ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 11 (498)

УДК 514.763

М.А. МАЛАХАЛЬЦЕВ

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ С ОСОБЕННОСТЯМИ

В данной работе изучаются инфинитезимальные деформации симплектической структуры с особенностями на компактном многообразии, полученные результаты применяются к симплектической структуре с особенностями Мартине [1], [2].

Все многообразия и отображения предполагаются гладкими. Для многообразия M через $\Omega(M)$ обозначается алгебра дифференциальных форм на M, через $\mathfrak{X}(M)$ — алгебра Ли векторных полей на M, для векторного поля $V \in \mathfrak{X}(M)$ через L_V обозначается производная Ли в направлении V.

1. Симплектическая структура с особенностями

Пусть ω_0 — замкнутая дифференциальная 2-форма на $\mathbb{R}^{2n}$ такая, что множество $\Sigma_0 = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid \det \omega_0(x) = 0\}$ есть вложенное подмногообразие, Γ_0 — псевдогруппа локальных диффеоморфизмов $\mathbb{R}^{2n}$, состоящая из локальных диффеоморфизмов f со свойством $f^*\omega_0 = \omega_0$.

Симплектическая структура с особенностями типа ω_0 на $2n$-мерном многообразии M может быть определена двумя способами.

Определение 1. *Симплектической структурой с особенностями типа* ω_0 на $2n$-мерном многообразии M называется Γ_0-структура на M, т. е. максимальный атлас с функциями перехода, принадлежащими псевдогруппе Γ_0.

Определение 2. 2-форма ω на $2n$-мерном гладком многообразии M называется *симплектической структурой с особенностями типа* ω_0, если для любой точки $p \in M$ существует окрестность $U(p)$ и диффеоморфизм $\phi_p : U(p) \to \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{2n}$, где $\mathcal{O}$ — открытое подмножество в $\mathbb{R}^{2n}$, такие, что $\omega|_{U(p)} = \phi_p^*(\omega_0)$.

Эти определения эквивалентны. Действительно, пусть на M задан Γ_0-атлас $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$. Тогда $\phi_\alpha^*\omega_0|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \phi_\beta^*\omega_0\Big|_{U_\alpha \cap U_\beta}$. Поэтому на M корректно определена $\omega \in \Omega^2(M)$ такая, что $\omega|_{U_\alpha} = \phi_\alpha^*\omega_0$, и очевидно ω удовлетворяет определению 2. Наоборот, пусть на M задана 2-форма ω, удовлетворяющая определению 2. Тогда пары $(U(p), \phi_p)$ образуют Γ_0-атлас на M. Ясно, что построенное соответствие между максимальными Γ_0-атласами и 2-формами, удовлетворяющими определению 2, является взаимнооднозначным.

Особое подмногообразие симплектической структуры с особенностями. Пусть 2-форма ω на $2n$-мерном гладком многообразии M есть симплектическая структура с особенностями типа ω_0.

Лемма 1. *Множество* $\Sigma = \{p \in M \mid \det \omega(p) = 0\}$ *есть замкнутое вложенное подмногообразие в* M, *при этом* $\dim \Sigma = \dim \Sigma_0$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha : U_\alpha \to \mathcal{O}_\alpha)\}$ — Γ_0-атлас, соответствующий ω. Ясно, что для любого α $U_\alpha \cap \Sigma = \phi_\alpha^{-1}(\mathcal{O}_\alpha \cap \Sigma_0)$. Так как Σ_0 — вложенное подмногообразие в $\mathbb{R}^{2n}$, то $\Sigma_0 \cap \mathcal{O}_\alpha$ есть вложенное подмногообразие в $\mathcal{O}_\alpha$. Поскольку отображение ϕ_α — диффеоморфизм, $U_\alpha \cap \Sigma$ есть вложенное подмногообразие в U_α, и, значит, Σ — вложенное подмногообразие в M. $\square$

Подмногообразие Σ будем называть *особым подмногообразием* симплектической структуры с особенностями.

Лемма 2. *Пусть ω — симплектическая структура с особенностями типа ω_0 на многообразии M, $U \subset M$ — открытое множество, $V, W \in \mathfrak{X}(U)$. Если $i_V\omega = i_W\omega$, то $V = W$.*

Доказательство. Для любого открытого множества $U \subset M$ подмножество $\widetilde{U} = U \setminus (U \cap \Sigma)$ всюду плотно в U и форма ω невырождена на $\widetilde{U}$. Поэтому из равенства $i_V\omega = i_W\omega$ следует, что $V = W$ на $\widetilde{U}$, и, значит, на всем U. $\square$

2. Инфинитезимальные деформации симплектической структуры с особенностями

Мы определили симплектическую структуру с особенностями как псевдогрупповую структуру (определение 1) и эквивалентным образом как замкнутую 2-форму (определение 2). Соответственно определены и два пространства существенных инфинитезимальных деформаций симплектической структуры с особенностями: пространство существенных инфинитезимальных деформаций псевдогрупповой структуры, изоморфное пространству когомологий Чеха $\check{H}^1(M; \mathfrak{X}_\Gamma)$ с коэффициентами в пучке Γ-векторных полей, где Γ — псевдогруппа автоморфизмов симплектической структуры с особенностями, и пространство $\mathcal{D}_{\mathrm{ess}}(\omega)$ существенных инфинитезимальных деформаций замкнутой 2-формы ω. В этом разделе для компактного многообразия M мы строим отображение $\phi : \check{H}^1(M; \mathfrak{X}_\Gamma) \to \mathcal{D}_{\mathrm{ess}}(\omega)$ и исследуем его свойства.

В дальнейшем предполагаем, что многообразие M компактно.

1.1. *Деформации псевдогрупповой структуры.* Напомним определения и результаты теории деформаций псевдогрупповых структур, которые будут использоваться в данной работе. Основы этой теории заложены в работах [3]–[5] (см. также [6] и [7]). Отметим, что в исследованиях деформаций псевдогрупповых структур в основном рассматривались транзитивные псевдогруппы, однако основные определения без труда можно перенести на нетранзивный случай.

Пусть Γ — некоторая псевдогруппа локальных диффеоморфизмов многообразия M. Однопараметрическое семейство ϕ_s элементов Γ называется гладким, если множество $U = \{(x, s) \in M \times \mathbb{R} \mid x \in \mathcal{D}(\phi_s)\}$, где $\mathcal{D}(g)$ — область определения элемента $g \in \Gamma$, открыто в $M \times \mathbb{R}$ и отображение $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$, $\Phi(x, s) = \phi_s(x)$, — гладкое отображение. Гладкое однопараметрическое семейство элементов Γ назовем кривой в Γ.

Пусть ϕ_s, $|s| < \varepsilon$, — кривая в Γ такая, что ϕ_0 есть тождественное отображение открытого множества $U \subset M$. Тогда на U определено векторное поле $V(x) = \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\phi_s(x)$, которое называется касательным векторным полем к ϕ_s в $s = 0$. Напомним, что векторное поле V, определенное на открытом множестве $U \subset M$, называется Γ-векторным полем, если его поток состоит из элементов Γ. Если любое касательное векторное поле к кривой в Γ является Γ-векторным полем, то говорят, что псевдогруппа обладает псевдоалгеброй Ли [3]. Если псевдогруппа Γ обладает псевдоалгеброй Ли, то множество $\mathfrak{X}_\Gamma(U)$ Γ-векторных полей на U является подалгеброй Ли в алгебре Ли $\mathfrak{X}(U)$ векторных полей на U, и соответствие $U \to \mathfrak{X}_\Gamma(U)$ определяет пучок алгебр Ли $\mathfrak{X}_\Gamma$ на M.

Пусть Γ_0 — псевдогруппа локальных диффеоморфизмов $\mathbb{R}^n$, обладающая псевдоалгеброй Ли. Γ_0-атлас $\mathcal{A}$ на многообразии M определяет псевдогруппу Γ на M, локально эквивалентную псевдогруппе Γ_0. Локальный диффеоморфизм $f : U \to U'$ многообразия M принадлежит псевдогруппе Γ тогда и только тогда, когда для любых карт $(W, \phi), (W', \phi') \in \mathcal{A}$ таких, что $W \cap U \neq \emptyset$ и $f(W \cap U) \subset W'$, диффеоморфизм $\phi' f \phi^{-1}|_{\phi(W \cap U)}$ принадлежит Γ_0. Заметим также, что каждая карта (W, ϕ) задает изоморфизм пучков $\mathfrak{X}_\Gamma|_W \to \mathfrak{X}_{\Gamma_0}|_{\phi(W)}$.

Деформацией Γ_0-*атласа* $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ называется такое семейство Γ_0-атласов $\mathcal{A}(s) = \{(U_\alpha, \phi_\alpha(s))\}$, $|s| < \varepsilon$, что

1) отображения $U_\alpha \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, $(x, s) \to \phi_\alpha(s)(x)$ гладкие;

2) $\phi_{\beta\alpha}(s) = \phi_\beta(s)\phi_\alpha^{-1}(s)$ — кривые в Γ_0;

3) $\mathcal{A}(0) = \mathcal{A}$.

Деформация $\mathcal{A}(s)$ Γ_0-атласа $\mathcal{A}$ называется *несущественной*, если $\phi_\alpha(s)\phi_\alpha^{-1}$ принадлежат псевдогруппе Γ_0, т. е. все атласы $\mathcal{A}(s)$ принадлежат максимальному Γ_0-атласу, определяемому атласом $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{A}(s) = \{(U_\alpha, \phi_\alpha(s))\}$ — деформация Γ_0-атласа $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$. Тогда $\frac{d}{ds}\big|_{s=0}\phi_{\alpha\beta}(s)$ есть Γ_0-векторное поле на $\phi_{\beta\alpha}(\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)) \subset \phi_\beta(U_\beta)$.

Определим векторное поле $V_{\beta\alpha}$ на $U_\alpha \cap U_\beta$:

$$V_{\beta\alpha}(p) = d\phi_\beta^{-1}\left(\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\phi_{\beta\alpha}(s)(\phi_\alpha(p))\right), \tag{1}$$

и векторное поле W_α на U_α:

$$W_\alpha(p) = d\phi_\alpha^{-1}\left(\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\phi_\alpha(s)(p)\right). \tag{2}$$

Утверждение 1. 1) $V_{\beta\alpha} = W_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} - W_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}$;

2) $\{V_{\beta\alpha}\}$ — 1-*коцикл на покрытии* $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ *с коэффициентами в* $\mathfrak{X}_\Gamma$;

3) *если деформация* $\mathcal{A}(s)$ *несущественна, то класс когомологий* $[V_{\beta\alpha}] \in H^1(M; \mathfrak{X}_\Gamma)$ *тривиален.*

Коцикл $\{V_{\beta\alpha}\}$ называется *инфинитезимальной деформацией* Γ_0-*структуры.* Класс $[V_{\beta\alpha}] \in H^1(M; \mathfrak{X}_\Gamma)$ называется *существенной инфинитезимальной деформацией* Γ_0-структуры.

Вообще говоря, не любая инфинитезимальная деформация порождена деформацией Γ_0-структуры. В [7] доказано, что если существенная инфинитезимальная деформация, представленная коциклом $\{V_{\beta\alpha}\}$, порождена деформацией Γ_0-структуры, то коцикл $\{W_{\alpha\beta\gamma} = [V_{\alpha\beta}, V_{\beta\gamma}]\}$ Γ-векторных полей, где $[\ ,\ ]$ — скобка векторных полей, представляет нулевой класс когомологий в $H^2(M; \mathfrak{X}_\Gamma)$. Класс когомологий $[W_{\alpha\beta\gamma}] \in H^2(M, \mathfrak{X}_\Gamma)$ называется *препятствием к интегрируемости инфинитезимальной деформации* $\{V_{\beta\alpha}\}$.

1.2. *Инфинитезимальные деформации замкнутой формы.* Пусть η — замкнутая дифференциальная форма на многообразии M. *Деформацией формы* η называется гладкое семейство замкнутых форм $\eta(s)$, $|s| < \varepsilon$, где $\eta(0) = \eta$. Пусть $\phi(s)$ — поток локальных диффеоморфизмов многообразия M. Тогда семейство форм $\eta(s) = \phi(s)^*(\eta)$ называется *несущественной деформацией* формы η. Замкнутая форма θ называется (несущественной) инфинитезимальной деформацией формы η, если существует такая (несущественная) деформация $\eta(s)$ формы η, что $\theta = \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\eta(s)$. Отметим, что замкнутая форма θ является несущественной инфинитезимальной деформацией формы η тогда и только тогда, когда существует векторное поле $V \in \mathfrak{X}(M)$ такое, что $\theta = L_V\eta = d(i_V\eta)$.

Для любой замкнутой p-формы θ семейство $\eta(s) = \eta + s\theta$ есть семейство замкнутых форм, и $\theta = \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\eta(s)$, поэтому множество инфинитезимальных деформаций $\mathcal{D}(\eta)$ формы $\eta \in \Omega^p(M)$ совпадает с пространством замкнутых p-форм. Множество несущественных инфинитезимальных деформаций есть подпространство $\mathcal{D}_0(\eta) \subset \mathcal{D}(\eta)$, состоящее из точных p-форм вида $d(i_V\eta)$, где $V \in \mathfrak{X}(M)$. Фактор-пространство $\mathcal{D}_{\mathrm{ess}}(\eta) = \mathcal{D}(\eta)/\mathcal{D}_0(\eta)$ называется пространством существенных инфинитезимальных деформаций замкнутой формы η.

Из определения пространства существенных инфинитезимальных деформаций следует, что для любой замкнутой p-формы η определен сюръективный гомоморфизм $\psi : \mathcal{D}_{\mathrm{ess}}(\eta) \to H^p(M)$, отображающий существенную инфинитезимальную деформацию замкнутой формы η в соответствующий класс когомологий де Рама.

1.3. *Инфинитезимальные деформации симплектической структуры с особенностями.* Покажем, как связаны инфинитезимальные деформации симплектической структуры с особенностями типа ω_0 как псевдогрупповой структуры (см. п. 1.1) с инфинитезимальными деформациями соответствующей замкнутой 2-формы ω (см. п. 1.2).

Пусть симплектическая структура с особенностями типа ω_0 на многообразии M задана Γ_0-атласом $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, и $\omega \in \Omega^2(M)$ — соответствующая замкнутая 2-форма (см. определения 1 и 2). Обозначим через Γ псевдогруппу, состоящую из локальных диффеоморфизмов f многообразия M таких, что $f^*\omega = \omega$. Отсюда векторное поле V есть сечение пучка Γ-векторных полей $\mathfrak{X}_\Gamma$ тогда и только тогда, когда $L_V\omega = 0$.

Деформация $\mathcal{A}(s) = \{(U_\alpha, \phi_\alpha(s))\}$ данного Γ_0-атласа определяет деформацию $\omega(s)$ формы ω: семейство замкнутых 2-форм $\omega(s)$ задается равенствами $\omega(s)|_{U_\alpha} = \phi_\alpha^*(s)\omega_0$.

Пусть $\eta = \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\omega(s)$ — соответствующая инфинитезимальная деформация ω, тогда $\eta|_{U_\alpha} = L_{W_\alpha}\omega$, где векторное поле $W_\alpha \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$ определено равенством (2). При этом $V_{\alpha\beta} = W_\alpha - W_\beta$ есть инфинитезимальная деформация атласа $\mathcal{A}$, определяемая деформацией $\mathcal{A}(s)$ (см. утверждение 1).

Данное рассуждение показывает, как определить отображение ϕ из пространства $\check{H}^1(M, \mathfrak{X}_\Gamma)$ существенных инфинитезимальных деформаций Γ_0-атласа в пространство $\mathcal{D}_{\mathrm{ess}}(\omega)$ существенных инфинитезимальных деформаций замкнутой 2-формы, определяемой этим атласом. Именно, пусть существенная инфинитезимальная деформация задается коциклом Γ-векторных полей $V_{\beta\alpha}$ на покрытии $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ многообразия M. Так как пучок векторных полей $\mathfrak{X}$ на M является тонким, существуют векторные поля $W_\alpha \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$ такие, что $V_{\beta\alpha} = W_\beta - W_\alpha$. Положим $\eta_\alpha = L_{W_\alpha}\omega$, и, т. к. $L_{V_{\beta\alpha}}\omega = 0$, получаем $\eta_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = \eta_\beta|_{U_{\alpha\beta}}$. Поэтому определена форма η: $\eta|_{U_\alpha} = \eta_\alpha$, при этом $d\eta = 0$.

Если задано другое разложение $V_{\beta\alpha} = W'_\beta - W'_\alpha$, то на $U_\alpha \cap U_\beta$ имеем $W'_\beta - W'_\alpha = W_\beta - W_\alpha$. Поэтому определено векторное поле W: $W|_{U_\alpha} = W'_\alpha - W_\alpha$, и

$$\eta' - \eta = L_W\omega = d(i_W\omega).$$

Таким образом, формы η и η' определяют один и тот же класс в пространстве $\mathcal{D}_{\mathrm{ess}}(\omega)$.

Итак, получено отображение

$$\widetilde{\phi} : \check{Z}^1(\mathcal{U}; \mathfrak{X}_\Gamma) \to \mathcal{D}_{\mathrm{ess}}(\omega), \quad \widetilde{\phi}(V_{\beta\alpha}) = [\eta].$$

Из построения вытекает, что если два коцикла $V'_{\beta\alpha}$ и $V_{\beta\alpha}$ когомологичны, то они определяют одну и ту же замкнутую форму η, поэтому $\widetilde{\phi}(V'_{\beta\alpha}) = \widetilde{\phi}(V_{\beta\alpha})$, т. е. получается линейное отображение

$$\phi : \check{H}^1(M; \mathcal{X}_\Gamma) \to \mathcal{D}_{\mathrm{ess}}(\omega). \tag{3}$$

Из рассуждений, приведенных в начале раздела, следует

Утверждение 2. *Пусть симплектическая структура ω с особенностями типа ω_0 задана Γ_0-атласом $\mathcal{A}$. Предположим, что задана деформация $\mathcal{A}(s)$ атласа $\mathcal{A}$, и обозначим через $\omega(s)$ соответствующую деформацию формы ω. Если $[V_{\beta\alpha}] \in H^1(M, \mathfrak{X}_\Gamma)$ есть существенная инфинитезимальная деформация, построенная по $\mathcal{A}(s)$, и $\eta = \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\omega(s)$, то $\phi([V_{\beta\alpha}]) = [\eta]$.*

1.4. *Свойства отображения ϕ.*

Утверждение 3. *Отображение ϕ является мономорфизмом.*

Доказательство. Пусть $\phi([V_{\beta\alpha}]) = 0$. Возьмем векторные поля $W_\alpha \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$ такие, что $V_{\beta\alpha} = W_\beta - W_\alpha$. Тогда форма η, определенная равенствами $\eta|_{U_\alpha} = d(i_{W_\alpha}\omega)$, лежит в $\mathcal{D}_0$. Значит, существует векторное поле W на M, для которого на каждом U_α имеет место равенство $d(i_W\omega) = d(i_{W_\alpha}\omega)$. Но тогда $W'_\alpha = W_\alpha - W \in \mathfrak{X}_\Gamma(U_\alpha)$, поэтому $[V_{\beta\alpha}] = [W'_\beta - W'_\alpha] = 0$. $\square$

Обозначим через Ω^p пучок p-форм на многообразии M. Пусть $\iota : \mathfrak{X} \to \Omega^1$ — морфизм пучков, заданный отображениями $\iota_U : \mathfrak{X}(U) \to \Omega^1(U)$, $\iota(V) = i_V\omega$.

Утверждение 4. *Отображение ϕ сюръективно тогда и только тогда, когда $\Omega^1 = \iota(\mathfrak{X}) + d\Omega^0$.*

Доказательство. Пусть $[\eta] \in H^2(M)$. По условию можно выбрать такое открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ многообразия M, что для любого U_α имеют место равенства $\eta|_{U_\alpha} = d\xi_\alpha$ и $\xi_\alpha = \iota(W_\alpha) + df_\alpha = i_{W_\alpha}\omega + df_\alpha$, где $W_\alpha \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$, $f_\alpha \in \Omega^0(U_\alpha)$. Тогда

$$\eta|_{U_\alpha} = d\xi_\alpha = d(i_{W_\alpha}\omega) = L_{W_\alpha}\omega.$$

Поэтому $V_{\beta\alpha} = W_\beta - W_\alpha \in \mathfrak{X}_\Gamma(U_\alpha \cap U_\beta)$ и $\phi([V_{\beta\alpha}]) = [\eta]$.

Наоборот, пусть ϕ сюръективно. Тогда для любого класса $[\eta] \in \mathcal{D}_{\mathrm{ess}}(\omega)$ существует класс когомологий Чеха $[V_{\beta\alpha}] \in \check{H}^1(M; \mathfrak{X}_\Gamma)$ такой, что $\phi([V_{\beta\alpha}]) = [\eta]$. По построению ϕ существует покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ и такие векторные поля $W_\alpha \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$, что на любом U_α выполняется равенство $L_{W_\alpha}\omega = \eta + d(i_V\omega)$, где $V \in \mathfrak{X}(M)$. Положим $W'_\alpha = W_\alpha - V|_{U_\alpha}$, тогда $L_{W'_\alpha}\omega = \eta$. Таким образом, мы доказали, что из сюръективности отображения ϕ следует, что для любой замкнутой формы η существует покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ многообразия M и векторные поля $W'_\alpha \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$ такие, что $\eta|_{U_\alpha} = L_{W'_\alpha}\omega$. В частности, для любой замкнутой формы $\eta \in \Omega^2(M)$ и любой точки $p \in M$ существует окрестность U этой точки и векторное поле $W \in \mathfrak{X}(U)$ такие, что $\eta|_U = L_W\omega$.

Теперь заметим, что для любого ростка $\langle\xi\rangle_p \in \Omega^1_p$ существует замкнутая форма $\eta \in \Omega^2(M)$ такая, что $\langle\eta\rangle_p = \langle d\xi\rangle_p$. Значит, существуют такие окрестность U точки p и векторное поле $W \in \mathfrak{X}(U)$, что $d(i_W\omega) = L_W\omega = d\xi$, но тогда $\langle\xi\rangle_p = \langle i_W\omega + df\rangle_p$, где f — функция, определенная на некоторой окрестности точки p. Таким образом, получаем $\Omega^1 = \iota(\mathfrak{X}) + d\Omega^0$. $\square$

Определим подпучок $\mathcal{T}$ пучка гладких функций Ω^0 на M. Для любого открытого множества U гладкая функция f принадлежит $\mathcal{T}(U)$ тогда и только тогда, когда для любой точки $p \in U$ существует окрестность $U' \subset U$ точки p и $V \in \mathfrak{X}(U')$ такие, что $df = i_V\omega$. Ясно, что соответствие $U \to \mathcal{T}(U)$ определяет пучок и определено вложение i пучка постоянных функций $\mathbb{R}_M$ в $\mathcal{T}$.

Построим морфизм пучков $\pi : \mathcal{T} \to \mathfrak{X}_\Gamma$. Для $f \in \mathcal{T}(U)$ существует такое покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ множества U, что на каждом U_α есть векторное поле V_α со свойством $df = i_{V_\alpha}\omega$, причем по лемме 2 это поле однозначно определено, поэтому на $U_\alpha \cap U_\beta$ имеем $V_\alpha = V_\beta$. Таким образом, на U однозначно определено векторное поле V со свойством $df = i_V\omega$. Далее, $L_V\omega = d(i_V\omega) = d(df) = 0$, поэтому $V \in \mathfrak{X}_\Gamma(U)$. Итак, получили отображение $\pi_U : \mathcal{T}(U) \to \mathfrak{X}_\Gamma(U)$, которое очевидно является линейным. Таким образом, отображения π_U определяют морфизм пучков $\pi : \mathcal{T} \to \mathfrak{X}_\Gamma$.

Для сечений пучка $\mathcal{T}$ определим скобку Пуассона $\{\ ,\ \}$. Пусть $f, g \in \mathcal{T}(U)$, тогда $df = i_V\omega$, $dg = i_W\omega$, где $V, W \in \mathfrak{X}_\Gamma(U)$ однозначно определены. Положим

$$\{f, g\} = dg(V) - df(W) = 2\omega(W, V). \tag{4}$$

Нетрудно показать, что $\{f, g\} \in \mathcal{T}(U)$. Действительно, на $\widetilde{U} = U \setminus (U \cap \Sigma)$ форма ω является симплектической, и $\{f, g\}$ есть скобка Пуассона этой симплектической структуры, поэтому $d\{f, g\} = i_{[V,W]}\omega$ на $\widetilde{U}$ (см., напр., [8]). Так как обе части этого равенства определены на U и $\widetilde{U}$ всюду плотно в U, получаем $d\{f, g\} = i_{[V,W]}\omega$ на всем U, и, значит, $\{f, g\} \in \mathcal{T}(U)$. Кроме того, из этих рассуждений следует, что скобка $\{\ ,\ \}$ определяет на $\mathcal{T}(U)$ структуру алгебры Ли, и пучок $\mathcal{T}$ становится пучком алгебр Ли. Из предыдущих рассуждений следует, что $\pi : \mathcal{T} \to \mathfrak{X}_\Gamma$ есть морфизм пучков алгебр Ли.

Утверждение 5. *Последовательность пучков*

$$0 \to \mathbb{R}_M \xrightarrow{i} \mathcal{T} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{X}_\Gamma \to 0$$

является точной.

Доказательство. По определению морфизм i является вложением, и по определению π имеем $\pi i = 0$.

Пусть $f \in \mathcal{T}(U)$ и $\pi_U(f) = 0$. Тогда $df = 0$, следовательно, $f \in \mathbb{R}_M(U)$. Таким образом, для любого открытого множества $U \subset M$ последовательность

$$0 \to \mathbb{R}_M(U) \xrightarrow{i_U} \mathcal{T}(U) \xrightarrow{\pi_U} \mathfrak{X}_\Gamma(U)$$

точна.

Осталось показать, что для любой точки p и любого ростка $\langle V\rangle_p \in (\mathfrak{X}_\Gamma)_p$ существует такой росток $\langle f\rangle_p \in \mathcal{T}_p$, что $\pi_p(\langle f\rangle_p) = \langle V\rangle_p$. Пусть V — представитель ростка из $(\mathfrak{X}_\Gamma)_p$, определенный на стягиваемой окрестности U точки p. Так как $d(i_V\omega) = L_V\omega = 0$, то существует функция f на U со свойством $df = i_V\omega$, значит, $\pi_p(\langle f\rangle_p) = \langle V\rangle_p$. $\square$

Следствие 1. 1. Имеет место точная последовательность

$$\cdots \to \check{H}^0(M;\mathfrak{X}_\Gamma) \xrightarrow{\delta} \check{H}^1(M;\mathbb{R}_M) \xrightarrow{i_*} \check{H}^1(M;\mathcal{T}) \xrightarrow{\pi_*} \check{H}^1(M;\mathfrak{X}_\Gamma) \xrightarrow{\delta} \check{H}^2(M;\mathbb{R}_M) \xrightarrow{i_*} \cdots \tag{5}$$

2) Следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^1(M;\mathfrak{X}_\Gamma) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{D}_{\mathrm{ess}}(\omega) \\ {\scriptstyle\delta}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle\psi} \\ \check{H}^2(M;\mathbb{R}_M) & \xrightarrow[\cong]{\eta} & H^2(M), \end{array} \tag{6}$$

где гомоморфизм ψ определен в п. 1.1, δ — связывающий гомоморфизм точной последовательности (5), η — стандартный изоморфизм когомологий Чеха с коэффициентами в пучке локально постоянных функций $\mathbb{R}_M$ и когомологий де Рама.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ — открытое покрытие многообразия M такое, что все $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ стягиваемы. Пусть $\{V_{\beta\alpha}\} \in \check{Z}^1(\mathcal{U};\mathfrak{X}_\Gamma)$. Так как $d(i_{V_{\beta\alpha}}\omega) = 0$, существуют такие $f_{\beta\alpha} \in \mathcal{T}(U_{\alpha\beta})$, что $df_{\beta\alpha} = i_{V_{\beta\alpha}}\omega$. Тогда функции $c_{\alpha\beta\gamma} = f_{\alpha\beta} + f_{\beta\gamma} + f_{\gamma\alpha}$ на $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ постоянны и образуют 2-коцикл Чеха на $\mathcal{U}$ с коэффициентами в пучке $\mathbb{R}_M$. По определению связывающего гомоморфизма 2-коцикл $\{c_{\alpha\beta\gamma}\}$ представляет класс $\delta([V_{\beta\alpha}]) \in \check{H}^2(\mathcal{U};\mathbb{R}_M)$.

По построению изоморфизма η имеем $\eta([c_{\alpha\beta\gamma}]) = [\xi] \in H^2(M)$, где $\xi|_{U_\alpha} = d\mu_\alpha$ и $\{\mu_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha)\}$ — любой набор 1-форм со свойством $\mu_\alpha - \mu_\beta = df_{\alpha\beta}$. Если $V_{\beta\alpha} = W_\beta - W_\alpha$, то $df_{\beta\alpha} = i_{W_\beta}\omega - i_{W_\alpha}\omega$, и можно положить $\mu_\alpha = i_{W_\alpha}\omega$. Тогда $\eta(\delta([V_{\beta\alpha}])) = \eta([c_{\alpha\beta\gamma}]) = [\xi]$, где $\xi|_{U_\alpha} = d(i_{W_\alpha}\omega) = L_{W_\alpha}\omega$. По построению ϕ 2-форма ξ представляет класс $\phi([V_{\beta\alpha}])$ в $\mathcal{D}_{\mathrm{ess}}(\omega)$ и она же представляет класс $\psi(\phi([V_{\beta\alpha}])) \in H^2(M)$.

Таким образом, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^1(\mathcal{U};\mathfrak{X}_\Gamma) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{D}_{\mathrm{ess}}(\omega) \\ {\scriptstyle\delta}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle\psi} \\ \check{H}^2(\mathcal{U};\mathbb{R}_M) & \xrightarrow[\cong]{\eta} & H^2(M) \end{array}$$

и, переходя к прямому пределу, получаем коммутативную диаграмму (6). $\square$

Утверждение 6. *Пусть* $[v = \{V_{\beta\alpha}\}] \in H^1(M;\mathfrak{X}_\Gamma)$ *— существенная инфинитезимальная деформация симплектической структуры с особенностями типа* ω_0 *и* $[w = \{W_{\alpha\beta\gamma}\}] \in H^2(M,\mathfrak{X}_\Gamma)$ *— препятствие к интегрируемости этой инфинитезимальной деформации (см. п.* 1.1*). Тогда* $[w]$ *лежит в образе отображения* $\pi_* : H^2(M;\mathcal{T}) \to H^2(M;\mathfrak{X}_\Gamma)$*, входящего в точную последовательность* (5).

Доказательство. Пусть 1-коцикл $v \in Z^1(\mathcal{U}; \mathfrak{X}_\Gamma)$, где $\mathcal{U}$ — покрытие многообразия M, состоящее из стягиваемых открытых множеств, представляет инфинитезимальную деформацию симплектической структуры с особенностями типа ω_0, тогда 2-коцикл $w = \{W_{\alpha\beta\gamma} = [V_{\alpha\beta}, V_{\beta\gamma}]\} \in Z^2(\mathcal{U}; \mathfrak{X}_\Gamma)$ представляет препятствие к интегрируемости v.

Для коцикла v определена коцепь $f = \{f_{\beta\alpha}\} \in C^1(\mathcal{U}; \mathcal{T})$ со свойством $\pi(f) = v$ (см. утверждение 5). Построим коцепь $g_{\alpha\beta\gamma} = \{f_{\alpha\beta}, f_{\beta\gamma}\} \in C^2(\mathcal{U}; \mathcal{T})$, где $\{\ ,\ \}$ — скобка Пуассона (4). Так как π — морфизм пучков алгебр Ли, $\pi(g) = w$. Покажем, что g есть коцикл:

$$\begin{aligned}(\partial g)_{\alpha\beta\gamma\mu} &= g_{\beta\gamma\mu} - g_{\alpha\gamma\mu} + g_{\alpha\beta\mu} - g_{\alpha\beta\gamma} = \\ &= \{f_{\beta\gamma}, f_{\gamma\mu}\} - \{f_{\alpha\gamma}, f_{\gamma\mu}\} + \{f_{\alpha\beta}, f_{\beta\gamma}\} - \{f_{\alpha\beta}, f_{\beta\gamma}\} = \\ &= \{f_{\beta\gamma} + f_{\gamma\alpha}, f_{\gamma\mu}\} + \{f_{\alpha\beta}, f_{\beta\mu} + f_{\gamma\beta}\}.\end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что $i_{V_{\alpha\beta}}\omega = df_{\alpha\beta}$. Поэтому $f_{\alpha\beta} + f_{\beta\gamma} + f_{\gamma\alpha} = c_{\alpha\beta\gamma}$ есть 2-коцепь с коэффициентами в пучке R_M. В силу свойств скобки Пуассона для любой локально постоянной функции $c \in \mathbb{R}_M(U)$ и любой $f \in \mathcal{T}(U)$ имеем $\{c, f\} = 0$. Поэтому

$$\{f_{\beta\gamma} + f_{\gamma\alpha}, f_{\gamma\mu}\} = \{c_{\alpha\beta\gamma} - f_{\alpha\beta}, f_{\gamma\mu}\} = -\{f_{\alpha\beta}, f_{\gamma\mu}\} = \{f_{\alpha\beta}, f_{\mu\gamma}\}.$$

Таким образом, из (7) получаем

$$(\partial g)_{\alpha\beta\gamma\mu} = \{f_{\alpha\beta}, f_{\mu\gamma} + f_{\gamma\beta} + f_{\beta\mu}\} = \{f_{\alpha\beta}, c_{\mu\gamma\beta}\} = 0.$$

Итак, g есть коцикл, поэтому определен класс когомологий $[g] \in H^2(M; \mathcal{T})$ и $\pi([g]) = [w]$. $\square$

3. Деформации симплектической структуры с особенностью Мартине

2.1. *Симплектическая структура с особенностью Мартине.* В работе [1] найдены ростки общего положения замкнутой 2-формы ω на четырехмерном многообразии. Для замкнутой 2-формы ω на $\mathbb{R}^4$ там определены множества $\Sigma^0 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \det\omega(x) \neq 0\}$, $\Sigma^2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \operatorname{rank}\omega(x) \leq 2\}$, $\Sigma^{2,2} = \{x \in \Sigma^2 \mid \omega(x)\big|_{T\Sigma^2} = 0\}$, $\Sigma^{2,0} = \Sigma^2 \setminus \Sigma^{2,2}$.

Для любой точки $p \in \Sigma^0$ росток $\langle\omega\rangle_p$ в силу теоремы Дарбу эквивалентен ростку стандартной симплектической формы

$$\omega_0 = dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4 \tag{8}$$

в нуле.

Мартине [1] доказал, что для любой точки $p \in \Sigma^{2,0}$ росток $\langle\omega\rangle_p$ эквивалентен ростку формы

$$\omega_0 = x^1 dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4 \tag{9}$$

в нуле, и привел примеры замкнутых 2-форм

$$\omega_0 = dx^1 \wedge dx^2 + x^3 dx^2 \wedge dx^3 + d(x^1x^3 + x^4x^2 - \tfrac{1}{3}(x^3)^3) \wedge dx^4, \tag{10}$$

$$\omega_0 = dx^1 \wedge dx^2 + x^3 dx^2 \wedge dx^3 + d(x^1x^3 - x^4x^2 - \tfrac{1}{3}(x^3)^3) \wedge dx^4 \tag{11}$$

на $\mathbb{R}^4$, для которых $\Sigma^{2,2}(\omega) \neq \emptyset$.

Для замкнутых 2-форм на $\mathbb{R}^{2n}$ справедливо

Утверждение 7 ([1], гл. III, п. 4.2.2). *Пусть ω — замкнутая 2-форма на $\mathbb{R}^{2n}$, $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid \det\omega(x) = 0\}$ — подмногообразие в $\mathbb{R}^{2n}$, и $\omega' = \omega|_\Sigma$. Если в точке $x_0 \in \Sigma$ ω' имеет максимальный ранг, то существует локальный диффеоморфизм, переводящий $\langle\omega\rangle_{x_0}$ в $\langle\omega_0\rangle_{x_0}$, где*

$$\omega_0 = x^1 dx^1 \wedge dx^2 + x^3 dx^2 \wedge dx^3 + \cdots + dx^{2n-1} \wedge dx^{2n}. \tag{12}$$

Определение 3. Симплектическая структура ω с особенностями типа ω_0, где ω_0 имеет вид (12), называется *симплектической структурой с особенностью Мартине.*

Из утверждения 7 немедленно вытекает

Следствие 2. Пусть ω — замкнутая 2-форма на многообразии M такая, что $\Sigma = \{p \in M \mid \det \omega(p) = 0\}$ — вложенное подмногообразие. Если $\omega' = \omega|_\Sigma$ имеет максимальный ранг во всех точках Σ, то ω есть симплектическая форма с особенностью Мартине.

Пример компактного многообразия с симплектической структурой, имеющей особенность Мартине. Возьмем четырехмерный тор $\mathbb{T}^4$, и пусть $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{T}^4$ — стандартное накрытие, θ^a, $a = \overline{1,4}$, суть такие 1-формы на $\mathbb{T}^4$, что $\pi^*(\theta^a) = dx^a$. Пусть $\omega = f\theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^3 \wedge \theta^4$, где $\pi^* f = \cos(x^1)$. Ясно, что $d\omega = 0$. Пусть $p_1, p_2 \in \mathbb{S}^1$ — нули функции f. Тогда $\Sigma = p_1 \times \mathbb{T}^3 \cup p_2 \times \mathbb{T}^3$ и ограничение ω на каждую компоненту связности подмногообразия Σ имеет вид $\theta^3 \wedge \theta^4$, т. е. имеет ранг 2. Тогда согласно следствию 2 форма ω задает симплектическую структуру с особенностью Мартине на $\mathbb{T}^4$.

2.2. *Инфинитезимальные деформации симплектической структуры с особенностью Мартине.* В этом разделе покажем, что пространство существенных инфинитезимальных деформаций симплектической структуры с особенностью Мартине изоморфно пространству существенных инфинитезимальных деформаций соответствующей замкнутой формы ω. Вначале сделаем следующее

Замечание. Если ω — симплектическая структура без особенностей, то пучок $\mathcal{T}$ совпадает с пучком гладких функций Ω^0, поэтому $H^k(M; \mathcal{T}) = 0$ при $k > 0$. Кроме того, $\iota : \mathfrak{X} \to \Omega^1$ — изоморфизм пучков (см. п. 1.4). Поэтому из следствия 1 и утверждения 4 получаем известный результат: для симплектической структуры $H^1(M; \mathfrak{X}_\Gamma) \cong \mathcal{D}_{\mathrm{ess}}(\omega) \cong H^2(M)$.

Лемма 3. *Пусть ω — симплектическая структура с особенностью Мартине. Для ростка любой 1-формы $\langle \xi \rangle_p \in \Omega^1_p$ в произвольной точке $p \in M$ существуют ростки $\langle W \rangle_p \in \mathfrak{X}_p$ и $\langle f \rangle_p \in \Omega^0_p$ такие, что $\langle \xi \rangle_p = \langle i_W \omega + df \rangle_p$.*

Доказательство. Пусть Σ — особое подмногообразие структуры ω. Если $p \notin \Sigma$, то утверждение очевидно. Если $p \in \Sigma$, то возьмем адаптированную карту с кубической областью значений, в которой ω имеет канонический вид (12). Надо показать, что на U существуют функция f и векторное поле W такие, что

$$\xi_1 dx^1 + \xi_2 dx^2 + \xi_3 dx^3 + \xi_4 dx^4 + \cdots = \\ = -x^1 w^2 dx^1 + x^1 w^1 dx^2 - w^4 dx^3 + w^3 dx^4 + \cdots + \partial_1 f dx^1 + \partial_2 f dx^2 + \cdots \tag{13}$$

Уравнение (13) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -x^1 w^2 + \partial_1 f \\ \xi_2 &= x^1 w^1 + \partial_2 f \\ \xi_3 &= -w^4 + \partial_3 f \\ \xi_4 &= w^3 + \partial_4 f \\ \ldots &= \ldots \end{aligned}$$

Используем разложение

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \alpha_1(x^2, \ldots, x^{2n}) + x^1 \beta_1(x^1, \ldots, x^{2n}), \\ \xi_2 &= \alpha_2(x^2, \ldots, x^{2n}) + x^1 \beta_2(x^1, \ldots, x^{2n}). \end{aligned}$$

Так как окрестность U кубическая, существует функция $f_0(x^2, \ldots, x^{2n})$, удовлетворяющая уравнению $\partial_2 f_0 = \alpha_2$. Пусть $f_1 = \alpha_1$, $f = f_0(x^2, \ldots, x^{2n}) + x^1 f_1(x^1, \ldots, x^{2n})$. Тогда за первые две координаты векторного поля W можно взять $w^1 = \beta_2 - \partial_2 f_1$, $w^2 = -\beta_1$, и затем найти w^i, $i = \overline{3, 2n}$, из оставшихся уравнений. $\square$

Из леммы 2 и утверждения 4 следует

Утверждение 8. *Для симплектической структуры ω с особенностью Мартине отображение $\phi : H^1(M;\mathfrak{X}_\Gamma) \to \mathcal{D}_{\mathrm{ess}}(\omega)$ есть изоморфизм.*

Покажем, что для симплектической структуры с особенностями отображение ϕ, вообще говоря, не является сюръективным. Пусть ω — симплектическая структура с особенностями типа (см. (10))

$$\omega_0 = dx^1 \wedge dx^2 + x^3 dx^1 \wedge dx^4 + x^3 dx^2 \wedge dx^3 + x^4 dx^2 \wedge dx^4 + (x^1 - (x^3)^2) dx^3 \wedge dx^4$$

на многообразии M. Покажем, что в этом случае $\phi : H^1(M;\mathfrak{X}_\Gamma) \to H^2(M)$ не является сюръективным. В силу утверждения 4 достаточно привести пример $\xi \in \Omega^1$, росток которой в некоторой точке $p \in M$ не может быть представлен в виде $\langle i_W\omega + df\rangle_p$ ни для каких $\langle W\rangle_p \in \mathfrak{X}_p$, $\langle f\rangle_p \in \Omega^0_p$.

Обозначим через Σ особое многообразие структуры ω. Тогда в картах из соответствующего Γ_0-атласа $\mathcal{A}$ подмногообразие Σ задается уравнением $x^1 = 0$, а подмногообразие $\Sigma' \subset \Sigma$, в точках которого $\omega|_\Sigma = 0$, задается уравнениями $x^1 = 0$, $x^3 = 0$, $x^4 = 0$. Возьмем точку $p \in \Sigma'$, и пусть (U, ϕ) есть карта из $\mathcal{A}$ такая, что $\phi(p) = 0$.

Теперь возьмем 1-форму $\xi = x^4 dx^3$, определенную на U. Предположим, что в некоторой окрестности точки p существуют векторное поле W и функция f такие, что $\xi = i_W\omega + df$. Пусть $\Sigma'' \subset U \cap \Sigma$ есть подмногообразие в U, задаваемое равенствами $x^1 = 0$, $x^2 = 0$. Тогда из равенства $\xi|_{\Sigma''} = (i_W\omega + df)|_{\Sigma''}$ получаем систему

$$2x^4 - (x^3)^2 w^4 = 2\partial_3 f, \quad (x^3)^2 w^3 = 2\partial_4 f.$$

Продифференцировав первое равенство по x^4 и второе по x^3, приходим к равенству

$$2 = (x^3)^2 \partial_4 w^4 + 2x^3 w^3 + (x^3)^2 \partial_3 w^3.$$

Подставив в это равенство координаты точки p, получаем противоречие.

Литература

1. Martinet J. *Sur les singularités des formes différetielles* // Ann. Inst. Fourier. Grenoble. – 1970. – V. 20. – № 1. – P. 95–178.
2. Арнольд В.И. *Особенности каустик и волновых фронтов.* – М.: Фазис, 1996. – 334 с.
3. Spencer D.C. *Deformations of structures on manifolds defined by transitive continuous pseudogroups.* I. *Infinitesimal deformations of structure* // Ann. Math. – 1962. – V. 76. – № 2. – P. 306–398.
4. Spencer D.C. *Deformations of structures on manifolds defined by transitive continuous pseudogroups.* II. *Deformations of structure* // Ann. of Math. – 1962. – V. 76. – № 3. – P. 399–445.
5. Spencer D.C. *Deformations of structures on manifolds defined by transitive continuous pseudogroups.* III. *Structures defined by elliptic pseudogroup* // Ann. Math. – 1965. – V. 81. – № 2. – P. 389–450.
6. Guillemin V., Sternberg S. *Deformation theory of pseudogroup structures* // Mem. Am. Math. Soc. – 1968. – V. 64. – 80 p.
7. Kodaira K. *Complex manifolds and deformations of complex structures.* – Springer, 1986. – 400 p.
8. Фоменко А.Т. *Симплектическая геометрия. Методы и приложения.* – М.: МГУ, 1988. – 414 с.

Казанский государственный университет

Поступила 15.05.2003