*Известия вузов. Математика* *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
*2016, № 4, с. 32–45* *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

*М. МИРСАБУРОВ, С.Т. ЧОРИЕВА*

# О ЗАДАЧЕ С ТРЕМЯ ВАРИАНТАМИ СМЕЩЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

*Аннотация.* Для уравнения смешанного типа исследуется задача с условиями смещения на внутренних характеристиках, на линии вырождения и на границе эллиптической части области. С помощью принципа максимума доказана единственность, а с помощью метода интегральных уравнений — существование решения задачи.

*Ключевые слова*: сингулярный коэффициент, внутренние характеристики, уравнение Винера–Хопфа, индекс уравнения.

*УДК*: 517.956

**1. Постановка задачи А.** Пусть $\Omega$ — конечная односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$, с концами в точках $A(-1,0)$, $B(1,0)$, а при $y < 0$ — характеристиками $AC$ и $BC$ уравнения

$$(\operatorname{sign} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0, \quad m = \text{const} > 0, \quad \beta_0 \in (-m/2, 1). \tag{1}$$

Обозначим через $\Omega^+$ и $\Omega^-$ части области $\Omega$, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через $C_0$ и $C_1$ соответственно точки пересечения характеристик $AC$ и $BC$ с характеристиками, исходящими из точки $E(c,0)$, где $c \in I = (-1,1)-$ интервал оси $y = 0$.

Пусть $p(x) = \delta - kx$ — линейный диффеоморфизм из множества точек отрезка $[-1,c]$ в множество точек отрезка $[c,1]$, причем $p(-1) = 1$, $p(c) = c$, где $\delta = 2c/(1+c)$, $k = (1-c)/(1+c)$.

В работах В.И. Жегалова [1] и А.М. Нахушева [2] условие смещения задавалось на граничных характеристиках $AC$ и $BC$. В данной работе исследуется корректность задачи, в которой условие смещения задается на внутренних характеристиках $EC_0$ и $EC_1$ и на отрезке вырождения $AB$ [3], а на кривой $\sigma_0$ условие Дирихле заменено условием Бицадзе–Самарского [4], [5], связывающим значения искомой функции на $\sigma_0$ и $AB$.

**Задача А.** Требуется найти в области $\Omega$ функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x,y)$ непрерывна в каждой из замкнутых областей $\overline{\Omega}^+$ и $\overline{\Omega}^-$;

2) $u(x,y) \in C^2(\Omega^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области $\Omega^+$;

3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса $R_1$ ([6]; [7], с. 35) уравнения (1) в области $\Omega^-$;

4) на отрезке $AB$ линии параболического вырождения уравнения (1) выполняются соотношения [8]:

$$u(x,-0) = u(x,+0) + a_0(x), \quad x \in \overline{I}, \tag{2}$$

Поступила 23.09.2014

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=b(x)\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}+b_0(x),\quad x\in I\setminus\{c\},\tag{3}$$

эти пределы при $x\to\pm1$, $x\to c$ могут иметь особенности порядка ниже $1-2\beta$, где $\beta=(m+2\beta_0)/2(m+2)$;

5) выполняются требования

$$u(x,\sigma_0(x))=c_0(x)u(x,+0)+\varphi_0(x),\quad x\in\overline{I},\tag{4}$$

$$u[\theta_1^*(x)]-\mu u[\theta_0^*(p(x))]=\psi_0(x),\quad x\in[-1,c],\tag{5}$$

$$u(p(x),-0)-u(x,+0)=f_0(x),\quad x\in[-1,c],\tag{6}$$

где

$$\theta_1^*(x_0)=\frac{x_0+c}{2}-i\left[\frac{(m+2)(c-x_0)}{4}\right]^{2/(m+2)},$$

$$\theta_0^*(p(x_0))=\frac{c+p(x_0)}{2}-i\left[\frac{(m+2)(p(x_0)-c)}{4}\right]^{2/(m+2)}$$

— аффиксы точек пересечения характеристик $EC_0$ и $EC_1$ с характеристиками, исходящими соответственно из точек $M(x_0,0)$ и $M(p(x_0),0)$, $x_0\in[-1,c]$, $p(x_0)\in[c,1]$.

Заданные функции $\varphi_0(x)$, $c_0(x)$, $\psi_0(x)$, $b(x)$, $f_0(x)$, $a_0(x)$, $b_0(x)$ непрерывно дифференцируемы в замыкании множеств их определения.

Введем обозначения

$$u(x,-0)=\tau^-(x),\ \ x\in\overline{I};\ \ \lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu^-(x),\ \ x\in I,\tag{7}$$

$$u(x,+0)=\tau(x),\quad x\in\overline{I};\qquad \lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x),\quad x\in I,\tag{8}$$

в силу которых (2), (3) запишем в виде

$$\tau^-(x)=\tau(x)+a_0(x),\qquad x\in\overline{I},\tag{9}$$

$$\nu^-(x)=b(x)\nu(x)+b_0(x),\ \ x\in I\setminus\{c\},\tag{10}$$

а (6) с учетом (9) превратится в

$$\tau(p(x))=\tau(x)+f(x),\quad x\in[-1,c],\tag{11}$$

где $f(x)=f_0(x)-a_0(p(x))$.

Решение видоизмененной задачи Коши с данными (7) для уравнения (1) в области $\Omega^-$ дается формулой Дарбу ([7], с. 34)

$$u(x,y)=\gamma_1\int_{-1}^{1}\tau^-\left[x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right](1+t)^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1}dt+$$
$$+\gamma_2(-y)^{1-\beta_0}\int_{-1}^{1}\nu^-\left[x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right](1+t)^{-\beta}(1-t)^{-\beta}dt,\tag{12}$$

где

$$\gamma_1=\frac{2^{1-2\beta}\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)},\quad \gamma_2=-\frac{2^{2\beta-1}\Gamma(2-2\beta)}{(1-\beta_0)\Gamma^2(1-\beta)}.$$

В силу (12) из краевого условия (5) имеем

$$b(x)\nu(x)-\mu k^{1-2\beta}b(p(x))\nu(p(x))=\gamma(1-\mu)D_{x,c}^{1-2\beta}\tau(x)+\psi_1(x),\quad x\in(-1,c),\tag{13}$$

где $D_{x,c}^{1-2\beta}$ — оператор дробного дифференцирования [2], $\gamma = \frac{2\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta)}\left(\frac{m+2}{2}\right)^{2\beta}$, $\psi_1(x) = 2\left(\frac{m+2}{4}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-2\beta)}(c-x)^{\beta}D_{x,c}^{1-\beta}\psi_0(x) - \gamma\mu D_{x,c}^{1-2\beta}f(x) + \mu k^{1-2\beta}b_0(p(x)) - b_0(x)$ — известная функция.

Равенство (13) является первым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенным на интервал $(-1,c)$ из области $\Omega^-$.

**2. Единственность решения.**

**Теорема 1.** *Решение $u(x,y)$ задачи* A *при выполнении условий $a_0(x)\equiv 0$, $b_0(x)\equiv 0$, $\varphi_0(x)\equiv 0$, $\psi_0(x)\equiv 0$, $f_0(x)\equiv 0$,*

$$\mu < 0, \quad 0 \le c_0(x) < 1 \tag{14}$$

*в замкнутой области $\overline{\Omega}$ тождественно равно нулю.*

*Доказательство.* Пусть функция $u(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и $u(x,y)\neq 0$ в точках области $\overline{\Omega}^+$. Тогда она в точках $\overline{\Omega}^+$ достигает своего наибольшего положительного значения (НПЗ) или наименьшего отрицательного значения (НОЗ). В силу принципа Хопфа ([9], с. 25) решение $u(x,y)$ уравнения (1) своего НПЗ внутри области $D^+$ не достигает.

Пусть решение $u(x,y)$ своего НПЗ достигает во внутренней точке $P(x_0,0)$ интервала $I$. Здесь рассмотрим три случая: $x_0\in(-1,c)$, $x_0\in(c,1)$ и $x_0=c$.

1. Допустим, что $x_0\in(-1,c)$. Тогда в силу соответствующего однородного условия (11) (где $f(x)\equiv 0$) решение $u(x,y)$ своего НПЗ достигает в двух точках: $(x_0,0)$ и $(p(x_0),0)$ интервала $AB$, следовательно, в этих точках имеем $\nu(x_0)<0$, $\nu(p(x_0))<0$ ([7], с. 74). Отсюда в силу (14)

$$b(x_0)\nu(x_0) - \mu k^{1-2\beta}b(p(x_0))\nu(p(x_0)) < 0, \quad x_0\in(-1,c). \tag{15}$$

С другой стороны, в силу соответствующего однородного условия (13) (где $\psi_1(x)\equiv 0$) с учетом того, что в точке положительного максимума функции $\tau(x)$ значение оператора дробного дифференцирования $D_{x,c}^{1-2\beta}\tau(x)$ положительно, имеем

$$b(x_0)\nu(x_0) - \mu k^{1-2\beta}b(p(x_0))\nu(p(x_0)) = \gamma(1-\mu)D_{x,c}^{1-2\beta}\tau(x)|_{x=x_0} > 0, \quad x_0\in(-1,c).$$

Последнее неравенство противоречит (15), поэтому $x_0\notin(-1,c)$.

2. Теперь допустим, что $x_0\in(c,1)$. Пусть $x_1\in(-1,c)-$ решение уравнения $p(x)=x_0$, т. е. $p(x_1)=x_0$. Тогда из соответствующего однородного условия (11) (где $f(x)\equiv 0$) получаем

$$\tau(x_0) = \tau(p(x_1)) = \tau(x_1).$$

Отсюда выводим, что $x_1\in(-1,c)$ является точкой НПЗ функции $u(x,y)$, а это противоречит случаю 1. Значит, $x_0\notin(c,1)$.

3. Если $x_0=c$, то из краевого условия (5) (где $\psi_0(x)\equiv 0$) с учетом $p(c)=c, \mu<0$ находим, что $\tau(c)=0$. Отсюда заключаем $x_0\neq c$.

Следовательно, решение $u(x,y)$ своего НПЗ в области $\overline{\Omega}^+$ не достигает в точках интервала $I$. Отсюда в силу (14) из соответствующего однородного условия (4) (где $\varphi_0(x)\equiv 0$) видно, что его также нет и в точках кривой $\sigma_0$.

Таким образом, решение $u(x,y)$ своего НПЗ в области $\overline{\Omega}^+$ может достигать только в точках $A(-1,0)$ и $B(1,0)$.

Аналогично можно показать, что решение $u(x,y)$ задачи A своего НОЗ в области $\overline{\Omega}^+$ может достигать только в точках $A(-1,0)$ и $B(1,0)$.

В силу (4) (где $\varphi_0(x)\equiv 0$) с учетом (14): $0\le c_0(x)<1$, при $x=\pm 1$ имеем $u(A)=u(B)=0$. Следовательно, $u(x,y)\equiv 0$ во всех точках области $\overline{\Omega}^+$. Отсюда выводим, что $u(x,y)\equiv 0$ во всей смешанной области $\overline{\Omega}$. □

**3. Существование решения.**

**Теорема 2.** *Пусть заданные функции в краевых условиях* (2)–(6) *удовлетворяют условиям* $a_0(x)$, $b_0(x)$, $b(x)$, $c_0(x)$, $\varphi_0(x) \in C(\overline{I}) \cap C^{1,\alpha}(I)$, $\psi_0(x)$, $f_0(x) \in C[-1,c] \cap C^{1,\alpha}(-1,c)$, *причем* $c_0(x) = (1-x^2)\widetilde{c}_0(x)$, $\varphi_0(x) = (1-x^2)\widetilde{\varphi}_0(x)$, $\widetilde{c}_0(x)$, $\widetilde{\varphi}_0(x) \in C(\overline{I}) \cap C^{1,\alpha}(I)$, $f_0(-1) = 0$. *Пусть также выполнены условия* (14), $\beta_0 > (3-2m)/7$ *и*

$$\frac{2\pi}{1-\sin(\alpha\pi/2)}\left[\frac{|m_1|+|n_2|}{k^{(1+\alpha)/2}} + \frac{|m_2|+|n_1|}{k^{(1-\alpha)/2}}\right] < 1 \tag{16}$$

(*определения для* $m_1$, $m_2$, $n_1$, $n_2$, *см. на с.* 41). *Тогда задача* A *однозначно разрешима.*

*Доказательство.* Используя формулу, дающую для уравнения (1) в области $\Omega^+$ решение задачи Дирихле ([7], с. 93), которое удовлетворяет условиям

$$u(x,0) = \tau(x), \quad x \in \overline{I}; \quad u(x,y)|_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in \overline{I},$$

и учитывая (4), получим

$$\nu(x) = -k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}\left\{\int_{-1}^{1}\frac{(x-t)\tau'(t)dt}{|x-t|^{2-2\beta}} - (2\beta-1)\int_{-1}^{1}\frac{\tau(t)dt}{(1-xt)^{2-2\beta}} - \right.$$
$$\left. - 2(1-\beta)(1-x^2)\int_{-1}^{1} c_0(t)(x^2-2xt+1)^{\beta-2}\tau(t)dt\right\} + \Phi(x), \quad x \in I, \tag{17}$$

где

$$k_2 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2-2\beta}\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)},$$

$$\Phi(x) = k_2(1-\beta_0)(1-\beta)(m+2)(1-x^2)\int_{-1}^{1}\varphi_0(t)(x^2-2xt+1)^{\beta-2}dt$$

— известная функция.

Заметим, что соотношение (17) справедливо для всего промежутка $I$.

В силу (17) из (13), исключая $\nu(x)$ и $\nu(p(x))$, получим

$$-\frac{2(1-\mu)\pi\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}D_{x,c}^{1-2\beta}\tau(x) =$$
$$= b(x)\int_{-1}^{1}\frac{(x-t)\tau'(t)dt}{|x-t|^{2-2\beta}} - (2\beta-1)b(x)\int_{-1}^{1}\frac{\tau(t)dt}{(1-xt)^{2-2\beta}} - \tag{18}$$
$$-\mu k^{1-2\beta}b(p(x))\int_{-1}^{1}\frac{(p(x)-t)\tau'(t)dt}{|p(x)-t|^{2-2\beta}} + \mu k^{1-2\beta}(2\beta-1)b(p(x))\int_{-1}^{1}\frac{\tau(t)dt}{(1-p(x)t)^{2-2\beta}} -$$
$$-2(1-\beta)(1-x^2)b(x)\int_{-1}^{1}c_0(t)(x^2-2xt+1)^{\beta-2}\tau(t)dt +$$
$$+2\mu k^{1-2\beta}(1-\beta)(1-x^2)b(p(x))\int_{-1}^{1}c_0(t)(p^2(x)-p(x)t+1)^{\beta-2}\tau(t)dt + F_0(x), \quad x \in (-1,c),$$

где

$$F_0(x) = \frac{2}{k_2(1-\beta_0)(m+2)}(\psi_1(x) - b(x)\Phi(x) + \mu k^{1-2\beta}b(p(x))\Phi(p(x))), \quad x \in (-1,c).$$

Из (18), разбив промежуток интегрирования $(-1,1)$ на $(-1,c)$ и $(c,1)$, а в интегралах по промежутку $(c,1)$ сделав замену $t = p(s)$ и применив к полученному соотношению оператор

дробного интегрирования $\Gamma(1-2\beta)D_{x,c}^{2\beta-1}$ [2], после стандартных вычислений получим (с обозначениями $\left(\frac{c-x}{c-t}\right)^{1-2\beta}=\Phi(x,t)$, $\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}=w(x,t)$)

$$(1-\mu+(b(x)-\mu b(p(x)))\sin(\beta\pi))\tau(x)=-\frac{\cos(\beta\pi)}{\pi}\Big\{(b(x)-\mu b(p(x)))\int_{-1}^{c}\Phi(x,t)\times$$
$$\times w(x,t)\tau(t)dt+\mu b(p(x))k^{1-2\beta}\int_{-1}^{c}\Phi(x,t)\frac{\tau(t)dt}{p(x)-t}-$$
$$-\mu k^{2\beta}b(x)\int_{-1}^{c}\Phi(x,t)\frac{\tau(t)dt}{p(t)-x}\Big\}+R_1[\tau]+R_0[\tau]+F_1(x),\quad(19)$$

где $R_1$, $R_0$ — регулярные операторы, определяемые формулами

$$R_1[\tau]=-\frac{\cos(\beta\pi)}{\pi}\Big\{-\mu b(p(x))\int_{-1}^{c}\Phi(x,t)\left[\frac{(1+p(x))(1+t)}{(1+p(t))(1+x)}-1\right]w(x,t)\tau(t)dt+$$
$$+\mu b(p(x))\int_{-1}^{c}\frac{1+p(x)}{1+p(t)}c(x,t)\tau(t)dt-k^{1-2\beta}b(p(x))\int_{-1}^{c}\Phi(x,t)\frac{\tau(t)dt}{1-p(x)t}-$$
$$-k^{2-2\beta}\mu b(p(x))\int_{-1}^{c}\left[\left(\frac{c-x}{1-cp(t)}\right)^{1-2\beta}-\left(\frac{1}{k}\right)^{1-2\beta}\Phi(x,t)\right]\frac{\tau(t)dt}{1-p(x)p(t)}+$$
$$+b(x)\int_{-1}^{c}\Phi(x,t)\left[\frac{(1+t)(1-x)}{(1-t)(1+x)}-1\right]w(x,t)\tau(t)dt+$$
$$+b(x)\int_{-1}^{c}\left[\left(\frac{c-x}{1-ct}\right)^{1-2\beta}-\Phi(x,t)\right]\frac{\tau(t)dt}{1-xt}+kb(x)\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{1-cp(t)}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(t)dt}{1-xp(t)}-$$
$$-\frac{b(c)-b(x)}{(c-x)^{2\beta}}\int_{-1}^{c}\frac{\tau(t)dt}{(p(t)-c)^{1-2\beta}}+\int_{-1}^{c}\tau(t)dt\int_{x}^{c}\left[\frac{b'(s)}{(s-x)^{2\beta}}+2\beta\frac{b(s)-b(x)}{(s-x)^{2\beta+1}}ds\right]\frac{(s-p(t))}{|s-p(t)|^{2-2\beta}}+$$
$$+b(x)\int_{-1}^{c}\tau(t)dt\int_{x}^{c}\frac{b(s)-b(x)}{(s-x)^{2\beta}(1-xt)^{1-2\beta}}+(1-2\beta)k\int_{-1}^{c}\tau(t)dt\int_{x}^{c}\frac{b(s)-b(x)}{(s-x)^{2\beta}(1-sp(t))^{2-2\beta}}ds+$$
$$+\frac{b(c)-b(x)}{(c-x)^{2\beta}}\int_{-1}^{c}\frac{\tau(t)dt}{(c-t)^{1-2\beta}}-\int_{-1}^{c}\tau(t)dt\int_{x}^{c}\left[\frac{b'(s)}{(s-x)^{2\beta}}+2\beta\frac{b(s)-b(x)}{(s-x)^{2\beta+1}}ds\right]\frac{(s-t)}{|s-t|^{2-2\beta}}\Big\},$$

$$\text{где}\quad c(x,t)=\frac{p(t)p'(x)}{1-p(x)p(t)}-\frac{t}{1-xt},\quad R_0[\tau]=\int_{-1}^{c}K(x,t)\tau(t)dt.$$

При этом $F_1(x)\in C[-1,c]\cap C^1(-1,c)$ — известная функция, а

$$K(x,t)=-2(1-\beta)\int_{x}^{c}\Big\{\frac{k(1-s^2)b(s)c_0(t)}{(s^2-2st+1)^{2-\beta}}+\frac{k(1-s^2)b(s)c_0(p(t))}{(s^2-2sp(t)+1)^{2-\beta}}-$$
$$-\frac{\mu k^{1-2\beta}(1-p^2(s))b(p(s))c_0(t)}{(p^2(s)-2p(s)t+1)^{2-\beta}}-\frac{\mu k^{2-2\beta}(1-p^2(s))b(p(s))c_0(p(t))}{(p^2(s)-2p(s)p(t)+1)^{2-\beta}}\Big\}\frac{ds}{(s-x)^{2\beta}}$$

— регулярное ядро.

Соотношение (19) преобразуем к виду

$$\tau(x)+B_0(x)\int_{-1}^{c}\Phi(x,t)w(x,t)\tau(t)dt=$$
$$=-B_1(x)\int_{-1}^{c}\Phi(x,t)\frac{\tau(t)dt}{p(x)-t}+B_2(x)\int_{-1}^{c}\Phi(x,t)\frac{\tau(t)dt}{p(t)-x}+R_2[\tau]+F_2(x),\quad x\in(-1,c),\quad(20)$$

где

$$R_2[\tau] = d(x)(R_1[\tau] + R_0[\tau]), \quad F_2(x) = d(x)F_1(x),$$

$$B_0(x) = \cos(\beta\pi)d(x)(b(x) - \mu b(p(x))), \quad B_1(x) = k^{1-2\beta}\mu\cos(\beta\pi)d(x)b(p(x)),$$

$$B_2(x) = k^{2\beta}\mu\cos(\beta\pi)d(x)b(x), \quad d(x) = \frac{1}{\pi(1-\mu+\sin(\beta\pi)(b(x)-\mu b(p(x))))}.$$

Первые два интегральных оператора в правой части (20) не являются регулярными, так как при $t = c, x = c$ ядра этих операторов имеют изолированные особенности первого порядка. Поэтому они выписаны отдельно.

Временно считая правую часть уравнения (20) известной функцией, перепишем его в виде

$$\tau(x) + B_0(x)\int_{-1}^{c}\Phi(x,t)w(x,t)\tau(t)dt = g_0(x), \quad x \in (-1,c), \tag{21}$$

где

$$g_0(x) = -B_1(x)\int_{-1}^{c}\Phi(x,t)\frac{\tau(t)dt}{p(x)-t} + B_2(x)\int_{-1}^{c}\Phi(x,t)\frac{\tau(t)dt}{p(t)-x} + R_2[\tau] + F_2(x). \tag{22}$$

Применяя к уравнению (21) метод регуляризации Карлемана из [10], получим

$$\tau(x) = A^*(x)g_0(x) - B^*(x)\int_{-1}^{c}\frac{1+B_0(x)\pi i}{1+B_0(t)\pi i}\frac{\omega(x)}{\omega(t)}\frac{(c-x)^{3\alpha}}{(c-t)^{3\alpha}}\frac{(1-ct)^{\alpha}(1+x)^{2\alpha}}{(1-cx)^{\alpha}(1+t)^{2\alpha}}\times$$
$$\times\, w(x,t)g_0(t)dt, \quad x \in (-1,c), \tag{23}$$

где

$$A^*(x) = \frac{1}{1+B_0^2(x)\pi^2}, \quad B^*(x) = \frac{B_0(x)}{1+B_0^2(x)\pi^2}.$$

Теперь, подставляя выражение для $g_0(x)$ из (22) в (23) и выделяя характеристическую часть уравнения (интегральные операторы с ядрами, имеющими изолированные особенности первого порядка в точке $x = c$, $t = c$), имеем

$$\tau(x) = -B_1(x)A^*(x)\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-t}\right)^{4\alpha}\frac{\tau(t)dt}{p(x)-t} + B_2(x)A^*(x)\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-t}\right)^{4\alpha}\frac{\tau(t)dt}{p(t)-x} -$$
$$- B_1(x)B^*(x)\int_{-1}^{c}\frac{(c-x)^{3\alpha}(1+x)^{2\alpha}}{(c-s)^{4\alpha}}\tau(s)ds\int_{-1}^{c}\frac{(c-t)^{\alpha}}{(1+t)^{2\alpha}}w(x,t)\frac{dt}{p(t)-s} +$$
$$+ B_2(x)B^*(x)\int_{-1}^{c}\frac{(c-x)^{3\alpha}(1+x)^{2\alpha}}{(c-s)^{4\alpha}}\tau(s)ds\int_{-1}^{c}\frac{(c-t)^{\alpha}}{(1+t)^{2\alpha}}w(x,t)\frac{dt}{p(s)-t} +$$
$$+ R_3[\tau] + F_3(x), \quad x \in (-1,c), \tag{24}$$

где

$$R_3[\tau] = A^*(x)R_2[\tau]+$$
$$+ B^*(x)\int_{-1}^{c}\frac{1+B_0(x)\pi i}{1+B_0(t)\pi i}\frac{\omega(x)}{\omega(t)}\frac{(c-x)^{3\alpha}}{(c-t)^{3\alpha}}\frac{(1-ct)^{\alpha}(1+x)^{2\alpha}}{(1-cx)^{\alpha}(1+t)^{2\alpha}}w(x,t)R_2[\tau]dt-$$
$$- B^*(x)\int_{-1}^{c}\frac{(c-x)^{3\alpha}(1+x)^{2\alpha}}{(c-s)^{4\alpha}}\tau(s)ds\int_{-1}^{c}\frac{(c-t)^{\alpha}}{(1+t)^{2\alpha}}w(x,t)\frac{(B_1(t)-B_1(x))dt}{p(t)-s}+$$
$$+ B^*(x)\int_{-1}^{c}\frac{(c-x)^{3\alpha}(1+x)^{2\alpha}}{(c-s)^{4\alpha}}\tau(s)ds\int_{-1}^{c}\frac{(c-t)^{\alpha}}{(1+t)^{2\alpha}}w(x,t)\frac{(B_2(t)-B_2(x))dt}{p(s)-t}-$$
$$- B^*(x)\int_{-1}^{c}\frac{(c-x)^{3\alpha}(1+x)^{2\alpha}}{(c-s)^{4\alpha}}\tau(s)ds\int_{-1}^{c}\frac{(c-t)^{\alpha}}{(1+t)^{2\alpha}}\left[\frac{\omega(x)}{\omega(t)}\frac{1+B_0(x)\pi i}{1+B_0(t)\pi i}\left(\frac{1-ct}{1-cx}\right)^{\alpha}-1\right]\times$$
$$\times\left[\frac{B_1(t)}{p(t)-s}-\frac{B_2(t)}{p(s)-t}\right]dt,$$

$$F_3(x) = A^*(x)F_2(x) + B^*(x)\int_{-1}^{c}\frac{1+B_0(x)\pi i}{1+B_0(t)\pi i}\frac{\omega(x)}{\omega(t)}\frac{(c-x)^{3\alpha}}{(c-t)^{3\alpha}}\frac{(1-ct)^{\alpha}(1+x)^{2\alpha}}{(1-cx)^{\alpha}(1+t)^{2\alpha}}\times$$
$$\times w(x,t)F_2(x)dt.$$

Вычислим внутренние интегралы в правой части (24):

$$A(x,s) = \int_{-1}^{c}\frac{(c-t)^{\alpha}}{(1+t)^{2\alpha}}w(x,t)\frac{dt}{p(t)-s}, \tag{25}$$
$$B(x,s) = \int_{-1}^{c}\frac{(c-t)^{\alpha}}{(1+t)^{2\alpha}}w(x,t)\frac{dt}{p(s)-t}. \tag{26}$$

Рациональные множители подинтегральных выражений в (25) и (26) разложим на простые дроби

$$\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)\frac{1}{\delta-kt-s} = \frac{1}{\delta-kx-s}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{k}{\delta-kt-s}\right)+$$
$$+\frac{1}{\delta x-sx-k}\left(\frac{x}{1-xt}-\frac{k}{\delta-kt-s}\right), \tag{27}$$

$$\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)\frac{1}{\delta-ks-t} = \frac{1}{\delta-ks-x}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1}{\delta-ks-t}\right)-$$
$$-\frac{1}{1-\delta x+kxs}\left(\frac{x}{1-xt}-\frac{1}{\delta-ks-t}\right). \tag{28}$$

В силу (27) и (28) соотношения (25) и (26) примут в вид

$$A(x,s) = \frac{1}{\delta-kx-s}\left(I_1(x)+kI_2(s)\right)+\frac{1}{\delta x-sx-k}\left(xI_3(x)-kI_2(s)\right), \tag{29}$$
$$B(x,s) = \frac{1}{\delta-ks-x}\left(I_1(x)+I_4(s)\right)+\frac{1}{1-\delta x+kxs}\left(xI_3(x)-I_4(s)\right), \tag{30}$$

где

$$I_1(x)=\int_{-1}^{c}\frac{(c-t)^{\alpha}}{(1+t)^{2\alpha}}\frac{dt}{t-x}=\frac{(c-x)^{\alpha}}{(1+x)^{2\alpha}}\pi\operatorname{ctg}(\alpha\pi)-\frac{(1+c)^{\alpha}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{(1+x)^{2\alpha}\Gamma(1-\alpha)}\times$$
$$\times F\bigg(-\alpha,1-2\alpha,1-\alpha;\frac{c-x}{1+c}\bigg), \tag{31}$$

$$I_2(s)=\int_{-1}^{c}\frac{(c-t)^{\alpha}}{(1+t)^{2\alpha}}\frac{dt}{\delta-kt-s}=\frac{(1+c)^{1-\alpha}\Gamma(1-2\alpha)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)(1-s)}\times$$
$$\times F\bigg(1-2\alpha,1,2-\alpha;\frac{k(1+c)}{1-s}\bigg), \tag{32}$$

$$I_3(x)=\int_{-1}^{c}\frac{(c-t)^{\alpha}dt}{(1+t)^{2\alpha}(1-xt)}=\frac{(1+c)^{1-\alpha}\Gamma(1-2\alpha)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)(1-cx)^{1-2\alpha}(1+x)^{2\alpha}}\times$$
$$\times F\bigg(1-2\alpha,1-\alpha,2-\alpha;\frac{(1+c)x}{cx-1}\bigg), \tag{33}$$

$$I_4(s)=\int_{-1}^{c}\frac{(c-t)^{\alpha}}{(1+t)^{2\alpha}}\frac{dt}{\delta-ks-t}=\frac{(1+c)^{1-\alpha}\Gamma(1-2\alpha)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)(1+\delta-ks)}\times$$
$$\times F\bigg(1-2\alpha,1,2-\alpha;\frac{1+c}{1+\delta-ks}\bigg). \tag{34}$$

В силу (31)–(34), выделив слагаемые с особенностями первого порядка, запишем соотношения (29) и (30) в форме

$$A(x,s)=\frac{1}{\delta-kx-s}\bigg(\frac{\pi\operatorname{ctg}(\alpha\pi)(c-x)^{\alpha}}{(1+x)^{2\alpha}}-\frac{(1+c)^{\alpha}\Gamma(1-2\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)(1+x)^{2\alpha}}F\bigg(-\alpha,1-2\alpha,1-\alpha;\frac{c-x}{1+c}\bigg)+$$
$$+\frac{k(1+c)^{1-\alpha}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)(1-s)}F\bigg(1-2\alpha,1,2-\alpha;\frac{k(1+c)}{1-s}\bigg)\bigg)+A_0(x,s), \tag{35}$$

$$B(x,s)=\frac{1}{\delta-ks-x}\bigg(\frac{\pi\operatorname{ctg}(\alpha\pi)(c-x)^{\alpha}}{(1+x)^{2\alpha}}-\frac{(1+c)^{\alpha}\Gamma(1-2\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)(1+x)^{2\alpha}}F\bigg(-\alpha,1-2\alpha,1-\alpha;\frac{c-x}{1+c}\bigg)+$$
$$+\frac{(1+c)^{1-\alpha}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)(1+\delta-ks)}F\bigg(1-2\alpha,1,2-\alpha;\frac{1+c}{1+\delta-ks}\bigg)\bigg)+B_0(x,s), \tag{36}$$

где $A_0(x,s)=\frac{1}{\delta x-sx-k}(xI_3(x)-kI_2(s))$, $B_0(x,s)=\frac{1}{1-xp(s)}(xI_3(x)-I_4(s))$. Здесь $A_0(x,s)$ и $B_0(x,s)$ — непрерывные функции в квадрате $[-1,c]\times[-1,c]$.

Подставляя (35) и (36) в (24), имеем [11]–[14]

$$\tau(x)=-B_1(x)(A^*(x)-B^*(x)\pi\operatorname{ctg}(\alpha\pi))\int_{-1}^{c}\bigg(\frac{c-x}{c-s}\bigg)^{4\alpha}\frac{\tau(s)ds}{p(x)-s}+$$
$$+B_2(x)(A^*(x)-B^*(x)\pi\operatorname{ctg}(\alpha\pi))\int_{-1}^{c}\bigg(\frac{c-x}{c-s}\bigg)^{4\alpha}\frac{\tau(s)ds}{p(s)-x}+$$
$$+B^*(x)\int_{-1}^{c}\frac{(c-x)^{3\alpha}(1+x)^{2\alpha}}{(c-s)^{4\alpha}}\bigg[\frac{A_0^*(x,s)}{p(x)-s}+A_1^*(x,s)+\frac{B_0^*(x,s)}{p(s)-x}+B_1^*(x,s)\bigg]\tau(s)ds+$$
$$+R_3[\tau]+F_3(x), \tag{37}$$

где

$$A_0^*(x,s) = -B_1(x)\Bigg[-\frac{(1+c)^{\alpha}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-2\alpha)(1+x)^{2\alpha}}F\Big(-\alpha,1-2\alpha,1-\alpha;\frac{c-x}{1+c}\Big)+ \\ +\frac{k(1+c)^{1-\alpha}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{(1-s)\Gamma(2-\alpha)}F\Big(1-2\alpha,1,2-\alpha;\frac{k(1+c)}{1-s}\Big)\Bigg], \quad (38)$$

$$A_1^*(x,s) = -\frac{B_1(x)}{\delta x-sx-k}\Bigg[x\frac{(1+c)^{1-\alpha}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)(1+x)^{2\alpha}(1-cx)^{1-2\alpha}}F\Big(1-2\alpha,1-\alpha,2-\alpha;\frac{(1+c)x}{cx-1}\Big)- \\ -\frac{k(1+c)^{1-\alpha}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{(1-s)\Gamma(2-\alpha)}F\Big(1-2\alpha,1,2-\alpha;\frac{k(1+c)}{1-s}\Big)\Bigg], \quad (39)$$

$$B_0^*(x,s) = B_2(x)\Bigg[-\frac{(1+c)^{\alpha}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-2\alpha)(1+x)^{2\alpha}}F\Big(-\alpha,1-2\alpha,1-\alpha;\frac{c-x}{1+c}\Big)+ \\ +\frac{k(1+c)^{1-\alpha}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{(1+p(s))\Gamma(2-\alpha)}F\Big(1-2\alpha,1,2-\alpha;\frac{1+c}{1+p(s)}\Big)\Bigg], \quad (40)$$

$$B_1^*(x,s) = \frac{B_2(x)}{1-xp(s)}\Bigg[x\frac{(1+c)^{1-\alpha}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)(1+x)^{2\alpha}(1-cx)^{1-2\alpha}}F\Big(1-2\alpha,1-\alpha,2-\alpha;\frac{(1+c)x}{cx-1}\Big)- \\ -\frac{k(1+c)^{1-\alpha}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{(1-s)\Gamma(2-\alpha)}F\Big(1-2\alpha,1,2-\alpha;\frac{k(1+c)}{1-s}\Big)\Bigg]. \quad (41)$$

Здесь $A_1^*(x,s)$, $B_1^*(x,s)$ — регулярные ядра.

Для выделения характеристической части интегрального уравнения (37), чтобы получить недостающий множитель $(c-s)^{\alpha}$ в ядре третьего интеграла в правой части (37), преобразуем $A_0^*(x,s)$ и $B_0^*(x,s)$. К вторым гипергеометрическим функциям в правых частях (38) и (40) сначала применим формулу Больца ([8], с. 48)

$$F(a,b,c;z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a,b,a+b,c+1;1-z) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-z)^{c-a-b}\times \\ \times F(c-a,c-b,c-a-b+1;1-z), \quad c-a-b\neq 0,\pm1,\pm2,\ldots, \quad |\arg(1-z)|<\pi,$$

а затем формулу $F(a,b,c;z) = (1-z)^{-b}F\left(c-a,b,c;\frac{z}{z-1}\right)$. Это позволяет записать $A_0^*(x,s)$ и $B_0^*(x,s)$ в виде

$$\begin{aligned} A_0^*(x,s) &= -B_1(x)\left[-\frac{k^{\alpha}\pi(c-s)^{\alpha}}{(1-s)^{2\alpha}\sin(\alpha\pi)} + (p(x)-s)A_{01}^*(x,s)\right], \\ B_0^*(x,s) &= B_2(x)\left[-\frac{k^{\alpha}\pi(c-s)^{\alpha}}{(1+p(s))^{2\alpha}\sin(\alpha\pi)} + (p(s)-x)B_{01}^*(x,s)\right], \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$A_{01}^*(x,s) = -\frac{(1+c)^{\alpha}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{(1+x)^{2\alpha}\Gamma(1-\alpha)(p(x)-s)}\Bigg\{F\left(-\alpha,1-2\alpha,1-\alpha;\frac{c-x}{1+c}\right)- \\ -F\left(-\alpha,1-2\alpha,1-\alpha;\frac{c-s}{c-1}\right)-\left[\left(\frac{1-p(x)}{1-s}\right)^{2\alpha}-1\right]F\left(-\alpha,1-2\alpha,1-\alpha;\frac{c-s}{c-1}\right)\Bigg\},$$

$$B^*_{01}(x,s) = -\frac{(1+c)^\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{(1+x)^{2\alpha}\Gamma(1-\alpha)(p(s)-x)}\Bigg\{F\left(-\alpha,1-2\alpha,1-\alpha;\frac{c-x}{1+c}\right)-$$
$$-F\left(-\alpha,1-2\alpha,1-\alpha;\frac{k(s-c)}{1+c}\right)-\left[\left(\frac{1+x}{1+p(s)}\right)^{2\alpha}-1\right]F\left(-\alpha,1-2\alpha,1-\alpha;\frac{k(s-c)}{1+c}\right)\Bigg\}.$$

С учетом представлений (42) уравнение (37) переходит в

$$\tau(x) = -m_1\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{4\alpha}\frac{\tau(s)ds}{p(x)-s}+m_2\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{4\alpha}\frac{\tau(s)ds}{p(s)-x}+$$
$$+n_1\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{3\alpha}\frac{\tau(s)ds}{p(x)-s}-n_2\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{3\alpha}\frac{\tau(s)ds}{p(s)-x}+$$
$$+R_4[\tau]+F_3(x),\quad x\in(-1,c),\qquad(43)$$

где $R_4[\tau]$ — регулярный оператор, а $m_k$, $n_k$ $(k=1,2)$ даются формулами

$$m_1 = B_1(c)(A^*(c)-B^*(c)\pi\operatorname{ctg}(\alpha\pi)),$$
$$m_2 = B_2(c)(A^*(c)-B^*(c)\pi\operatorname{ctg}(\alpha\pi)),$$
$$n_1 = k^{-\alpha}\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}B^*(c)B_1(c),$$
$$n_2 = k^{\alpha}\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}B^*(c)B_2(c).$$

В силу равенства $\delta-kc-c=0$ преобразуем уравнение (43) к виду

$$\tau(x) = -m_1\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{4\alpha}\frac{\tau(s)ds}{(c-s)(k\frac{c-x}{c-s}+1)}+m_2\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{4\alpha}\frac{\tau(s)ds}{(c-s)(\frac{c-x}{c-s}+k)}+$$
$$+n_1\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{3\alpha}\frac{\tau(s)ds}{(c-s)(k\frac{c-x}{c-s}+1)}-n_2\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{3\alpha}\frac{\tau(s)ds}{(c-s)(\frac{c-x}{c-s}+k)}+$$
$$+R_4[\tau]+F_3(x),\quad x\in(-1,c).\qquad(44)$$

Сделав в уравнении (44) замену переменных $s=c-(1+c)e^{-t}$, $x=c-(1+c)e^{-y}$ и обозначив $\rho(y)=\tau[c-(1+c)e^{-y}]e^{(3,5\alpha-1/2)y}$, получим

$$\rho(y) = -m_1\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha t/2}\rho(t)dt}{e^{t/2}+ke^{-t/2}}+m_2\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha t/2}\rho(t)dt}{ke^{t/2}+e^{-t/2}}+n_1\int_0^\infty\frac{e^{\alpha t/2}\rho(t)dt}{e^{t/2}+ke^{-t/2}}-n_2\int_0^\infty\frac{e^{\alpha t/2}\rho(t)dt}{ke^{t/2}+e^{-t/2}}+$$
$$+R_5[\rho]+F_4(y),\quad y\in(0,+\infty),\qquad(45)$$

где $R_5[\rho]=e^{(3,5\alpha-1/2)y}R_4[\rho]$ — регулярный оператор, $F_4(y)=e^{(3,5\alpha-1/2)y}F_3[c-(1+c)e^{-y}]$ — известная функция.

Вводя обозначение

$$K(x) = -m_1\frac{e^{-\alpha x/2}}{e^{x/2}+ke^{-x/2}}+m_2\frac{e^{-\alpha x/2}}{ke^{x/2}+e^{-x/2}}+n_1\frac{e^{\alpha x/2}}{e^{x/2}+ke^{-x/2}}-n_2\frac{e^{\alpha x/2}}{ke^{x/2}+e^{-x/2}},$$

перепишем (45) в виде

$$\rho(y) = \int_0^\infty K(y-t)\rho(t)dt+R_5[\rho]+F_4(y),\quad 0<y<\infty.\qquad(46)$$

Функция $K(x)$ непрерывна и имеет показательный порядок убывания на бесконечности.

Соотношение (46) является интегральным уравнением Винера–Хопфа ([15], с. 35). Оно с помощью преобразования Фурье, подобно известному характеристическому особому интегральному уравнению с ядром Коши, приводится к краевой задаче Римана и тем самым решается в квадратурах.

Если сингулярность ядра Коши $\frac{1}{t-x}$ заключается в разрыве при $t = x$, то сингулярность ядра $K(t-x)$ интегрального уравнения типа свертки вызвана неограниченностью промежутка интегрирования, и это ядро (в отличие от регулярного ядра) не убывает, если двигаться к бесконечности вдоль прямых $t = x + \mathrm{const}$.

Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений типа свертки будут применимы лишь в одном частном случае, когда индекс этих уравнений равен нулю.

Индексом уравнения (46) будет индекс выражения $1 - K^{\wedge}(x)$ с обратным знаком ([15], с. 56), где

$$K^{\wedge}(x) = K^{\wedge}_{m_1}(x) + K^{\wedge}_{m_2}(x) + K^{\wedge}_{n_1}(x) + K^{\wedge}_{n_2}(x),$$

$$K^{\wedge}_{m_1}(x) = -m_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt} e^{-\alpha t/2} dt}{e^{t/2} + k e^{-t/2}}, \quad K^{\wedge}_{m_2}(x) = m_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt} e^{-\alpha t/2} dt}{k e^{t/2} + e^{-t/2}},$$

$$K^{\wedge}_{n_1}(x) = n_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt} e^{\alpha t/2} dt}{e^{t/2} + k e^{-t/2}}, \qquad K^{\wedge}_{n_2}(x) = -n_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt} e^{\alpha t/2} dt}{k e^{t/2} + e^{-t/2}}. \tag{47}$$

Интегралы Фурье (47) вычислим с помощью вычетов. Подробно посчитаем

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt} e^{-\alpha t/2} dt}{e^{t/2} + k e^{-t/2}} = \lim_{N \to \infty} I_N,$$

где

$$I_N = \int_{-N}^{N} \frac{e^{-ixt} e^{-\alpha t/2} dt}{e^{t/2} + k e^{-t/2}}.$$

На комплексной плоскости $z = t + i\eta$ рассмотрим четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A = A(-N, 0)$, $B = B(N, 0)$, $C = C(N, 4\pi)$, $D = D(-N, 4\pi)$.

Внутри четырехугольника $ABCD$ функция

$$\widetilde{f}(x, z) = \frac{e^{-ixz} e^{-\alpha z/2}}{e^{z/2} + k e^{-z/2}} = \frac{e^{-ixz} e^{(1-\alpha) z/2}}{e^{z} + k}$$

имеет только две особые точки — полюсы $z_1 = \ln k + \pi i$, $z_2 = \ln k + 3\pi i$. По теореме о вычетах интеграл по контуру $L$ прямоугольника $ABCD$ равен

$$\int_L \widetilde{f}(x, z) dz = 2\pi i (\operatorname{res} \widetilde{f}(x, z_1) + \operatorname{res} \widetilde{f}(x, z_2)).$$

Легко вычислить (так как $(e^z + k)'|_{z_m} = -k$, $m = 1, 2$)

$$\operatorname{res} \widetilde{f}(x, z_1) = \lim_{z \to z_1} [(z - z_1) \widetilde{f}(x, z)] = \frac{e^{\pi x} e^{-i(x \ln k + \alpha \pi/2)}}{i k^{(1+\alpha)/2}},$$

$$\operatorname{res} \widetilde{f}(x, z_2) = \lim_{z \to z_2} [(z - z_2) \widetilde{f}(x, z)] = -\frac{e^{3\pi x} e^{-i(x \ln k + 3\alpha \pi/2)}}{i k^{(1+\alpha)/2}}.$$

Следовательно, интеграл по контуру $L$ представится в виде

$$\left( \int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A \right) \widetilde{f}(x, z) dz = \frac{2\pi}{k^{(1+\alpha)/2}} e^{-i(x \ln k + \alpha \pi/2)} \left[ e^{\pi x} - e^{3\pi x - \alpha \pi i} \right]. \tag{48}$$

Здесь

$$AB: \ \eta = 0, \ \ -N \le t \le N; \ \ BC: \ t = N, \ \ 0 \le \eta \le 4\pi;$$

$$CD: \ \eta = 4\pi, \quad -N \le t \le N; \quad DA: \ t = -N, \quad 0 \le \eta \le 4\pi.$$

Первый интеграл левой части (48) равен $I_N$. В третьем интеграле $z = t + 4\pi i$ и так как функции $e^{z/2}$, $e^{-z/2}$ периодичны с периодом $4\pi i$, заключаем, что, третий интеграл равен $-e^{4\pi x - 2\alpha\pi i} I_N$. Во втором и четвертом интегралах соответственно $z = N + i\eta$ и $z = -N + i\eta$, $0 \le \eta \le 4\pi$. Для этих подинтегральных функций соответственно имеют место следующие оценки:

$$\left| \frac{e^{-ixz} e^{-\alpha z/2}}{e^{z/2} + ke^{-z/2}} \right| \le \left| \frac{e^{-ix(\pm N + i\eta)} e^{-\alpha(\pm N + i\eta)/2}}{e^{(\pm N + i\eta)/2} + ke^{-(\pm N + i\eta)/2}} \right| \le \frac{e^{4\pi x} e^{\alpha N/2}}{e^{(\pm N + i\eta)/2} + ke^{-(\pm N + i\eta)/2}} = O\left( \frac{1}{e^{(1-\alpha)N/2}} \right),$$

где $(1 - \alpha) > 0$. Отсюда видно, что второй и четвертый интегралы стремятся к нулю при $N \to \infty$.

Таким образом, переходя в (48) к пределу при $N \to \infty$, имеем

$$(1 - e^{2(2\pi x - \alpha\pi i)}) I = \frac{2\pi}{k^{(1+\alpha)/2}} e^{-i(x \ln k + \alpha\pi/2)} e^{\pi x} (1 - e^{2\pi x - \alpha\pi i})$$

или $I = \frac{\pi e^{-ix \ln k}}{k^{(1+\alpha)/2} \operatorname{ch}(\pi x - i\alpha\pi/2)}$. Таким образом,

$$K^{\wedge}_{m_1}(x) = \frac{-m_1 \pi e^{-ix \ln k}}{k^{(1+\alpha)/2} \operatorname{ch}(\pi x - i\alpha\pi/2)}.$$

Аналогично можно показать, что

$$K^{\wedge}_{m_2}(x) = \frac{m_2 \pi e^{ix \ln k}}{k^{(1-\alpha)/2} \operatorname{ch}(\pi x - i\alpha\pi/2)},$$

$$K^{\wedge}_{n_1}(x) = \frac{n_1 \pi e^{-ix \ln k}}{k^{(1-\alpha)/2} \operatorname{ch}(\pi x + i\alpha\pi/2)},$$

$$K^{\wedge}_{n_2}(x) = \frac{-n_2 \pi e^{ix \ln k}}{k^{(1+\alpha)/2} \operatorname{ch}(\pi x + i\alpha\pi/2)}.$$

Поэтому

$$K^{\wedge}(x) = -\frac{m_1 \pi e^{-ix \ln k}}{k^{(1+\alpha)/2} \operatorname{ch}(\pi x - i\alpha\pi/2)} + \frac{m_2 \pi e^{ix \ln k}}{k^{(1-\alpha)/2} \operatorname{ch}(\pi x - i\alpha\pi/2)} + \\ + \frac{n_1 \pi e^{-ix \ln k}}{k^{(1-\alpha)/2} \operatorname{ch}(\pi x + i\alpha\pi/2)} - \frac{n_2 \pi e^{ix \ln k}}{k^{(1+\alpha)/2} \operatorname{ch}(\pi x + i\alpha\pi/2)}. \quad (49)$$

Легко убедиться, что

$$\operatorname{Re}\left( \frac{e^{ix \ln k}}{\operatorname{ch}(\pi x + i\alpha\pi/2)} \right) = \frac{\operatorname{ch}(\pi x) \cos(x \ln k) \sin(\alpha\pi/2) + \operatorname{sh}(\pi x) \sin(x \ln k) \sin(\alpha\pi/2)}{\operatorname{ch}^2(\pi x) - \sin^2(\alpha\pi/2)}. \quad (50)$$

С учетом (50) из (49) получим

$$|\operatorname{Re} K^{\wedge}(x)| < \frac{2\pi}{\operatorname{ch}(\pi x) - \sin(\alpha\pi/2)} \left[ \frac{|m_1| + |n_2|}{k^{(1+\alpha)/2}} + \frac{|m_2| + |n_1|}{k^{(1-\alpha)/2}} \right]. \quad (51)$$

Отсюда в силу (16) следует $1 - \operatorname{Re} K^{\wedge}(x) > 0$.

Теперь, получив из (51) для достаточно больших $|x|$ оценку

$$|\operatorname{Re} K^{\wedge}(x)| = O\left( \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi x)} \right),$$

заключаем, что

$$\operatorname{Ind}(1-K^{\wedge}(x)) = \frac{1}{2\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}(1-K^{\wedge}(x))}{\operatorname{Re}(1-K^{\wedge}(x))}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

т. е. изменение аргумента $1-K^{\wedge}(x)$ на действительной оси, выраженное в полных оборотах, равно нулю. Поэтому из единственности решения задачи $A$ следует однозначная разрешимость уравнения (46), а значит, и задачи А. □

## Литература


[1] Жегалов В.И. *Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии*, Учен. зап. Казанск. ун-та **122** (3), 3–16 (1962).

[2] Нахушев А.М. *О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа*, Дифференц. уравнения **5** (1), 44–59 (1969).

[3] Мирсабуров М. *Задача с недостающим условием Трикоми на характеристике и аналогом условия Франкля на отрезке линии вырождения для одного класса уравнений смешанного типа*, Дифференц. уравнения **50** (1), 79–87 (2014).

[4] Бицадзе А.В., Самарский А.А. *О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач*, ДАН СССР **185** (4), 739–740 (1969).

[5] Мирсабурова Гулбахор М. *Задача Бицадзе–Самарского с недостающим условием смещения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом*, Дифференц. уравнения **50** (5), 658–669 (2014).

[6] Бабенко К.И. *К теории уравнений смешанного типа*, Дисс. ... докт. физ.-матем. наук, 1952.

[7] Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами* (Tashkent, “Universitet”, “Yangiyo’l poligraf servis”, 2005).

[8] Каратопраклиев Г. *Об одном обобщении задачи Трикоми*, ДАН СССР **158** (2), 271–274 (1964).

[9] Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных* (Наука, М., 1981).

[10] Михлин С.Г. *Об интегральном уравнении F. Trikomi*, ДАН СССР **59** (6), 1053–1056 (1948).

[11] Солдатов А.П. *К нетеровости теории операторов. Одномерные сингулярние операторы общего вида*, Дифференц. уравнения **14** (4), 706–718 (1978).

[12] Дудучава Р.В. *Интегральные уравнения типа свертки с разрывными предсимволами. Сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики* (Мицниереба, Тбилиси, 1978).

[13] Полосин А.А. *Об однозначной разрешимости задачи Трикоми для специальной области*, Дифференц. уравнения **32** (3), 394–401 (1996).

[14] Мирсабуров М. *Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках*, Дифференц. уравнения **39** (9), 1281–1284 (2001).

[15] Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки* (М., 1978).



*М. Мирсабуров*

*Термезский государственный университет,*
*ул. Ф. Ходжаева, д. 43. г. Термез, 190111, Республика Узбекистан,*

`e-mail:` mirsaburov@mail.ru

*С.Т. Чориева*

*Термезский государственный университет,*
*ул. Ф. Ходжаева, д. 43. г. Термез, 190111, Республика Узбекистан,*

`e-mail:` mirsaburov@mail.ru

*M. Mirsaburov and S.T. Chorieva*

**On a problem with three variants of shift conditions for mixed type equation**

*Abstract.* For mixed type equation we study a problem where shift conditions are given in inner characteristic, on degeneration line, and on the boundary of elliptic domain. With the help of the maximum principle we prove uniqueness of a solution to the problem, and with the help of the method of integral equations we prove the existence of a solution to the problem.

*Keywords*: singular coefficient, internal characteristics, Wiener–Hopf equation, index equation.

*M. Mirsaburov*

*Termez State University,*
*43 F. Khodzhaev str., Termez, 190111 Republic of Uzbekistan,*

`e-mail:` mirsaburov@mail.ru

*S.T. Chorieva*

*Termez State University,*
*43 F. Khodzhaev str., Termez, 190111 Republic of Uzbekistan,*

`e-mail:` mirsaburov@mail.ru