ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 2 (489)

УДК 517.948:517.544

*Т.И. ГАТАЛЬСКАЯ, Э.И. ЗВЕРОВИЧ*

# ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДЗЕТА-ФУНКЦИЕЙ ВЕЙЕРШТРАССА В КАЧЕСТВЕ ЯДРА

**1.** Пусть $\omega, \omega', a \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \mathbb{R}$ — параметры, причем $0 < a < \omega$. В пространстве $L^2(-a, a)$ рассмотрим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\lambda f(x) - \frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a} f(t)\zeta(t-x)dt = g(x), \quad -a < x < a, \tag{1}$$

где $\zeta(\cdot)$ — дзета-функция Вейерштрасса [1] с основными периодами $2\omega$ и $2i\omega'$. Так как функция $\zeta$ нечетная, и $\zeta(z) \sim \frac{1}{z}$ при $z \to 0$, то уравнение (1) является полным сингулярным интегральным уравнением с ядром Коши. Известно ([2], гл. 1), что интегральный оператор

$$(\mathcal{K}f)(x) := \frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a} f(t)\zeta(t-x)dt \tag{2}$$

ограниченно действует в $L^2(-a, a)$, и выполняется равенство

$$\mathcal{K}^2 = \mathcal{I} + \mathcal{T}, \tag{3}$$

где $\mathcal{I}$ — тождественный, а $\mathcal{T}$ — вполне непрерывный оператор. Оператор (2) является самосопряженным, поскольку при данном выборе периодов дзета-функция на вещественной оси вещественна. Наша задача — *найти в явном виде его спектр и собственные функции*.

Желая применить к уравнению (1) метод аналитического продолжения [3], введем новую неизвестную функцию

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a} f(t)\zeta(t-z)dt, \quad z \in \sqcap, \tag{4}$$

аналитическую в прямоугольнике $\sqcap := \{z = x + iy \mid -\omega \leqslant x \leqslant \omega;\ -\omega' \leqslant y \leqslant \omega'\}$ (рис. 1), разрезанном по отрезку $[-a, a]$.

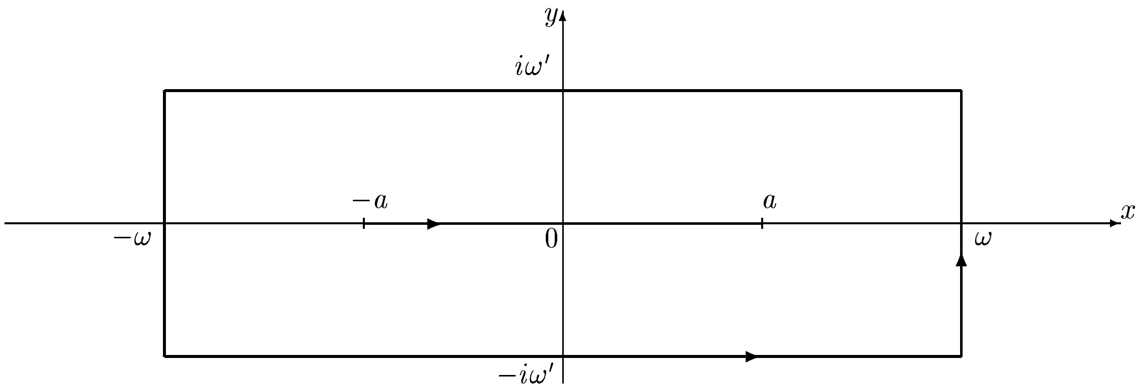


Рис. 1

Предельные значения функции $F$ на интервале $(-a, a)$ связаны формулами Сохоцкого [3]

$$F^+(x) - F^-(x) = f(x),$$
$$F^+(x) + F^-(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a} f(t)\zeta(t-x)dt. \tag{5}$$

Учитывая известные ([1], с. 53) тождества

$$\zeta(z+2\omega) \equiv \zeta(z) + 2\zeta(\omega),$$
$$\zeta(z+2i\omega') \equiv \zeta(z) + 2\zeta(i\omega'),$$

выпишем условия, которым должна удовлетворять функция $F$ на краях прямоугольника

$$F(x-i\omega') = F(x+i\omega') + C\zeta(i\omega'), \quad -\omega \leqslant x \leqslant \omega,$$
$$F(-\omega+iy) = F(\omega+iy) + C\zeta(\omega), \qquad -\omega' \leqslant y \leqslant \omega',$$

где

$$C := -\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a} f(t)dt \ . \tag{6}$$

Используя (5), перепишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\lambda\left[F^+(x) - F^-(x)\right] - \left[F^+(x) + F^-(x)\right] = g(x), \quad -a < x < a.$$

Эта задача при $\lambda = \pm 1$ является задачей об аналитическом продолжении функции $g$ с соответствующего берега разреза $(-a, a)$ в прямоугольник. Такого рода задачи разрешимы не при любой функции $g \in L^2(-a, a)$. Поэтому обе точки $\lambda = \pm 1$ принадлежат спектру оператора (2). Считая $\lambda^2 \neq 1$, приходим к следующей задаче линейного сопряжения Римана с неизвестной функцией $F$:

$$F^+(x) = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}F^-(x) + \frac{g(x)}{\lambda-1}, \quad -a < x < a, \tag{7}$$
$$F(x-i\omega') = F(x+i\omega') + C\zeta(i\omega'), \quad -\omega \leqslant x \leqslant \omega, \tag{8}$$
$$F(-\omega+iy) = F(\omega+iy) + C\zeta(\omega), \qquad -\omega' \leqslant y \leqslant \omega'. \tag{9}$$

Здесь $C$ — неопределенная постоянная, связанная с функцией $f$ равенством (6). Задача (7)–(9), равносильная уравнению (1), является неоднородной, даже если уравнение (1) однородное ($g(x) \equiv 0$).

Задача Римана для двоякопериодических функций ранее при других ограничениях рассматривалась в ([3], гл. III).

**2.** Начнем с исследования однородной задачи

$$\lambda f(x) - \frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a} f(t)\zeta(t-x)dt = 0 \tag{10}$$

в классе функций, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0. \tag{11}$$

Эта задача равносильна следующей однородной задаче сопряжения на торе:

$$F^+(x) = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}F^-(x), \quad -a < x < a,$$
$$F(x-i\omega') = F(x+i\omega'), \quad -\omega \leqslant x \leqslant \omega, \tag{12}$$
$$F(-\omega-iy) = F(\omega-iy), \quad -\omega' \leqslant y \leqslant \omega'.$$

Последние два равенства означают двоякую периодичность (т. е. аналитическую продолжимость на тор) функции $F$, и поэтому их можно отбросить. К задаче (12) применим теорию Римана на торе [5]. Решениям, лежащим в $L^2$, соответствуют ограниченные решения задачи (12). Так как коэффициент задачи (12) постоянный и вещественный, то его индекс $\varkappa$ и дефектные числа $l$ и $l'$ задачи легко вычисляются с помощью алгоритма, изложенного в ([5], с. 131–136). В результате оказывается, что в случае $\frac{\lambda+1}{\lambda-1} > 0$ будем иметь $\varkappa = l = l' = 0$, а в случае $\frac{\lambda+1}{\lambda-1} < 0$ получим $\varkappa = -1$ и $l - l' = 0$. Этот последний случай принято называть "особым". Его особенность заключается в том, что возможны два подслучая: $l = l' = 0$ и $l = l' = 1$. Те значения параметра $\lambda$, при которых реализуется последний подслучай, и будут собственными числами задачи (10), (11). Чтобы их найти, запишем критерий нетривиальной разрешимости задачи (12), представляющий собой критерий разрешимости в целых числах $m$, $n$ уравнения

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\ln\frac{\lambda+1}{\lambda-1}dt + 2n\omega + 2m\omega' i = 0. \tag{13}$$

Переписывая уравнение (13) в форме

$$\frac{a}{\pi i}\ln\frac{\lambda+1}{\lambda-1} + 2n\omega + 2m\omega' i = 0,$$

видим, что оно легко решается: $n = 0$, а $m \neq 0$ — произвольное целое число. И тогда соответствующее ему значение $\lambda = \lambda_m$ должно удовлетворять уравнению

$$\ln\frac{\lambda_m+1}{\lambda_m-1} = \frac{2\pi\omega' m}{a}.$$

Решая это уравнение, находим собственные числа

$$\lambda_m = \operatorname{cth}\frac{\pi\omega' m}{a}, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Полагая в (12) $\lambda = \lambda_m$, найдем общее решение задачи (12)

$$\begin{aligned}
F_m(z) &= C\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-a}^{a}\ln\frac{\lambda_m+1}{\lambda_m-1}\cdot\zeta(t-z)dt + m\cdot\int\limits_{-\omega-i\omega'}^{-\omega+i\omega'}\zeta(t-z)dt\right\} = \\
&= C\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{\lambda_m+1}{\lambda_m-1}\cdot\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sigma'(t-z)}{\sigma(t-z)}dt + m\cdot\int\limits_{-\omega-i\omega'}^{-\omega+i\omega'}\frac{\sigma'(t-z)}{\sigma(t-z)}dt\right\} = \\
&= C\exp\left\{\frac{\omega' m}{ai}\ln\frac{\sigma(a-z)}{\sigma(-a-z)} + m\cdot\ln\frac{\sigma(-\omega+i\omega'-z)}{\sigma(-\omega-i\omega'-z)}\right\} = \\
&= C_1\exp\left\{\frac{\omega' m}{ai}\ln\frac{\sigma(a-z)}{\sigma(a+z)} + m\cdot\ln\left(-e^{-2\zeta(\omega' i)(-\omega-i\omega'-z)}\right)\right\} = \\
&= C_2\exp\left\{\frac{\omega' m}{ai}\ln\frac{\sigma(a-z)}{\sigma(a+z)} - 2m\zeta(\omega' i)z\right\} = C_2\left[\left(\frac{\sigma(a-z)}{\sigma(a+z)}\right)^{\frac{\omega'}{ai}}\cdot e^{-2z\zeta(\omega' i)}\right]^m,
\end{aligned}$$

где $C, C_1, C_2$ — произвольные постоянные. Отсюда при надлежащем выборе постоянной $C_2$ легко находится нетривиальное решение $\varphi_m$ уравнения (10), соответствующее собственному значению $\lambda = \lambda_m$,

$$\varphi_m(x) = F_m^+(x) - F_m^-(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\left\{\left[\frac{\sigma(a-x)}{\sigma(a+x)}\right]^{\frac{\omega'}{ai}}\cdot e^{-2x\zeta(\omega' i)}\right\}^m, \quad m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}, \quad -a<x<a. \tag{14}$$

**3.** Система функций (14) ортонормированная. Покажем, что она *полна в пространстве* $L_0^2(-a,a)$ *функций, лежащих в* $L^2(-a,a)$ *и ортогональных функции* $\varphi_0(x)\equiv 1$. Проектируя левую часть равенства (10) на пространство $L_0^2(-a,a)$, легко заключить, что эта левая часть лишь вполне непрерывным слагаемым отличается от оператора, действующего в $L_0^2(-a,a)$. Поэтому для интегрального оператора из (10) справедливо равенство (3), откуда следует, что собственные числа оператора $\mathcal{T}$ из (3) равны $(\lambda_m^2-1)$, и каждому такому собственному числу соответствуют две собственные функции $\varphi_{\pm m}(x)$ из (14). Применяя теорему Гильберта–Шмидта ([5], с. 212), заключаем, *что система* (14) *будет полной в* $L_0^2(-a,a)$, *если и только если уравнение*

$$(\mathcal{T}\varphi)(x)=0, \tag{15}$$

*где* $\mathcal{T}$ *— вполне непрерывный оператор из* (3), *имеет только нулевое решение.* Используя (3), перепишем уравнение (15) в следующем равносильном виде:

$$\varphi(x)=\left(\mathcal{K}^2\varphi\right)(x), \quad -a<x<a, \tag{16}$$

где $\mathcal{K}$ — оператор (2). Введем новые неизвестные функции

$$\Phi(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\varphi(t)\zeta(t-z)dt, \quad \Psi(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}(\mathcal{K}\varphi)(t)\zeta(t-z)dt.$$

Используя формулы Сохоцкого и уравнение (16), имеем при $x\in(-a,a)$

$$\begin{aligned} &\Phi^+(x)-\Phi^-(x)=\varphi(x), && \Psi^+(x)-\Psi^-(x)=(\mathcal{K}\varphi)(x),\\ &\Phi^+(x)+\Phi^-(x)=(\mathcal{K}\varphi)(x), && \Psi^+(x)+\Psi^-(x)=\varphi(x). \end{aligned}$$

Исключая из этих равенств функции $\varphi$ и $\mathcal{K}\varphi$, получим

$$\begin{aligned} \Phi^+(x)-\Phi^-(x)&=\Psi^+(x)+\Psi^-(x),\\ \Phi^+(x)+\Phi^-(x)&=\Psi^+(x)-\Psi^-(x). \end{aligned}$$

Складывая и вычитая эти равенства, найдем

$$\Phi^+(x)\equiv\Psi^+(x), \quad \Phi^-(x)\equiv-\Psi^-(x), \quad -a<x<a.$$

Отсюда в силу теоремы единственности следует $\Phi(z)\equiv\Psi(z)\equiv 0$, и, значит, уравнение (15) имеет только нулевое решение. Тем самым полнота системы (14) в пространстве $L_0^2(-a,a)$ установлена.

Добавляя к системе (14) еще одну функцию $\varphi_0(x):=\frac{1}{\sqrt{2a}}$, заключаем, что *ортонормированная система*

$$\varphi_m(x)=\frac{1}{\sqrt{2a}}\left\{\left[\frac{\sigma(a-x)}{\sigma(a+x)}\right]^{\frac{\omega'}{ai}}\cdot e^{-2x\zeta(\omega' i)}\right\}^m, \quad m\in\mathbb{Z}, \tag{17}$$

*полна в пространстве* $L^2(-a,a)$.

**4.** Используя полную ортонормированную систему (17), вернемся к уравнению (1). Пусть

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}f_k\varphi_k(x), \quad g(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}g_k\varphi_k(x)$$

— ряды Фурье функций $f$ и $g$ по системе (17). Подставляя их в (1), находим

$$\lambda\sum_{k\in\mathbb{Z}}f_k\varphi_k(x)-\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\sum_{k\in\mathbb{Z}}f_k\varphi_k(t)\zeta(t-x)dt=\sum_{k\in\mathbb{Z}}g_k\varphi_k(x).$$

Последнее равносильно следующему:

$$\lambda\sum_{k\in\mathbb{Z}}f_k\varphi_k(x)-\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}f_k\lambda_k\varphi_k(x)-\frac{f_0}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\zeta(t-x)}{\sqrt{2a}}dt=\sum_{k\in\mathbb{Z}}g_k\varphi_k(x).$$

Разлагая входящий сюда интеграл в ряд Фурье, имеем

$$\frac{1}{\pi i\sqrt{2a}}\int_{-a}^{a}\zeta(t-x)dt=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\zeta_k\varphi_k(x).$$

Учитывая, что в силу нечетности функции $\zeta$ выполняется равенство

$$\zeta_0=\frac{1}{2\pi ia}\int_{-a}^{a}dx\int_{-a}^{a}\zeta(t-x)dt=0,$$

получим

$$\lambda\sum_{k\in\mathbb{Z}}f_k\varphi_k(x)-\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\lambda_kf_k\varphi_k(x)-f_0\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\zeta_k\varphi_k(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}g_k\varphi_k(x).$$

Приравнивая здесь коэффициенты при одинаковых функциях $\varphi_k(x)$, приходим к бесконечной системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов $f_k$

$$\begin{gathered}\lambda f_0=g_0,\\ (\lambda-\lambda_k)f_k-f_0\zeta_k=g_k,\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.\end{gathered}\tag{18}$$

Если, в частности, $g(x)\equiv 0$, то все $g_k$ равны нулю, и мы имеем однородную систему

$$\begin{gathered}\lambda f_0=0,\\ (\lambda-\lambda_k)f_k-f_0\zeta_k=0,\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.\end{gathered}\tag{19}$$

Отсюда видно, что точка $\lambda=0$ принадлежит спектру уравнения (1), т. к. при $\lambda=0$ система (18) не является безусловно разрешимой. Условием ее разрешимости (при $\lambda=0$) является равенство $g_0=0$, и если оно выполнено, то коэффициент $f_0$ можно задать произвольно. Полагая $f_0=1$, из (19) находим $f_k=-\frac{\zeta_k}{\lambda_k}$ при $k\in\pm\mathbb{N}$. Так как $\lambda_k\to\pm1$ при $k\to\pm\infty$, то ряд $\sum\limits_k\left|\frac{\zeta_k}{\lambda_k}\right|^2$ сходится, поэтому функция $\widehat{\varphi}(x):=-\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\zeta_k}{\lambda_k}\varphi_k(x)$ принадлежит пространству $L^2(-a,a)$. Однако она не является собственной функцией оператора (2), соответствующей собственному значению $\lambda=0$, в силу неравенства

$$\begin{gathered}(\mathcal{K}\widehat{\varphi})(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\widehat{\varphi}(t)\zeta(t-x)dt=-\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\zeta_k}{\lambda_k}\varphi_k(t)\zeta(t-x)dt=\\ =-\frac{1}{\pi i}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\zeta_k\varphi_k(x)=\frac{1}{\pi^2\sqrt{2a}}\int_{-a}^{a}\zeta(t-x)dt=\frac{1}{\pi^2\sqrt{2a}}\ln\frac{\sigma(a-x)}{\sigma(a+x)}\not\equiv 0.\end{gathered}$$

Покажем теперь, что перечисленные выше значения $\lambda$, принадлежащие спектру, исчерпывают весь спектр. С этой целью предположим, что значение $\lambda$ в системе (18) такое, что

$$\lambda\notin\{0\}\cup\{1\}\cup\{-1\}\cup\left\{\lambda_k=\operatorname{cth}\frac{\pi\omega'm}{a}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}.\tag{20}$$

*В этих случаях система* (18) *разрешима безусловно и однозначно.* Ее решение легко вычисляется и имеет вид

$$f_0=\frac{g_0}{\lambda},\quad f_k=\frac{g_0\zeta_k+\lambda g_k}{\lambda(\lambda-\lambda_k)},\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.\tag{21}$$

Так как $\lambda_k\to\pm1$ при $k\to\pm\infty$ соответственно, то знаменатель в (21) ограничен снизу по модулю, поэтому $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in l^2$, а функция

$$f(x):=\frac{g_0}{\lambda}+\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{g_0\zeta_k+\lambda g_k}{\lambda(\lambda-\lambda_k)}\varphi_k(x)$$

принадлежит пространству $L^2(-a,a)$ и в силу теоремы Рисса–Фишера является (единственным) решением уравнения (1). Итак, правая часть отношения (20) представляет собой *весь спектр* оператора (2). Отсюда следует, что $\|\mathcal{K}\| = \operatorname{cth}\frac{\pi\omega'}{a}$.

Решим теперь уравнение (1) *для значений* $\lambda$, *лежащих на спектре.* При $\lambda = 0$ уравнение (1) приобретает вид

$$-\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a} f(t)\zeta(t-x)dt = g(x), \quad -a < x < a. \tag{22}$$

Критерием его разрешимости, как уже отмечалось, является равенство

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx = 0. \tag{23}$$

Так как однородное уравнение (22) имеет только нулевое решение, то в системе (18) при $\lambda = 0$ надо положить еще $f_0 = 0$. Тогда получим $f_k = -\frac{g_k}{\lambda_k}$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Итак, *при выполнении условия* (23) *единственное решение уравнения* (22) *имеет вид*

$$f(x) = -\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{g_k}{\lambda_k}\varphi_k(x).$$

Пусть $\lambda = \lambda_m = \operatorname{cth}\frac{\pi\omega' m}{a}$, $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. В этом случае решением однородной системы (19) является последовательность $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, в которой $f_m$ — произвольное число, а $f_k = 0$ при $k \neq m$. Из (18) легко вытекает критерий разрешимости уравнения (1) при $\lambda = \lambda_m$

$$g_0\zeta_m + \lambda_m g_m = 0.$$

Если это условие выполнено, то *общее решение уравнения* (1) *имеет вид*

$$f(x) = \frac{g_0}{\lambda_m} + f_m\varphi_m(x) + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0;m\}} \frac{g_0\zeta_k + \lambda_m g_k}{\lambda_m(\lambda_m - \lambda_k)}\varphi_k(x),$$

где $f_m$ — произвольная постоянная.

Пусть $\lambda = -1$. Тогда уравнение (1) равносильно задаче об аналитическом продолжении функции $g$ с верхнего берега разреза $(-a,a)$ до функции, аналитической в области, показанной на рис. 1, и представимой интегралом, аналогичным (4). Эта задача имеет не более одного решения. *Критерием ее разрешимости является условие*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|\frac{g_0\zeta_k - g_k}{1+\lambda_k}\right|^2 < +\infty. \tag{24}$$

*Если оно выполняется, то функция*

$$f(x) = -g_0 + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{g_0\zeta_k - g_k}{1+\lambda_k}\varphi_k(x)$$

*принадлежит пространству* $L^2(-a,a)$ *и является единственным решением уравнения* (1) *при* $\lambda = -1$.

И, наконец, пусть $\lambda = 1$. Тогда уравнение (1) равносильно задаче об аналитическом продолжении функции $f$ с нижнего берега разреза $(-1,1)$ до функции, аналитической в области, показанной на рис. 1, и представимой там интегралом, аналогичным (4). Эта задача аналогична предыдущей. Критерием ее разрешимости является условие

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|\frac{g_0\zeta_k + g_k}{1-\lambda_k}\right|^2 < +\infty. \tag{25}$$

*Если это условие выполнено, то единственное решение уравнения* (1) *при* $\lambda = 1$ *имеет вид*

$$f(x) = g_0 + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{g_0\zeta_k + g_k}{1-\lambda_k}\varphi_k(x).$$

Отметим, что *все функции системы* (14) *обладают обоими указанными выше свойствами аналитической продолжимости, и притом до двояко-периодических функций.* Поэтому естественно ожидать аналогичных свойств и от рядов Фурье по этой системе, особенно если коэффициенты этих рядов достаточно быстро стремятся к нулю. Например, если ряд $g(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} g_k\varphi_k(x)$ является финитным (т. е. обрывается) хотя бы в одну сторону, то соответствующее неравенство (24) или (25) будет автоматически выполняться. Таким образом, если ограничиваться только такими правыми частями, то задача аналитического продолжения функции $g(x)$ будет однозначно и безусловно разрешимой и к тому же корректной.

**5.** Поскольку равносильная уравнению (1) задача сопряжения (7)–(9) допускает решение в квадратурах, то и уравнение (1) можно решить в квадратурах. Однако такое решение само по себе мало интересно, поскольку в предыдущем пункте уравнение (1) полностью исследовано и решено другим методом. Решение в квадратурах может представлять интерес с точки зрения изучения свойств полной ортонормированной системы (17), поскольку эта система является новой.

Покажем, что *полная в* $L^2(-a,a)$ *система* (17) *не является полной* в $L^1(-a,a)$. Для доказательства надо предъявить хотя бы одну функцию $\varphi \in L^1 \setminus L^2$, ортогональную ко всем функциям системы (17). С этой целью предположим, что в уравнении (1) правая часть $H$-непрерывна на $[-a,a]$, и будем интересоваться существованием почти ограниченных решений (т. е. таких решений $f$, которые $H$-непрерывны на $(-a,a)$, причем $f(x) = o\left((x\pm a)^{-\varepsilon}\right)$ при $x \to \pm a$ для любого $\varepsilon > 0$) при $-1 < \lambda < 1$, которые подчинены дополнительному условию

$$C = \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Тогда уравнение (1) равносильно задаче (7), а уравнения (8) и (9) можно не учитывать, т. к. в них $C = 0$. Применяя к задаче (7) теорию задачи сопряжения на торе, заключаем следующее: критерием ее разрешимости является равенство

$$\int_{-a}^{a} g(t)\Psi^+(t)dt = 0, \tag{26}$$

где $\Psi$ — нетривиальное решение однородной задачи, союзной к (7),

$$\Psi^-(x) = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}\Psi^+(x), \quad -a < x < a, \tag{27}$$

в классе функций, суммируемых на $(-1,1)$. В силу того, что $\frac{\lambda+1}{\lambda-1} < 0$, задача (27) имеет одно линейно независимое решение. Это решение содержится в формуле

$$\Psi(z) = C\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-a}^{a} \ln\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\cdot\zeta(t-z)dt + \int\limits_{a}^{z_\lambda}\zeta(t-z)dt + \right.$$
$$\left. + n_\lambda\cdot\int\limits_{-\omega-i\omega'}^{\omega-i\omega'}\zeta(t-z)dt + m_\lambda\cdot\int\limits_{-\omega-i\omega'}^{-\omega+i\omega'}\zeta(t-z)dt\right\}, \tag{28}$$

где $C$ — постоянная, $\ln\frac{\lambda+1}{\lambda-1} = \ln\left|\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right| + \pi i$, а $m_\lambda$, $n_\lambda$ — неизвестные целые числа, $z_\lambda \in \Pi$ — неизвестная точка, которая подбирается так, чтобы функция $\Psi$ стала двоякопериодической. Это последнее требование приводит к следующему уравнению (которое является весьма частным случаем так называемой *проблемы обращения Якоби*):

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\ln\left|\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right|+\pi i\right)\cdot 2a+z_\lambda-a+n_\lambda\cdot 2\omega+m_\lambda\cdot 2i\omega'=0.$$

Последнее уравнение преобразовывается к виду

$$\frac{a}{\pi i}\ln\left|\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right|+\widetilde{z}_\lambda+n_\lambda\cdot 2\omega+m_\lambda\cdot 2i\omega'=0.$$

Поскольку $z_\lambda$ должны лежать в основном прямоугольнике, то

$$-\omega\leqslant \operatorname{Re} z_\lambda<\omega,\quad -\omega'\leqslant \operatorname{Im} z_\lambda<\omega',$$

и, значит,

$$-\omega\leqslant \operatorname{Re}\widetilde{z}=-n_\lambda\cdot 2\omega<\omega,$$

$$-\omega'\leqslant \operatorname{Im}\widetilde{z}=\frac{a}{\pi}\ln\left|\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right|-2m_\lambda\omega'<\omega'.$$

Отсюда видно, что $n_\lambda=0$, $m_\lambda=\left[\frac{a}{2\pi\omega'}\ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right]$, где $[\cdot]$ — целая часть. Тем самым входящие в (28) параметры найдены, и мы имеем

$$\Psi(z)=C\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\left(\ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda}+\pi i\right)\cdot\ln\frac{\sigma(a-z)}{\sigma(a+z)}+\ln\frac{\sigma(z_\lambda-z)}{\sigma(a-z)}+m_\lambda\cdot\ln\frac{\sigma(-\omega+i\omega'-z)}{\sigma(-\omega-i\omega'-z)}\right\}=$$

$$=C_1\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\cdot\ln\frac{\sigma(a-z)}{\sigma(a+z)}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sigma(a-z)}{\sigma(a+z)}+\ln\frac{\sigma(z_\lambda-z)}{\sigma(a-z)}+m_\lambda\cdot\ln(-e^{2\zeta(i\omega')(-i\omega'-z)})\right\}=$$

$$=C_3\left[\frac{\sigma(a-z)}{\sigma(a+z)}\right]^{\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\cdot\frac{\sigma(z-z_\lambda)}{\sqrt{\sigma(a-z)\sigma(a+z)}}\cdot e^{-2m_\lambda\zeta(i\omega')z}.$$

При надлежащем выборе константы $C_3$ получим при $x\in(-a,a)$

$$\Psi^+(x)=\left[\frac{\sigma(a-x)}{\sigma(a+x)}\right]^{\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\cdot\frac{\sigma(x-iy_\lambda)}{\sqrt{\sigma(a-x)\sigma(a+x)}}\cdot e^{-2m_\lambda\zeta(i\omega')x},\tag{29}$$

где обозначено $iy_\lambda=z_\lambda$, поскольку $\operatorname{Re} z_\lambda=0$.

Итак, в условие (26) входит функция (29), которая, очевидно, лежит в $L^1(-a,a)$, но не лежит в $L^2(-a,a)$. Считая, что $-1<\lambda<1$, рассмотрим уравнение

$$\lambda f(x)-\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}f(t)\zeta(t-x)dt=\varphi_m(x),\tag{30}$$

где $\varphi_m(x)$, $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, — функции системы (17). Уравнение (30) разрешимо, поскольку функция

$$f(x)=\frac{\varphi_m(x)}{\lambda-\lambda_m}$$

является его ограниченным решением, которое притом удовлетворяет условию $\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=0$. По критерию (26) выполняется равенство

$$\int_{-a}^{a}\varphi_m(x)\Psi^+(x)dx=0,\quad m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Если положить $\widetilde{\Psi}(x):=\Psi^+(x)-\int\limits_{-a}^{a}\Psi^+(t)dt$, то будем иметь $\int\limits_{-a}^{a}\varphi_m(x)\widetilde{\Psi}(x)dx=0$ для всех $m\in\mathbb{Z}$. Значит, функции $\widetilde{\Psi}$ ортогональны ко всем функциям системы (17).

## Литература


1. Ахиезер Н.И. *Элементы теории эллиптических функций.* – М.: Наука, 1970. – 304 с.
2. Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. *Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.* – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.
3. Чибрикова Л.И. *Основные граничные задачи для аналитических функций.* — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977. – 303 с.
4. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.
5. Зверович Э.И. *Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях* // УМН. – 1971. – Т. 26. – С. 173–179.
6. Хатсон В., Пим Дж. *Приложения функционального анализа и теории операторов.* – М.: Мир, 1983. – 432 с.



*Белорусский государственный университет*



*Поступила* 28.11.2001