ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 4 (467)

УДК 517.958 : 537.8

*Е.К. ЛИПАЧЁВ*

# К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА ОБЛАСТЯХ С БЕСКОНЕЧНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Методом граничных интегральных уравнений решена задача дифракции плоской электромагнитной волны на области с бесконечной границей. Задача сведена к решению интегрального уравнения второго рода. Доказаны теоремы существования и единственности классического решения краевой задачи. Построены алгоритмы приближенного решения, основанные на аппроксимации сплайнами решения интегрального уравнения, эквивалентного краевой задаче. Дается обоснование приближенных методов с помощью варианта общей теории приближенных методов анализа, предложенного Б.Г. Габдулхаевым [1].

## 1. Постановка задачи

Пусть $a$ — положительное вещественное число и $f(x) \in C^{1,\mu}[-a,a]$, $0 < \mu \leq 1$, $f(\pm a) = f'(\pm a) = 0$. Обозначим через $\widetilde{f}(x)$ продолжение нулем функции $f(x)$ на всю числовую ось $\mathbb{R}$. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами $x$ и $y$ область $S = \{(x,y) : y > \widetilde{f}(x),\ -\infty < x < \infty\}$. Отметим, что граница области $S$ совпадает с осью $0x$ за исключением интервала $(-a,a)$ и ее можно выразить соотношением

$$\Gamma \equiv \partial S = \{(x, \widetilde{f}(x)) : -\infty < x < \infty\} = \Gamma^* \cup \Gamma',$$
$$\Gamma^* = \{(x, f(x)) : x \in (-a,a)\}, \quad \Gamma' = \{(x,0) : x \notin (-a,a)\}.$$

Рассмотрим следующую краевую задачу.

Найти функцию $u(x,y) \in C^2(S) \cap C(\overline{S})$, обладающую правильной нормальной производной (напр., [2]), удовлетворяющую в области $S$ уравнению Гельмгольца

$$\triangle u(x,y) + k^2 u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in S; \tag{1}$$

граничному условию Неймана

$$\frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}_P} = -\frac{\partial u_0(P)}{\partial \vec{n}_P}, \quad P = (x,y) \in \Gamma, \tag{2}$$

где $u_0(x,y) = e^{i(\alpha x - \beta y)}$, $\alpha$, $\beta$ — составляющие волнового вектора падающей волны по осям $x$ и $y$, а через $\partial/\partial \vec{n}_P$ обозначена правильная нормальная производная в точке $P$; условию излучения на бесконечности

$$u^* = e^{ikr} O\Big(\frac{1}{\sqrt{r}}\Big), \quad \frac{\partial u^*}{\partial r} - iku^* = e^{ikr} o\Big(\frac{1}{\sqrt{r}}\Big), \quad r \to \infty, \tag{3}$$
$$\operatorname{Im} k \geq 0, \quad u^*(x,y) = u(x,y) - e^{i(\alpha x - \beta y)}.$$

Функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую перечисленным условиям, будем называть *классическим решением* краевой задачи (1)–(3). Рассматриваемая краевая задача является математической моделью дифракции плоской $TH$-поляризованной электромагнитной волны $u_0(x,y) \cdot e^{-i\omega t}$, падающей из полупространства $y > 0$ на решетку, геометрия которой определяется функцией

$\widetilde{f}(x)$. Падающая волна характеризуется комплексным волновым числом $k$ и углом падения $\theta$, а составляющие волнового вектора имеют вид $\alpha = k\sin\theta$, $\beta = k\cos\theta$.

Отметим, что задачи дифракции акустических и электромагнитных волн на сходных областях при несколько иных предположениях рассматривались в работах [3]–[5].

## 2. Существование и единственность решения

С помощью формул Грина, примененных в области $S_R = S \cap B_R$, где $B_R$ — круг радиуса $R > a$, с последующим переходом к пределу при $R \to \infty$, получено следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Если* $\operatorname{Im} k \geq 0$ *и* $\operatorname{Re} k \neq 0$, *то краевая задача* (1)–(3) *имеет не более одного классического решения.*

Следуя [6], [7], определим обобщенный потенциал простого слоя

$$(V\varphi)(P) = \int_{\Gamma^*} G(P,P')\varphi(x')ds_{P'},$$

где

$$G(P,P') = \frac{\pi i}{2}\{H_0^{(1)}(kr) + H_0^{(1)}(kr^*)\}, \quad P = (x,z), \quad P' = (x',z'),$$
$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2}, \quad r^* = \sqrt{(x-x')^2 + (z+z')^2},$$

$\varphi \in \dot{C}[-a,a]$, а через $H_0^{(1)}(z)$ обозначена функция Ганкеля первого рода нулевого порядка.

**Теорема 2.** *При условии* $\operatorname{Im} k \geq 0$, $\operatorname{Re} k \neq 0$ *существует классическое решение краевой задачи* (1)–(3), *причем для него имеет место интегральное представление*

$$u(P) = \widetilde{u}(P) + \int_{\Gamma^*} G(P,P')\varphi(x')ds_{P'}, \quad P \in S, \tag{4}$$

*плотность которого* $\varphi(x)$ *является решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода*

$$-\pi\varphi(x) + \int_{\Gamma^*} \frac{\partial G(P,P')}{\partial \vec{n}_P}\varphi(x')ds_{P'} = \widetilde{\rho}(P), \quad P = (x, f(x)) \in \Gamma^*, \tag{5}$$

*где* $\widetilde{u}(P) = e^{ik(\alpha x - \beta y)} + e^{ik(\alpha x + \beta y)}$, *а* $\widetilde{\rho}(P) = -\dfrac{\partial(u_0(P) + \widetilde{u}(P))}{\partial \vec{n}_P}$.

*Обратно, если* $\varphi^*(x)$ *— решение интегрального уравнения* (5), *то функция* $u(P)$, *построенная по формуле* (4) *с плотностью* $\varphi^*(x)$, *является классическим решением краевой задачи* (1)–(3).

Доказательство проведено методом интегральных уравнений с использованием свойств обобщенного потенциала простого слоя [7], [8] и исследования поведения ядра интегрального уравнения (5).

## 3. Метод сплайн-коллокации

Интегральное уравнение (5) можно записать в виде

$$-\pi\varphi(x) + \int_{-a}^{a} h(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi = g(x), \quad -a < x < a, \tag{6}$$

где

$$h(x,\xi) = -\frac{i\pi k}{2}\sqrt{\frac{1+(f'(\xi))^2}{1+(f'(x))^2}}\Bigg[\frac{H_1^{(1)}(kr)}{r}\{(f(x)-f(\xi))-(x-\xi)f'(x)\}+$$

$$+\frac{H_1^{(1)}(kr^*)}{r^*}\{(f(x)+f(\xi))-(x-\xi)f'(x)\}\Bigg],$$

$$g(x)=\widetilde{\rho}(x,f(x)), \quad -a<x<a,$$

$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(f(x)-f(\xi))^2}$, $r^*=\sqrt{(x-\xi)^2+(f(x)+f(\xi))^2}$.

На отрезке $[-a,a]$ рассмотрим произвольную сетку узлов

$$-a<x_0<x_1<\cdots<x_n<a, \quad n=1,2,\ldots,$$

удовлетворяющую условию $\delta_n=\max\limits_{1\le j\le n}(x_j-x_{j-1})\to 0$, $n\to\infty$.

Приближенное решение интегрального уравнения (6) ищем в виде сплайна

$$\varphi_n^l(x)=\sum_{j=0^l}^{n}c_js_j^l(x), \quad 0^0=1, \tag{7}$$

где $s_j^l(x)$ — фундаментальные сплайны степени $l$.

Рассмотрим вычислительные схемы на основе сплайнов нулевой и первой степеней. Фундаментальные сплайны нулевой степени определяются соотношениями

$$s_j^0(x)=\begin{cases}1, & x_{j-1}<x\le x_j;\\ 0, & x\notin(x_{j-1},x_j],\end{cases} \quad j=\overline{1,n}.$$

Фундаментальные сплайны первой степени задаются формулами ($j=\overline{1,n}$)

$$s_j^1(x)=\left\{\begin{array}{cccc} 0, & x\le x_{j-1}; & \dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & x_{j-1}\le x\le x_j;\\ \dfrac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j}, & x_j\le x\le x_{j+1}; & 0, & x\ge x_{j+1}.\end{array}\right.$$

Неизвестные коэффициенты $c_j$ ($j=0^l,\ldots,n$) определяем согласно методу коллокации из системы линейных алгебраических уравнений

$$c_j+\sum_{k=0^l}^{n}\alpha_{jk}c_k=g_j, \quad j=\overline{0^l,n}, \tag{8}$$

где введены обозначения

$$g_j=g(x_j), \quad j=\overline{0^l,n},$$

$$\alpha_{jk}=\int_{-a}^{a}h(x_k,y)s_j^l(y)dy, \quad j,k=\overline{0^l,n}.$$

С помощью результатов [1], [9] доказана

**Теорема 3.** *В условиях теоремы 1 существует положительное целое число $n_0$ такое, что при $n\ge n_0$ система (8) имеет единственное решение $\{c_j^*\}$ и приближенные решения $\varphi_n^l(x)$ ($l=0;1$), построенные по формуле (7) при $c_j=c_j^*$, сходятся к точному решению $\varphi^*$ со скоростью*

$$\|\varphi^*-\varphi_n^l\|_C=O\left(\omega_x(h;\delta_n)+\delta_n\right),$$

*где*

$$\omega_x(h;\delta)\equiv\omega_x(h;\delta)_C=\sup_{\substack{x,y\in[-a,a]\\0<|\eta|\le\delta}}|h(x+\eta,y)-h(x,y)|,$$

*а $\delta_n$ определены ранее.*

## Литература


1. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
2. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1976. – 528 с.
3. Лепорский А.Н. *Экспериментальное исследование дифракции акустических волн на периодических структурах* // Акуст. журн. – 1955. – Т. 1. – № 1. – С. 48–57.
4. Басс Ф.Г., Фукс И.М. *Рассеяние волн на статистически неровной поверхности.* – М.: Наука, 1972. – 424 с.
5. Басс Ф.Г., Крутинь Ю.И., Сиренко Ю.К. и др. *Возможность строгого расчета рассеянных произвольными и случайными поверхностями полей с использованием алгоритмов метода аналитической регуляризации* // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1997. – Т. 2. – № 1. – С. 5–17.
6. Ильинский А.С., Шестопалов Ю.В. *Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн.* – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 184 с.
7. Шестопалов Ю.В. *Применение метода обобщенных потенциалов для решения некоторых задач теории дифракции и распространения волн* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1990. – Т. XXX. – № 7. – С. 1081–1092.
8. Колтон Д., Кресс Р. *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния.* – М.: Мир, 1987. – 311 с.
9. Габдулхаев Б.Г. *Аппроксимация полиномами и сплайнами решений слабо сингулярных интегральных уравнений* // Теория прибл. функций. – М.: Наука, 1977. – С. 89–93.



*Казанский государственный университет*



*Поступила*
04.08.2000