ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 11 (474)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956

В.И. ЖЕГАЛОВ, Е.А. УТКИНА

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В параллелепипеде $D = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1,\ z_0 < z < z_1\}$ рассмотрим уравнение

$$L(u) \equiv \sum_{\alpha,\beta=0}^{2} \sum_{\gamma=0}^{1} a_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z) \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = F(x,y,z). \tag{1}$$

Плоский его аналог, когда $a_{\alpha\beta 1} \equiv 0$ для всех α, β (z можно считать при этом параметром или вообще отсутствующим), содержит в себе уравнение Буссинеска–Лява $u_{xxyy} - u_{xx} + u_{yy} = 0$ из теории колебаний ([1], формула (20)) и уравнение Аллера $u_y = (au_x + bu_{xy})_y$, описывающее процесс фильтрации при поглощении влаги корнями растений ([2], с. 261). Общее двумерное уравнение со старшей производной u_{xxy} рассматривалось в работах [3]–[9]. В (1) содержится также случай уравнения со старшей производной u_{xyz}, изучавшийся в [10]–[12]. Уравнения с такой производной используются при моделировании процессов вибрации и играют существенную роль в теориях аппроксимации и отображений ([13], с. 109). К подобным уравнениям сводится задача интегрального представления преобразования одних обыкновенных линейных дифференциальных операторов в другие [14]. Таким образом, можно рассматривать (1) как обобщение ряда исследованных ранее уравнений.

Будем далее считать, что $a_{221} \equiv 1$, гладкость остальных коэффициентов определяется включениями

$$a_{\alpha\beta\gamma} \in C^{\alpha+\beta+\gamma}(\overline{D}), \quad F \in C^{2+2+1}(\overline{D}), \tag{2}$$

где $C^{\alpha+\beta+\gamma}$ — класс непрерывных в $\overline{D}$ функций вместе с их производными $\partial^{r+s+t}/\partial x^r \partial y^s \partial z^t$ $(r = 0, \dots, \alpha;\ s = 0, \dots, \beta;\ t = 0, \dots, \gamma)$.

1. Пусть X, Y, Z — грани D при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ соответственно.

Задача (Гурса). Найти в D решение уравнения (1) класса C^{2+2+1}, удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{gathered} u|_X = \varphi(y,z), \quad u|_Y = \psi(x,z), \quad u|_Z = \theta(x,y), \\ u_x|_X = \varphi_1(y,z), \quad u_y|_Y = \psi_1(x,z), \\ \theta \in C^{2+2}(\overline{Z}), \quad \varphi, \varphi_1 \in C^{2+1}(\overline{X}), \quad \psi, \psi_1 \in C^{2+1}(\overline{Y}). \end{gathered} \tag{3}$$

На ребрах D предположим выполненными условия согласования

$$\begin{gathered} \varphi(y_0,z) = \psi(x_0,z), \quad \varphi(y,z_0) = \theta(x_0,y), \quad \psi(x,z_0) = \theta(x,y_0), \\ \varphi_1(y_0,z) = \psi_x(x_0,z), \quad \psi_1(x_0,z) = \varphi_y(y_0,z), \end{gathered}$$

при этом сами согласованные значения непрерывно дифференцируемы.

Будем решать данную задачу путем развития варианта метода Римана из работ [9], [11]. Для сокращения объема формул далее операторы дифференцирования и интегрирования будем записывать с помощью символов D_t^k. А именно, если $k = 1,2,\dots$, то $D_t^k\varphi \equiv \partial^k\varphi/\partial t^k$; если $k=-1,-2,\dots$, то $D_t^k\varphi \equiv \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{-k-1}\varphi(\tau)}{(-k-1)!}d\tau$; D_t^0 — единичный оператор.

Решение интегрального уравнения

$$\sum_{i_1=0}^{2}\sum_{i_2=0}^{2}\sum_{i_3=0}^{1}(-1)^{(i_1+i_2+i_3)+1}D_x^{i_1-2}D_y^{i_2-2}D_z^{i_3-1}(a_{i_1 i_2 i_3}R)=1, \tag{4}$$

которое существует и единственно ([15], с. 180), назовем функцией Римана $R(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$. Очевидно, запись (4) легче всего получить, отправляясь от сопряженного с (1) уравнения

$$L^*(V) \equiv \sum_{i_1=0}^{2}\sum_{i_2=0}^{2}\sum_{i_3=0}^{1}(-1)^{(i_1+i_2+i_3)+1}D_x^{i_1}D_y^{i_2}D_z^{i_3}(a_{i_1 i_2 i_3}V)=0. \tag{5}$$

Для любой функции u из класса $C^{2+2+1}(D)$ имеет место тожество

$$\begin{aligned}(uR)_{xxyyz} \equiv RL(u) + \sum_{\substack{i_1=0\\ 0<i_1+i_2+i_3<5}}^{2}\sum_{i_2=0}^{2}\sum_{i_3=0}^{1}(-1)^{i_1+i_2+i_3-1}D_x^{i_1}D_y^{i_2}D_z^{i_3}[uA_{i_1 i_2 i_3}] +\\ + \{u(a_{020}R)_y + u_z(a_{021}R)_y + u_x(a_{120}R)_y + u_{xz}(a_{121}R)_y +\\ + u_{xx}(a_{220}R)_y + u_{xxz}R_y\}_y + \{u(a_{200}R)_x + u_z(a_{201}R)_x + u_y(a_{210}R)_x +\\ + u_{yz}(a_{211}R)_x + u_{yy}(a_{220}R)_x + u_{yyz}R_x\}_x + \{u(a_{220}R)_{xy} + u_zR_{xy}\}_{xy},\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$a_{i_1 i_2 i_3}(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{\alpha_1=i_1}^{2}\sum_{\alpha_2=i_2}^{2}\sum_{\alpha_3=i_3}^{1}(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}D_x^{\alpha_1-i_1}D_y^{\alpha_2-i_2}D_z^{\alpha_3-i_3}(a_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}R).$$

Здесь $a_{\alpha\beta\gamma}$ зависит от (x,y,z), а R и ее производные — от (x,y,z,ξ,η,ζ). Вывод тождества (6) представляет эвристическую задачу. Сам же результат проще всего проверить непосредственным вычислением. При этом следует учесть, что по (x,y,z) R удовлетворяет уравнению (5).

Для дальнейшего нам понадобятся соотношения

$$A_{i_1 i_2 i_3}(x,y,z) \equiv 0 \quad (i_1=\overline{0,2};\ \ i_2=\overline{0,2};\ \ i_3=\overline{0,1},\ \ 0<i_1+i_2+i_3<5), \tag{7}$$

справедливость которых может быть непосредственно усмотрена из (4).

Положим в (6) $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$, $\xi=x$, $\eta=y$, $\zeta=z$ и вычислим от правой и левой частей тройной интеграл в пределах $x_0<\alpha<x$, $y_0<\beta<y$, $z_0<\gamma<z$. Если при этом считать, что $u(x,y,z)$ есть решение уравнения (1), учесть тождества (7) и граничные условия (3), то придем к формуле

$$\begin{aligned}u_{xy}(x,y,z) = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}R(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)F(\alpha,\beta,\gamma)d\gamma\, d\beta\, d\alpha + \varphi_{1y}(y,z)R(x_0,y,z,x,y,z) +\\ +\psi_{1x}(x,z)R(x,y_0,z,x,y,z) - \varphi_{1y}(y_0,z)R(x_0,y_0,z,x,y,z) +\\ +\theta_{xy}(x,y)R(x,y,z_0,x,y,z) - \varphi_{1y}(y,z_0)R(x_0,y,z_0,x,y,z) -\\ -\psi_{1x}(x,z_0)R(x,y_0,z_0,x,y,z) + \varphi_{1y}(y_0,z_0)R(x_0,y_0,z_0,x,y,z) -\\ -\sum_{\substack{i_1=1\\ i_1+i_2<4}}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}(-1)^{i_1+i_2}\Big[D_y^{i_2-1}(\varphi_{i_1-1}(y,z))A_{i_1 i_2 1}(x_0,y,z) + D_x^{i_1-1}(\psi_{i_2-1}(x,z)) \times\\ \times A_{i_1 i_2 1}(x,y_0,z) + D_x^{i_1-1}D_y^{i_2-1}(\theta(x,y))A_{i_1 i_2 1}(x,y,z_0) -\\ D_y^{i_2-1}(\varphi_{i_1-1}(y_0,z))A_{i_1 i_2 1}(x_0,y_0,z) - D_x^{i_1-1}D_y^{i_2-1}(\theta(x_0,y))A_{i_1 i_2 1}(x_0,y,z_0) -\\ -D_x^{i_1-1}(\psi_{i_2-1}(x,z_0))A_{i_1 i_2 1}(x,y_0,z_0) + D_y^{i_2-1}(\varphi_{i_1-1}(y_0,z_0))A_{i_1 i_2 1}(x_0,y_0,z_0)\Big] -\end{aligned}$$

$$-\int_{x_0}^{x}\sum_{i_2=1}^{2}(-1)^{i_2}\Big[\psi_{i_2}(\xi,z)A_{0i_2i_3}(\xi,y_0,z)+D_y^{i_2-1}\theta(\xi,y)A_{0i_2i_3}(\xi,y,z_0)-$$

$$-D_y^{i_2-1}(\theta(\xi,y_0))A_{0i_2i_3}(\xi,y_0,z_0)\Big]d\xi-\int_{y_0}^{y}\sum_{i_1=1}^{2}(-1)^{i_1}\Big[\varphi_{i_1-1}(\eta,z)A_{i_1 0 i_3}(x_0,\eta,z)+$$

$$+D_x^{i_1-1}(\theta(x,\eta))A_{i_1 0 i_3}(x,\eta,z_0)-D_x^{i_1-1}(\theta(x_0,\eta))A_{i_1 0 i_3}(x_0,\eta,z_0)\Big]d\eta+$$

$$+\int_{z_0}^{z}\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}(-1)^{i_1+i_2}\Big[D_y^{i_2-1}(\varphi_{i_1-1}(y,\zeta))A_{i_1 i_2 0}(x_0,y,\zeta)+D_x^{i_1-1}(\psi_{i_2-1}(x,\zeta))\times$$

$$\times A_{i_1 i_2 0}(x,y_0,\zeta)-D_y^{i_2-1}(\varphi_{i_1-1}(y_0,\zeta))A_{i_1 i_2 0}(x_0,y_0,\zeta)\Big]d\zeta-$$

$$-\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\theta(\xi,\eta)A_{001}(\xi,\eta,z_0)d\eta\,d\xi+\int_{x_0}^{x}\int_{z_0}^{z}\sum_{i_2=1}^{2}(-1)^{i_2}\psi_{i_2-1}(\xi,\zeta)A_{0i_20}(\xi,y_0,\zeta)d\zeta\,d\xi+$$

$$+\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}\sum_{i_1=1}^{2}(-1)^{i_1}\varphi_{i_1-1}(\eta,\zeta)A_{i_1 00}(x_0,\eta,\zeta)d\zeta\,d\eta. \qquad (8)$$

Отсюда, обозначив через $H(x,y,z,x,y,z)$ правую часть (8) без первого слагаемого, приходим к решению рассматриваемой задачи (1), (3)

$$u(x,y,z)=\varphi(y,z)+\psi(x,z)-\varphi(y_0,z)+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}H(\alpha,\beta,z,\alpha,\beta,z)d\beta\,d\alpha+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\alpha}\int_{y_0}^{y}\int_{y_0}^{\beta}\int_{z_0}^{z}R(t_1,t_2,\gamma,\alpha,\beta,z)F(t_1,t_2,\gamma)d\gamma\,dt_2\,d\beta\,dt_1\,d\alpha. \qquad (9)$$

Условия гладкости (2) обеспечивают принадлежность решения классу $C^{2+2+1}(D)$. Если считать φ, ψ, θ, φ_1, ψ_1 произвольными функциями, то можно рассматривать формулы (8), (9) как общее структурное представление решений уравнения (1), подобно тому как в ([16], с. 66) это сделано для уравнения $u_{xy}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=0$.

2. Формулы (8), (9) дают решение задачи (1), (3) в явном виде, если функция R известна. Пусть, например,

$$a_{201}\equiv a_{021}\equiv a_{001}\equiv a_{101}\equiv a_{011}\equiv a_{020}\equiv a_{200}\equiv a_{100}\equiv a_{010}\equiv a_{000}\equiv 0. \qquad (10)$$

Тогда (4) имеет тот же вид, что уравнение (4) из [12]. Если дополнительно к (10) выполняются тождества

$$\begin{aligned}&\frac{\partial a_{220}}{\partial x}+a_{220}a_{121}-a_{120}\equiv 0, \quad &\frac{\partial a_{220}}{\partial y}+a_{220}a_{211}-a_{210}\equiv 0,\\ &\frac{\partial a_{211}}{\partial x}+a_{211}a_{121}-a_{111}\equiv 0, \quad &\frac{\partial a_{210}}{\partial x}+a_{210}a_{121}-a_{110}\equiv 0,\end{aligned} \qquad (11)$$

то в соответствии с формулой (14) из [12] функция Римана имеет вид

$$R(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)=\exp\left[\int_{\zeta}^{z}a_{220}(\xi,\eta,\gamma)d\gamma+\int_{\eta}^{y}a_{221}(\xi,\beta,z)d\beta+\int_{\xi}^{x}a_{121}(\alpha,y,z)d\alpha\right].$$

В случае, когда вместо нуля в правой части последнего тождества (11) стоит произведение $\lambda(x)\mu(y)\nu(z)$, а коэффициенты a_{220}, a_{121}, a_{211} имеют представления

$$a_{220}=A(z)+\delta xy, \quad a_{121}=B(x)=\delta yz, \quad a_{211}=C(y)+\delta xz, \quad \delta=\mathrm{const},$$

следует воспользоваться формулами (18), (25) из [12], в соответствии с которыми

$$R(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)=R_0(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\,{}_0F_2(1,1,\omega),$$

где ${}_0F_2$ — обобщенная гипергеометрическая функция ([17], с. 20), а

$$R_0 \equiv \exp\left[\int_\xi^x B(\alpha)d\alpha + \int_\eta^y C(\beta)d\beta + \int_\zeta^z A(\gamma)d\gamma + \delta(xyz - \xi\eta\zeta)\right],$$

$$\omega = \int_\xi^x \lambda(\alpha)d\alpha \int_\eta^y \mu(\beta)d\beta \int_\zeta^z \nu(\gamma)d\gamma.$$

Приведем еще один пример. Пусть в (1) $a_{221} \equiv 1$, $a_{000} = a_{000}(z) \neq 0$, а все остальные коэффициенты — тождественные нули. Введем преобразование

$$p = \int_{z_0}^z a_{000}(\sigma)d\sigma, \tag{12}$$

обратное к которому запишем как $z = s(p)$. Полагая, что (12) переводит ζ в q, γ в ω и обозначая $w(x, y, p) = V(x, y, s(p))$ в уравнении (4), записанного для данного примера, найдем

$$w(x, y, p) = 1 + \int_\xi^x \int_\eta^y \int_q^p (x - \alpha)(y - \beta)w(\alpha, \beta, \omega)d\omega\, d\beta\, d\alpha. \tag{13}$$

Если ввести перед интегралом параметр λ и представить, как обычно, решение (13) в виде ряда по степеням λ, то получим

$$w(x, y, p) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}(p - q)^k \frac{[(x - \xi)(y - \eta)]^{2k}}{[(2k)!]^2}. \tag{14}$$

В том, что (14) удовлетворяет (13), можно убедиться также непосредственным вычислением. Подставляя в (14) значения p и q, имеем

$$V(x, y, p) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k![(2k)!]^2}\left[(x - \xi)^2(y - \eta)^2 \int_\zeta^z a_{000}(\sigma)d\sigma\right]^k.$$

Аналогично можно вычислить V и в других случаях, когда в (4) лишь один из коэффициентов $a_{\alpha\beta\gamma}$, имея определенную структуру, отличен от тождественного нуля.

Литература

1. Солдатов А.П., Шхануков М.Х. *Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка* // ДАН СССР. – 1987. – Т. 297. – № 3. – С. 547–552.
2. Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии.* – М.: Высш. школа, 1995. – 301 с.
3. Colton D. *Pseudoparabolic equations in one space variable* // J. Different. Equat. – 1972. – V. 12. – № 3. – P. 559–565.
4. Rundell W., Stecher M. *Remarks concerning the supports of solution of pseudoparabolic equation* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 63. – № 1. – P. 77–81.
5. Rundell W. *The construction of solutions to pseudoparabolic equations in noncylindrical domains* // J. Different. Equat. – 1978. – V. 27. – № 3. – P. 394–404.
6. Rundell W., Stecher M. *The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equation* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1979. – V. 76. – № 2. – P. 253–257.
7. Водахова В.А. *Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса* // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 2. – С. 280–285.
8. Шхануков М.Х. *Об одном методе решения краевых задач для уравнений третьего порядка* // ДАН СССР. – 1982. – Т. 265. – № 6. – С. 1327–1330.
9. Жегалов В.И., Уткина Е.А. *Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 10. – С. 73–76.

10. Фаге М.К. *Задача Коши для уравнения Бианки* // Матем. сб. – 1958. – Т. 45. – № 3. – С. 281–322.
11. Жегалов В.И. *Трехмерный аналог задачи Гурса* // Неклассич. уравнения и уравнения смешан. типа. – Новосибирк: Ин-т матем. СО АН СССР, 1990. – С. 94–98.
12. Жегалов В.И.*О трехмерной функции Римана* // Сиб. матем. журн. – 1997. – Т. 36. – № 5. – С. 1074–1079.
13. Бондаренко Б.А. *Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных.* – Ташкент: ФАН, 1987. – 146 с.
14. Фаге М.К. *Операторно-аналитические функции одной независимой переменной* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1958. – Т. 7. – С. 227–268.
15. Мюнтц Г. *Интегральные уравнения.* Ч. 1. – Л.–М.: ГТТИ, 1934. – 320 с.
16. Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.
17. Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петьо Г., Фогель Т. *Функции математической физики.* – М.: ГИФМЛ, 1963. – 102 с.

Казанский государственный университет

Поступили
полный текст 03.07.2000
краткое сообщение 06.02.2001