in I(y_0)$, т. е. $xy \leqslant y_0$ и, значит, $I(xy) \subseteq I(y_0)$. Таким образом, $(\nu_x\nu_y)(u_i,v_l) = I(xy) = \nu_{xy}(u_i,v_l)$.

б) Если $(u,v) = (u_i, \omega)$, то

$$\begin{aligned}(\nu_x\nu_y)(u_i,\omega) = (\nu_x(u_i,v_k) \wedge \nu_y(u_i,\omega)) \vee (\nu_x(u_i,\omega) \wedge \nu_y(u_i,\omega)) = \\ = (I(x) \wedge \{v_l\}) \vee (\{v_k\} \wedge \{v_l\}) = \{v_l\} = \nu_{xy}(u_i,\omega).\end{aligned}$$

в) Если $(u,v) = (o, v_l)$, то

$$\begin{aligned}(\nu_x\nu_y)(o,v_l) = (\nu_x(o,v_k) \wedge \nu_y(u_i,v_l)) \vee (\nu_x(o,v_k) \wedge \nu_y(o,v_l)) = \\ = (\{u_i\} \wedge I(y)) \vee (\{u_i\} \wedge \{u_i\}) = \{u_i\} = \nu_{xy}(o,v_l).\end{aligned}$$

Итак, $\nu_x\nu_y = \nu_{xy}$ в рассматриваемом случае 1.

2. Пусть $z \in (u_j, v_k)$. Здесь рассуждения вполне аналогичны, и, как в случае 1, в итоге получаем $\nu_x\nu_z = \nu_{xz}$.

3. Пусть $t \in (u_j, v_l)$. Тогда

$$\nu_t(u,v) = \begin{cases} I(t), & \text{если } (u,v) = (u_j, v_l); \\ \{v_l\}, & \text{если } (u,v) = (u_j, \omega); \\ \{u_j\}, & \text{если } (u,v) = (o, v_l); \\ \varnothing & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Если $(u,v) = (u_i, v_l)$, то

$$\begin{aligned} (\nu_x\nu_t)(u,v) &= (\nu_x(u_i,v_k) \wedge \nu_t(u_j,v_l)) \vee (\nu_x(u_i,v_k) \wedge \nu_t(o,v_l)) \vee \\ &\quad \vee (\nu_x(u_i,\omega) \wedge \nu_t(u_j,v_l)) \vee (\nu_x(u_i,\omega) \wedge \nu_t(o,v_l)) = \\ &= (I(x) \wedge I(z)) \vee (I(x) \wedge \{u_j\}) \vee (\{v_k\} \wedge I(z)) \vee (\{v_k\} \wedge \{u_j\}) = \\ &= (I(x) \wedge I(z)) \vee \{u_j\} \vee \{v_k\} = \\ &= \{\{x^*, y^*, z^*, t^*\} \in R(u_i, u_j, v_k, v_l) \mid x^* \leqslant x \,\&t^* \leqslant t\} \vee \{u_j\} \vee \{v_k\}. \end{aligned}$$

Так как четверки $\{x^*, y^*, z^*, t^*\}$ правильные, то $y^* = x^*t^* \leqslant xt$. При этом $xt \in (u_i, v_l)$. Следовательно, $(\nu_x\nu_t)(u_i, v_l) \leqslant I(xt)$. Пусть $(\nu_x\nu_t)(u_i, v_l) < I(y_0)$. Четверка $\{xt, tx, x(tx), t(xt)\}$ правильная и, т. к. $x(tx) \leqslant x$ и $t(xt) \leqslant t$, она принадлежит множеству $\{\{x^*, y^*, z^*, t^*\} \in R(u_i, u_j, v_k, v_l\} \mid x^* \leqslant x \,\&\, t^* \leqslant t\}$. В решетке L это последнее, будучи элементом подрешетки $\mathcal{P}(R(u_i, u_j, v_k, v_l))$, мажорируется по предположению элементом $I(y_0)$ подрешетки $\mathcal{I}(u_i, v_l)$. Это может быть только если $xt \in I(y_0)$, т.е. $I(xt) \subseteq I(y_0)$. Отсюда следует, что $(\nu_x\nu_t)(u,v) = I(xt) = \nu_{xt}(u,v)$.

б) Если $(u,v) = (u_i, \omega)$, то

$$\begin{aligned} (\nu_x\nu_t)(u_i,\omega) &= (\nu_x(u_i,v_k) \wedge \nu_t(u_j,\omega)) \vee (\nu_x(u_i,\omega) \wedge \nu_t(u_j,\omega)) = \\ &= (I(x) \wedge \{v_l\}) \vee (\{u_i\} \wedge \{v_l\}) = \{v_l\} = \nu_{xt}(u_i,\omega). \end{aligned}$$

в) Если $(u,v) = (o, v_l)$, то

$$\begin{aligned} (\nu_x\nu_t)(o,v_l) &= (\nu_x(o,v_k) \wedge \nu_t(u_j,v_l)) \vee (\nu_x(o,v_k) \wedge \nu_t(o,v_l)) = \\ &= (\{u_i\} \wedge I(t)) \vee (\{u_i\} \wedge \{u_j\}) = \{u_i\} = \nu_{xt}(o,v_l). \end{aligned}$$

Таким образом, $\nu_x\nu_y = \nu_{xy}$ и в случае 3.

Итак, показано, что отображение $x \mapsto \nu_x$ является вложением идемпотентной полугруппы B с транзитивной коммутативностью в квазибулеву степень $S[L]$ прямоугольной полугруппы S.

В проведенных рассуждениях молчаливо предполагалось, что множества U_0 и V_0 содержат каждое не менее двух элементов, т. е. что факторполугруппа $S_0 = B/\theta$ является собственно прямоугольной полугруппой, не сводящейся ни к лево-, ни к правосингулярному частному случаю, и, кроме того, $|U_0 \cup V_0| \geqslant 5$.

Пусть $S_0 = B/\theta$ — левосингулярная полугруппа, т. е. $|V_0| = 1$. Тогда в B будет $\theta(x)\theta(y) = \theta(x)$, т. е. $\theta(xy) = \theta(x)$, откуда $xyx = xy$. Идемпотентная полугруппа с транзитивным отношением коммутативности, в которой выполняется тождество $xyx = xy$, согласно [4] вкладывается в квазибулеву степень левосингулярной полугруппы. В случае $|U_0| = 1$ аналогично получаем вложение полугруппы B в квазибулеву степень правосингулярной полугруппы.

Заметим, наконец, что если $|U_0| = |V_0| = 2$, то для осуществимости построений, связанных с определением решетки L, вместо множества $U_0 \cup V_0$ можно взять $U \cup V$. $\square$

Литература

1. Салий В.Н. *On quasi-boolean powers of rectangular bands* // Международн. конф. "Полугруппы и их приложения, включая полугрупповые кольца". Тез. докл. – Санкт-Петербург, 1995. – С. 58.
2. *Общая алгебра.* Т. 2 / Под ред. Л.А. Скорнякова. – М.: Наука, 1991. – 480 с.
3. Ляпин Е.С. *Полугруппы.* – М.: Физматгиз, 1960. – 592 с.
4. Салий В.Н. *Квазибулевы степени сингулярных полугрупп* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 11. – С. 67–74.
5. Салий В.Н. *Квазибулевы степени элементарных абелевых p-групп* // Матем. заметки. – 1999. – Т. 66. – № 2. – С. 264–274.
6. Salii V.N. *Lattice extensions of algebras and Malcev products* // Tatra Mountains Math. Publ. – 1995. – V. 5. – P. 97–100.

Саратовский государственный университет

Поступила
07.12.2000