МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ.Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Специальность: 010100 — математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(дипломная работа)

Об ОДУ 4 порядка, допускающих 4-мерную алгебру Ли

Работа завершена:
Студент 05–903 группы математического отделения
_____ 2014г. _____ (А.В. Русскова)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель
к.ф.-м.н., старший преподаватель
_____ 2014г. _____ (В.В. Шурыгин)

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор
_____ 2014г. _____ (Ю.В. Обносов)

Казань — 2014

Введение

Задача решения обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих различные группы преобразований, рассматривалась во многих работах. Например, для обыкновенного дифференциального уравнения 1 порядка, допускающего однопараметрическую группу преобразований, может быть написан интегрирующий множитель. Кроме того, имеется метод интегрирования таких уравнений, состоящий в нахождении инвариантной замены переменных. Также справедлива теорема Ли-Бианки, утверждающая, что если ОДУ порядка n, допускает n-параметрическую группу преобразований (или, что то же самое, n-мерную алгебру Ли), то оно может быть проинтегрировано в квадратурах. В нашей дипломной работе мы построили реализации четырехмерных алгебр Ли, обладающих некоммутативной трехмерной подалгеброй, как алгебр Ли операторов на плоскости переменных (x, y). Это позволило найти общий вид ОДУ 4 порядка, допускающих такие алгебры Ли. Наконец, мы построили схему интегрирования этих ОДУ. Эта схема состоит в сведении их к задаче интегрирования ОДУ 3 порядка, допускающих трехмерную алгебру Ли, решенной в работе [9].

Глава 1. Однопараметрические группы преобразований

Рассмотрим однопараметрическое семейство $\{T_a\}$ преобразований пространства $\mathbb{R}^n$:

$$\overline{x} = f(x, a), \tag{1}$$

где a — вещественный параметр, изменяющийся в некотором интервале $\Delta \subset \mathbb{R}$. Будем также предполагать, что $T_0 = id$ (тождественное преобразование) и что $T_a \neq id$ для всех остальных $a \in \Delta$. Кроме того, будем считать, что семейство $\{T_a\}$ вместе с каждым преобразованием содержит обратное к нему, причем ${T_a}^{-1} = T_{-a}$. Наконец, будем предполагать, что композиция любых двух преобразований T_a и T_b снова принадлежит рассматриваемому семейству, причем

$$T_b \circ T_a = T_{a+b}.$$

Определение. Такое семейство преобразований называется *однопараметрической группой преобразований.*

Разложим функцию $f(x, a)$ в ряд Тейлора по параметру a в окрестности точки $a = 0$. Поскольку $T_0 = id$, имеем $f(x, 0) = x$. Обозначим $X(x) = \frac{\partial f(x,a)}{\partial a}|_{a=0}$. Тогда

$$\overline{x} = x + X(x) \cdot a + o(a).$$

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка с начальным условием

$$\frac{df}{dt} = X(f), \qquad f|_{a=0} = x$$

называется *уравнением Ли.*

Определение. Оператор $X = X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ называется *инфинитезимальным оператором* (или просто *оператором*) группы преобразований (1).

Как известно из курса дифференциальной геометрии, каждый инфинитезимальный оператор однозначно определяет векторное поле на $\mathbb{R}^n$.

Пример. Группа параллельных переносов вдоль оси y:

$$\overline{x} = x, \quad \overline{y} = y + a.$$

Ее оператор имеет вид $X = \frac{\partial}{\partial y}$.

Пример. Группа растяжений вдоль оси x.

$$\overline{x} = xe^a, \quad \overline{y} = y.$$

Ее оператор имеет вид $X = x\frac{\partial}{\partial x}$.

Определение. Функция $J(x)$ называется *инвариантом* группы преобразований (1), если для всех допустимых значений x и a выполняется

$$J(\overline{x}) = J(f(x,a)) = J(x). \tag{2}$$

Теорема 1. [2] *Функция $J(x)$ является инвариантом тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнению*

$$XJ = X^i(x)\frac{\partial J}{\partial x^i} = 0. \tag{3}$$

Критерий инвариантности (3) представляет собой линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка. Поэтому любая однопараметрическая группа преобразований в $\mathbb{R}^n$ имеет $n-1$ функционально независимых инвариантов. При этом любой другой инвариант этой группы есть функция от этих $(n-1)$ «базисных» инвариантов. В качестве такого базиса можно выбрать левые части первых интегралов $J_1(x) = C_1, \ldots, J_{n-1}(x) = C_{n-1}$ характеристической системы уравнения (3):

$$\frac{dx^1}{X^1} = \frac{dx^2}{X^2} = \ldots = \frac{dx^n}{X^n}. \tag{4}$$

Пример. Рассмотрим следующую группу растяжений: $\overline{x} = xe^a$, $\overline{y} = ye^{\frac{1}{2}a}$. Для нее $X = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y}$ и уравнение (3) принимает вид

$$x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y} = 0.$$

Решая характеристическую систему $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{2dy}{y}$. Находим интеграл $\frac{1}{2}\ln x = \ln y + C$, $Cx^{\frac{1}{2}} = y$, поэтому в качестве базиса инвариантов можно взять функцию $J = \frac{y}{\sqrt{x}}$.

Теорема 2. *Всякая однопараметрическая группа G преобразований $\overline{x} = f(x,a)$ невырожденной заменой переменных $x^{i'} = x^{i'}(x^k)$ может быть приведена к группе переносов вдоль оси $x^{n'}$.*

Доказательство. Пусть $X = X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ — оператор группы. Поскольку при замене переменных $x^{i'} = x^{i'}(x^k)$ векторное поле X преобразуется как $X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i} = X^i\dfrac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\dfrac{\partial}{\partial x^{j'}}$, то в системе координат $(x^{i'})$ векторное поле X принимает вид $X = X(x^{j'})\dfrac{\partial}{\partial x^{j'}}$.

Теперь для того, чтобы в этой системе координат поле X стало касательным векторным полем к оси $x^{n'}$, то есть, полем $\dfrac{\partial}{\partial x^{n'}}$, необходимо, чтобы $X(x^{1'}) = \ldots = X(x^{(n-1)'}) = 0$, а $X(x^{n'}) = 1$. Поэтому достаточно выбрать в качестве функций $x^{i'}$, $i' = 1, \ldots, n-1$, любые $n-1$ функционально независимых инвариантов $J_1, \ldots, J_{n-1}$, а функцию $x^{n'}$ найти из условия $X(x^{n'}) = 1$.

Система функций $x^{1'} = J_1(x), \ldots, x^{n-1'} = J_{n-1}(x)$, $x^{n'} = x^{n'}(x^i)$ определяет искомую замену переменных. Векторное поле X в этих координатах имеет вид $X = \dfrac{\partial}{\partial x^{n'}}$, то есть, определяет группу переносов вдоль оси $x^{n'}$. $\square$

Пример. Приведем к переносам оператор $X = \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{y}{x}\dfrac{\partial}{\partial y}$. Для этого решим систему уравнений

$$X(t) = 1, \qquad X(z) = 0.$$

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение $\frac{dt}{dx} = 1$, получаем $x = t$. Характеристическое уравнение $dx = \frac{x}{y}dy$ имеет решение $C = \frac{y}{x}$. Следовательно, замена переменных имеет вид

$$t = x, \quad z = y/x.$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ поверхность M размерности $n - s$, заданную системой уравнений

$$F_1(x) = 0,\ F_2(x) = 0, \ldots,\ F_s(x) = 0, \quad s \leqslant n. \tag{5}$$

Поверхность M называется *инвариантной относительно действия группы G преобразований* $\overline{x} = f(x, a)$, если из того, что $x \in M$ следует, что $\overline{x} \in M$. В этом случае будем говорить, что эта система *допускает группу G*.

Теорема 3. [2] *Поверхность M инвариантна относительно действия группы G тогда и только тогда, когда $XF_k|_M = 0$ для всех $k = 1, \ldots, s$.*

Теорема 4. [2] *Поверхность M, инвариантная относительно действия группы G, может быть задана системой уравнений вида*

$$\Phi_k(J_1(x), \ldots, J_{n-1}(x)) = 0, \quad k = 1, \ldots, s,$$

где функции $J_1(x)$, $\ldots$, $J_{n-1}(x)$ образуют базис инвариантов группы G, при условии, что инфинитезимальный оператор X группы G не обращается в нуль в точках поверхности M.

В дальнейшем мы собираемся рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения относительно функции $y = y(x)$ вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{6}$$

Поэтому мы будем рассматривать группы преобразований пространства $\mathbb{R}^2$ с координатами (x, y):

$$\overline{x} = \varphi(x, y, a), \qquad \overline{y} = \psi(x, y, a). \tag{7}$$

Инфинитезимальный оператор такой группы преобразований будем обозначать

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y},$$

где

$$\xi = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right|_{a=0}, \qquad \eta = \left.\frac{\partial \psi}{\partial a}\right|_{a=0}.$$

Определение. Всякое преобразование (7), переводящее данное дифференциальное уравнение (6) в равносильное уравнение того же вида, называется *допустимым (допускаемым) преобразованием.*

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x\sqrt{x}}.$$

Будем искать допускаемую группу в виде группы растяжений: $\overline{x} = kx$, $\overline{y} = ly$. Тогда

$$\overline{y'} - \frac{\overline{y}}{\overline{x}} + \frac{\overline{y}^2}{\overline{x}\sqrt{\overline{x}}} = \frac{l}{k} y' - \frac{l}{k}\frac{y}{x} + \frac{l^2 y^2}{k\sqrt{k} \cdot x\sqrt{x}}.$$

Последнее выражение должно быть пропорционально $y' - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x\sqrt{x}}$. Для этого должны выполняться условия $\frac{l}{k} = \frac{l}{k} = \frac{l^2}{k\sqrt{k}}$, откуда $l = \sqrt{k}$, тогда $k = e^a, l = e^{\frac{1}{2}a}$ и уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x\sqrt{x}}$ допускает группу растяжений $\overline{x} = xe^a$, $\overline{y} = ye^{\frac{1}{2}a}$ с оператором

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Пусть задано ОДУ первого порядка записанное в дифференциалах

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0. \tag{8}$$

Справедлива следующая теорема [2].

Теорема 5. *Уравнение* (8) *допускает группу с оператором* $X = \xi\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta\dfrac{\partial}{\partial y}$ *тогда и только тогда, когда функция*

$$\mu = \frac{1}{\xi M + \eta N} \tag{9}$$

является интегрирующим множителем этого уравнения.

Таким образом, знание допустимой группы преобразований позволяет проинтегрировать уравнение (8). Однако, вычисление интегралов при использовании интегрирующего множителя может оказаться непростой задачей. Приведем другой метод интегрирования ОДУ первого порядка, допускающего группу преобразований, состоящий в инвариантной замене переменных.

Пример. Уравнение $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x^3}{y^2}$ допускает оператор $X = \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{y}{x}\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Найдем замену переменных, приводящую поле X к переносам. Для этого решим систему уравнений

$$X(t) = 1, \qquad X(z) = 0.$$

В координатах (t, z) поле X примет вид $\dfrac{\partial}{\partial t}$. Решая обыкновенное дифференциальное уравнение $\frac{dt}{dx} = 1$, получаем $x = t$. Характеристическое уравнение $dx = \frac{x}{y}dy$ имеет решение $C = \frac{y}{x}$.

Итак, нужно сделать замену

$$\begin{cases} z = \frac{y}{x} \\ t = x. \end{cases}$$

Из нашей системы следует, что $y = zx$.

Будем считать, что $z = z(t)$. Имеем $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d(zx)}{dx} = \dfrac{dz}{dx}x + z = \dfrac{dz}{dt}x + z$. Следовательно, $\dfrac{dz}{dt}x + z = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x^3}{y^2} = \dfrac{zx}{x} + \dfrac{x^3}{(zx)^2}$, или $\dfrac{dz}{dt}x + z = z + \dfrac{x}{z^2}$, откуда $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{1}{z^2}$.

Интегрируя $z^2 dz = dt$, получаем $\frac{z^3}{3} = t + C$. Сделав обратную подстановку $z = \frac{y}{x}$, $t = x$, получим решение нашего уравнения в виде

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{y^3}{x^3} = x + C.$$

Решим это же уравнение, найдя его интегрирующий множитель. Для этого перепишем его в виде

$$(y^3 + x^4)\, dx - xy^2\, dy = 0.$$

Тогда $\xi = 1$, $\eta = \frac{y}{x}$, $M = y^3 + x^4$, $N = xy^2$. Следовательно,

$$\mu = \frac{1}{1 \cdot (y^3 + x^4) - \frac{y}{x} \cdot xy^2} = \frac{1}{x^4}.$$

Домножим уравнение $(y^3 + x^4)\,dx - xy^2\,dy = 0$ на μ и получим

$$\frac{y^2}{x^3}dy - \frac{y^3}{x^4}dx - dx = 0.$$

Левая часть последнего уравнения есть полный дифференциал:

$$d\left(\frac{1}{3}\frac{y^3}{x^3} - x\right) = 0 \implies \frac{1}{3}\cdot\frac{y^3}{x^3} - x = C$$

есть его общее решение.

Итак, мы видим, что уравнение первого порядка с известной допускаемой группой может быть приведено к интегрируемому виду. Научимся выписывать общий вид уравнений, допускающих заданную группу (или, что то же самое, заданный инфинитезимальный оператор).

Для решения этой задачи нам потребуется продолжить действие группы преобразований (7) до преобразования пространства переменных

$$(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

Прямое вычисление этих преобразований с ростом порядка производных становится очень громоздким. Поэтому мы поступим по-другому. Введем переменные y', y'', $\dots$, которыми будем обозначать соответствующие производные. Эти переменные будем считать алгебраически независимыми, но связанными между собой дифференциальными соотношениями

$$y^{(k)} = D(y^{(k-1)}) \tag{10}$$

с помощью оператора

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + y''\frac{\partial}{\partial y'} + \dots \tag{11}$$

Дифференцирование D называется *оператором полной производной по переменной* x. Оно действуют на гладкие функции от конечного числа переменных x, y, y', y'', $\dots$ по формуле

$$DF(x, y, y', y'', \dots) = \frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y} + y''\frac{\partial F}{\partial y'} + \dots$$

Всякое дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{12}$$

задает некоторую поверхность в пространстве переменных x, y, y', $\dots$, $y^{(n)}$. Будем рассматривать это уравнение вместе со всеми его дифференциальными следствиями

$$DF = 0, \quad D^2F = 0, \dots$$

и говорить, что уравнение (12) задает *дифференциальное многообразие* [F].

Суть перехода от дифференциального уравнения к дифференциальному многообразию состоит в том, что при вычислении допускаемой группы мы забываем про решения уравнения и рассматриваем дифференциальное уравнение как систему обычных уравнений. После этого мы можем использовать критерий инвариантности, сформулированный в Теореме 3.

Приведем формулы продолжения действия оператора

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} \tag{13}$$

на пространство переменных x, y, y', $\ldots$, $y^{(n)}$. Это продолжение имеет вид

$$X^{(n)} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial y'} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial y''} + \ldots + \zeta_n\frac{\partial}{\partial y^{(n)}},$$

где функции ζ_1, $\ldots$, ζ_n вычисляются последовательно по формулам

$$\zeta_1 = D\eta - y'D\xi, \quad \zeta_2 = D\zeta_1 - y''D\xi, \quad \ldots, \quad \zeta_n = D\zeta_{n-1} - y^{(n)}D\xi. \tag{14}$$

Например,

$$\zeta_1 = D_x(\eta) - y'D_x(\xi) = \eta_x + y'(\eta_y - \xi_x) - y'^2\xi_y,$$

а

$$\zeta_2 = D_x(\zeta_1) - \ddot{y}D_x(\xi) = \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + \\ + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y)y''. \tag{15}$$

Пример. $X = \dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Вычислим первое продолжение этого оператора: $\zeta_1 = 0 + \dot{y}(1-0) - \dot{y}^2 \cdot 0$,

$$X^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \dot{y}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Запишем характеристическую систему уравнений:

$$dx = \frac{dy}{y} = \frac{d\dot{y}}{y}.$$

Из равенства $dx = \frac{dy}{y}$ имеем $x + C = \ln y$, откуда $y = Ce^x \Rightarrow C = ye^{-x}$. Значит, $I = ye^{-x}$ есть инвариант нулевого порядка для оператора $X^{(1)}$. Из равенства $\frac{dy}{y} = \frac{d\dot{y}}{y}$ получаем $\ln y = \ln\dot{y} + C_1$, откуда $\frac{y}{\dot{y}} = C_1$. Поэтому $J = \frac{y}{\dot{y}}$ есть

инвариант первого порядка. Следовательно, всякое уравнение, допускающее оператор X, имеет вид $J = F(I)$, или

$$y' = yF(ye^{-x}),$$

где F — произвольная функция.

В соответствии с Теоремой 4, уравнения второго порядка, допускающие оператор X, могут быть записаны в терминах *дифференциальных инвариантов второго порядка*, то есть, функций от четырех переменных x, y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, удовлетворяющих уравнению $X^{(2)}J = 0$. Их отыскание при помощи формулы (15) может вызвать значительные трудности. Приведем теорему Ли, позволяющую обойти эти трудности.

Теорема 6. [2] *Пусть для заданного оператора* (13) *известны инвариант нулевого порядка* $u(x, y)$ *и инвариант первого порядка* $v(x, y, y')$. *Тогда инвариант второго порядка получается при помощи дифференцирования*

$$w = \frac{dv}{du} = \frac{dv/dx}{du/dx} = \frac{v_x + y'v_y + y''v_{\dot{y}}}{u_x + y'u_y} = \frac{Dv}{Du}. \tag{16}$$

Любой другой дифференциальный инвариант порядка не выше второго является функцией от u, v, w.

Глава 2. Алгебры Ли и обыкновенные дифференциальные уравнения

Определение. *Алгеброй Ли* называется векторное пространство Ω над полем K, снабженное билинейным отображением

$$\Omega^2 \to \Omega, \quad (x, y) \mapsto [x, y],$$

удовлетворяющим следующим двум аксиомам:

$$[x, x] = 0;$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Другими словами, в Алгебре Ли должен быть задан коммутатор, удовлетворяющий тождеству Якоби.

Пусть L_r — алгебра Ли размерности r и пусть N — векторное подпространство в L_r.

Определение. Подпространство N называется *подалгеброй*, если $[X, Y] \in N$ для всех $X, Y \in N$. Подпространство N называется *идеалом*, если $[X, Y] \in N$ для всех $N \in N, Y \in L_r$.

Если N является идеалом, то в алгебре L_r можно ввести отношение эквивалентности: $X \sim Y \iff X - Y \in N$. Множество смежных классов по N образует алгебру Ли, которая называется фактор-алгеброй алгебры L_r по идеалу N и обозначается L_r/N.

Определение. Алгебра Ли L_r называется *разрешимой*, если существует ряд подалгебр $L_r \supset L_{r-1} \supset \ldots \supset L_1$ размерностей r, $r-1$, $\ldots$, 1 соответственно, в котором каждая подалгебра L_{s-1} есть идеал в L_s, $s = 2, \ldots, r$.

Пусть X_1, $\ldots$, X_n — базис в алгебре L_r. Рассмотрим коммутатор $[Y, Z]$ любых двух элементов Y и Z. Имеем $[Y, Z] = [Y^i X_i, Z^j X_j] = Y^i Z^j [X_i, X_j]$. Обозначим символом $L_r^{(1)} = [L_r, L_r]$ подпространство, натянутое на все коммутаторы $[X_i, X_j]$, $i, j = 1, \ldots, r$. Ясно, что тогда $[Y, Z] \in L_r^{(1)}$ для любых $Y, Z \in L_r$. Пространство $L_r^{(1)}$ образует идеал в алгебре Ли L_r.

Определение. Пространство $L_r^{(1)} = [L_r, L_r]$ называется *производной алгеброй*. Производные алгебры высших порядков определяются по индукции: $L_r^{(n+1)} := (L_r^{(n)})^{(1)} = [L_r^{(n)}, L_r^{(n)}]$.

Справедлива следующая

Теорема 7. *Алгебра Ли L_r разрешима тогда и только тогда, когда ее производная алгебра некоторого порядка обращается в нуль.*

Эта теорема дает эффективный критерий проверки, является ли заданная алгебра разрешимой.

Как известно, пространство векторных полей (операторов) на $\mathbb{R}^n$ образует алгебру Ли $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ относительно операции *коммутатора*:

$$X, Y \mapsto [X, Y].$$

Коммутатор операторов $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ и $Y = Y^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ на $\mathbb{R}^n$ вычисляется по формуле

$$[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = (X(Y^k) - Y(X^k)) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Для операторов $X_1 = \xi_1 \dfrac{\partial}{\partial x} + \eta_1 \dfrac{\partial}{\partial y}$ и $X_2 = \xi_2 \dfrac{\partial}{\partial x} + \eta_2 \dfrac{\partial}{\partial y}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ их коммутатор равен

$$[X_1, X_2] = (X_1(\xi_2) - X_2(\xi_1)) \frac{\partial}{\partial x} + (X_1(\eta_2) - X_2(\eta_1)) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Определение. Будем говорить, что алгебра Ли L_r *может быть реализована* как алгебра операторов на плоскости $\mathbb{R}^2$, если существует линейное отображение

$$\rho : L_r \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2),$$

являющееся изоморфизмом алгебр Ли на свой образ. Это значит, что $\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)]$.

Справедлива так называемая теорема Ли-Бьянки, говорящая, что если ОДУ n-го порядка допускает n-мерную алгебру Ли, то оно может быть проинтегрировано в квадратурах.

Теорема 8.

Всякая двумерная алгебра Ли реализуется на плоскости и путем выбора подходящего базиса X_1, X_2 приводится к одному из следующих видов:

I. $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}, \;\; X_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}.$

II. $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}, \;\; X_2 = x \dfrac{\partial}{\partial y}.$

III. $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}, \;\; X_2 = x \dfrac{\partial}{\partial x} + y \dfrac{\partial}{\partial y}.$

IV. $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}, \;\; X_2 = y \dfrac{\partial}{\partial y}.$

Соответствующие дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие двумерные алгебры Ли этих четырех типов имеют вид

$$I.\ y'' = f(y'), \qquad II.\ y'' = f(x),$$
$$III.\ y'' = \frac{1}{x}f(y'), \quad IV.\ y'' = f(x)y'.$$

В работе [7] приведены все трехмерные алгебры Ли, которые могут быть реализованы на плоскости.

Алгебра	Ненулевые коммутационные соотношения
$A_{3;1}$	
$A_{3;2}$	$[X_2, X_3] = X_1$
$A_{3;3}$	$[X_1, X_3] = X_1,\ [X_2, X_3] = X_1 + X_2$
$A_{3;4}$	$[X_1, X_3] = X_1$
$A_{3;5}$	$[X_1, X_3] = X_1,\ [X_2, X_3] = X_2$
$A_{3;6}$	$[X_1, X_3] = X_1,\ [X_2, X_3] = aX_2,\ a \neq 0, 1$
$A_{3;7}$	$[X_1, X_3] = bX_1 - X_2,\ [X_2, X_3] = X_1 + bX_2$
$A_{3;8}$	$[X_1, X_2] = X_1,\ [X_2, X_3] = X_3,\ [X_3, X_1] = -2X_2$
$A_{3;9}$	$[X_1, X_2] = X_3,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = X_2$

Соответствующие реализации имеют вид:

Алгебра	Реализация в $\mathbb{R}^2$
$A_{3;1}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = h(x)\frac{\partial}{\partial y}$
$A_{3;2}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial y}$
$A^{I}_{3;3}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial}{\partial y}$
$A^{II}_{3;3}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$
$A^{I}_{3;4}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial x}$
$A^{II}_{3;4}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$
$A^{I}_{3;5}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$
$A^{II}_{3;5}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = y\frac{\partial}{\partial y}$
$A^{I}_{3;6}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + ay\frac{\partial}{\partial y},\ a \neq 0, 1$
$A^{II}_{3;6}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = (1-a)x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},\ a \neq 0, 1$
$A^{I}_{3;7}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = (bx+y)\frac{\partial}{\partial x} + (by-x)\frac{\partial}{\partial y}$
$A^{III}_{3;7}$	$X_1 = x\frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = (1+x^2)\frac{\partial}{\partial x} + (x+b)y\frac{\partial}{\partial y}$
$A^{I}_{3;8}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$
$A^{II}_{3;8}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (y^2-x^2)\frac{\partial}{\partial y}$
$A^{III}_{3;8}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (y^2+x^2)\frac{\partial}{\partial y}$
$A^{IV}_{3;8}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = y\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = y^2\frac{\partial}{\partial y}$
$A_{3;9}$	$X_1 = (1+x^2)\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = xy\frac{\partial}{\partial x} + (1+y^2)\frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$

Уравнения третьего порядка, допускающие трехмерные алгебры Ли, выведены в работе [5]. Там же указана схема интегрирования этих уравнений со ссылкой на работу [9].

Тип	Канонические уравнения
$A_{3,4}$	$1.y''' = y''^{\frac{3}{2}}F(y'y''^{-2})$
	$2.y''' = y''^2F(xy'')$
$A_{3,1}$	$1.y''' = F(y'')$
$A_{3,3}$	$1.y''' = y''^2F(y')$
	$2.y''' = y''F(x)$
$A_{3,8}$	1. $y''' = \frac{3}{2}y'^{-1}y''^2 + u'F(x)$
	2. $y''' = x^{-2}y'^4F((xy'' + \frac{1}{2}y')y'^3) + 3y'^{(} - 1)q''^2$
	3. $y''' = x^{-2}(-1 + y'^2)^2F((xy'' - y'(1 - y'^2))(-1 + y'^2)^{-\frac{3}{2}})$
	4. $y''' = x^{-2}(1 + y'^2)F((xy'' - y'(1 + y'^2))(1 + y'^2)^{-\frac{3}{2}})+$ $+3y'(1 + y'^2)^{-1}y''^2$
$A_{3,9}$	$y''' = (1 + y^2)^{-\frac{5}{2}}(1 + y^2 + y'^2)F((y + y'')^{-\frac{1}{3}}(1 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$
	$+3y'(y + y'')((1 + y^2 + y'^2)^{-1} - y(1 + y^2)^{-1} - y')$

Глава 3. Интегрирование уравнений четвертого порядка, допускающих четырехмерную алгебру Ли

В настоящей дипломной работе мы, следуя работе [10], находим реализации четырехмерных алгебр Ли. После этого мы указываем общий вид уравнения 4 порядка, допускающих эти алгебры Ли. Для некоторых из уравнений мы приводим метод сведения их к уравнениям третьего порядка, допускающим трехмерную алгебру Ли, то есть, к задаче решенной в [9]. Поскольку список четырехмерных алгебр Ли достаточно велик, мы ограничиваемся случаем, когда трехмерный идеал представляет собой некоммутативную подалгебру. Ниже приведен список таких алгебр Ли.

Тип	Нетривиальные коммутаторы	Подалгебра
$2A_2$	$[e_1, e_2] = e_2$	$< e_1, e_2, e_3 >$
$A_{3,8} \oplus A_1$	$[e_1, e_2] = e_1, [e_3, e_2] = e_3, [e_3, e_1] = 2e_2$	$< e_1, e_2, e_3 >$
$A_{3,9} \oplus A_1$	$[e_1, e_2] = e_3, [e_2, e_3] = e_1, [e_3, e_1] = e_2$	$< e_1, e_2, e_3 >$
$A_{4,7}$	$[e_1, e_4] = 2e_1, [e_2, e_4] = e_2,$	$< e_1, e_2, e_3 >$
	$[e_3, e_4] = e_2 + e_3, [e_2, e_3] = e_1$	
$A_{4,8}$	$[e_2, e_4] = e_2, [e_3, e_4] = -e_3, [e_2, e_3] = e_1$	$< e_1, e_2, e_3 >$
$A^b_{4,9}$	$[e_1, e_4] = (1 + b)e_1,\ [e_2, e_4] = e_2,$	$< e_1, e_2, e_3 >$
$(0 < \lvert b \rvert < 1)$	$[e_3, e_4] = be_3,\ [e_2, e_3] = e_1$	
$A^1_{4,9}$	$[e_1, e_4] = 2e_1, [e_2, e_4] = e_2,$	$< e_1, e_2, e_3 >$
	$[e_3, e_4] = e_3, [e_2, e_3] = e_1$	
$A^0_{4,9}$	$[e_1, e_4] = e_1, [e_2, e_4] = e_2, [e_2, e_3] = e_1$	$< e_1, e_2, e_3 >$
$A_{4,10}$	$[e_2, e_4] = -e_3, [e_3, e_4] = e_2, [e_2, e_3] = e_1$	$< e_1, e_2, e_3 >$
$A^a_{4,11}$	$[e_2, e_4] = ae_2 - e_3, [e_1, e_4] = 2ae_1,$	$< e_1, e_2, e_3 >$
$(0 < a)$	$[e_3, e_4] = e_2 + ae_3, [e_2, e_3] = e_1$	
$A_{4,12}$	$[e_1, e_4] = -e_2, [e_2, e_4] = e_1,$	$< e_1, e_2, e_3 >$
	$[e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_2$	

Ряд вычислений мы, в силу их громоздкости, проводим с помощью системы компьютерной алгебры `Maple 13`, с использованием пакета `Differential Geometry`, написанного Я. Андерсоном. В частности, с помощью `Maple` мы вычисляем продолжения операторов и решаем системы дифференциальных уравнений в частных производных, чтобы найти общие инварианты операторов. Первая из этих задач чисто техническая, и может быть проделана и

вручную. Вторая задача вручную решается гораздо сложнее, но тот факт, что результат вычислений программы верен, и не содержит ошибок, может быть без труда проверен вычислениями на бумаге.

Алгебра $2A_2$.

Коммутационные соотношения алгебры $2A_2$ имеют вид

$$[e_1, e_2] = e_2, [e_3, e_4] = e_4.$$

Эта алгебра распадается в прямую сумму $A_1 \bigoplus A_2$, где e_1, e_2 — базис A_1, e_3, e_4 — базис A_2. Ее реализация имеет вид

$$e_1 = -x\frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_3 = -y\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_4 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Вычислим продолжения полей e_1, e_2, e_3, e_4 до четвертого порядка:

$$\begin{aligned}
e_1^{(4)} &= -x\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y'} + 2y''\frac{\partial}{\partial y''} + 3y'''\frac{\partial}{\partial y'''} + 4y^{IV}\frac{\partial}{\partial y^{IV}},\\
e_2^{(4)} &= \frac{\partial}{\partial x},\\
e_3^{(4)} &= -y\frac{\partial}{\partial y} - y'\frac{\partial}{\partial y'} - y''\frac{\partial}{\partial y''} - y'''\frac{\partial}{\partial y'''} - y^{IV}\frac{\partial}{\partial y^{IV}},\\
e_4^{(4)} &= \frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Эти поля образуют базис продолженной алгебры $2A_2^{(4)}$. Поскольку размерность алгебры равна четырем, а размерность пространства переменных, где она действует, равна шести (x, y, y', y'', y''' и y^{IV}), эта алгебра будет иметь $2 = 6 - 4$ инварианта. Находим эти инварианты

$$I_1 = \frac{y^{IV}y'^2}{y''^3}, \quad I_2 = \frac{y'y'''}{y''^2}.$$

Следовательно, ОДУ четвертого порядка, допускающее алгебру $2A_2$, имеет вид

$$y^{IV} = \frac{y''^3}{y'^2} \cdot F\left(\frac{y'y'''}{y''^2}\right), \tag{17}$$

где F —произвольная функция.

Операторы e_1, e_2, e_4 образуют идеал $\mathfrak{h}$ в алгебре $2A_2$. Базис его дифференциальных инвариантов на пространстве переменных x, y, y', y'', y''' составляют функции

$$u = \frac{y''}{y'^2}, \quad v = \frac{y'''}{y'^3}.$$

Тогда

$$\frac{dv}{du}=\frac{Dv}{Du}=\frac{\frac{y^{IV}}{y'^3}-3\cdot\frac{y'''y''}{y'^4}}{\frac{y'''}{y'^2}-2\cdot\frac{y''^2}{y'^3}}=\frac{\frac{y^{IV}}{y'^4}-3\cdot\frac{y'''y''}{y'^5}}{\frac{y'''}{y'^3}-2\cdot\frac{y''^2}{y'^4}}=\frac{\frac{y^{IV}}{y'^4}-3uv}{v-2u^2},$$

следовательно, уравнение (17) можно переписать в виде

$$\frac{dv}{du}=\frac{u^3F\left(\dfrac{v}{u^2}\right)-3uv}{v-2u^2}. \tag{18}$$

Это уравнение допускает оператор e_3. Найдем, как запишется этот оператор в координатах (u,v). Из формулы продолжения $e_3^{(4)}$ следует, что

$$e_3^{(4)}(u)=e_3^{(4)}\left(\frac{y''}{y'^2}\right)=2y'\frac{y''}{y'^3}-\frac{y''}{y'^2}=u,$$

$$e_3^{(4)}(v)=e_3^{(4)}\left(\frac{y'''}{y'^3}\right)=3y'\frac{y'''}{y'^4}-\frac{y'''}{y'^3}=2v.$$

Следовательно, оператор e_3 запишется как

$$X=e_3(u)\frac{\partial}{\partial u}+e_3(v)\frac{\partial}{\partial v}=u\frac{\partial}{\partial u}+2v\frac{\partial}{\partial v}.$$

Сделаем замену переменных $(u,v)\to(p,q)$, приводящую X к оператору группы параллельных переносов. Для этого нужно найти решения уравнений $X(p)=0$, $X(q)=1$. Возьмем

$$p=\frac{v}{u^2},\quad q=\ln u,$$

тогда

$$u=e^q,\quad v=pe^{2q}.$$

Уравнение (18) перепишется в виде

$$\frac{e^{2q}dp+2pe^{2q}dq}{e^qdq}=e^q\frac{F(p)-3p}{p-2}$$

или, после преобразований,

$$\frac{dp}{dq}=\frac{F(p)+p-2p^2}{p-2}.$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными. Если его общее решение найдено, а, соответственно, и решение уравнения (18) найдено в виде $\Phi(u,v)=C$, то относительно y получится уравнение

$$\Phi\left(\frac{y''}{y'^2},\frac{y'''}{y'^3}\right)=C,$$

допускающее алгебру Ли $\mathfrak{h}$, натянутую на e_1, e_2, e_4, и поэтому решающееся в квадратурах [9].

Алгебра $A_{3,8} \bigoplus A_1$.

Коммутационные соотношения этой алгебры имеют вид

$$[e_1, e_3] = -2e_2, \quad [e_2, e_3] = e_3, \quad [e_1, e_2] = e_1.$$

Базис трехмерной подалгебры $A_{3,8}$ образуют поля

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_2 = y\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = -y^2\frac{\partial}{\partial y}.$$

Обозначим $e_4 = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}$.

Запишем условия $[e_1, e_4] = [e_2, e_4] = 0$, получим

$$\begin{aligned} &\xi_y = \eta_y = 0, \\ &\eta = 0. \end{aligned}$$

Из первого равенства следует, что $\xi = f(x)$, из второго — что $\eta = 0$. Поэтому e_4 имеет вид

$$e_4 = f(x)\frac{\partial}{\partial x},$$

где $f(x)$— произольная (ненулевая) функция. Существует замена переменной $\bar{x} = h(x)$, приводящая e_4 к виду $e_4 = \frac{\partial}{\partial x}$.

Вычислим продолжения полей $e_1, \quad e_2, \quad e_3, \quad e_4$ до четвертого порядка:

$$\begin{aligned} e_1^{(4)} &= \frac{\partial}{\partial y}, \\ e_2^{(4)} &= y\frac{\partial}{\partial y} + y'\frac{\partial}{\partial y'}, \\ e_3^{(4)} &= -y^2\frac{\partial}{\partial y} - 2yy'\frac{\partial}{\partial y'} - 2y'^2\frac{\partial}{\partial y''} \\ &\qquad -(6y''y' + 2yy''')\frac{\partial}{\partial y'''} - (8y'''y' + 6y''^2 - 2yy^{IV})\frac{\partial}{\partial y^{IV}}, \\ e_4^{(4)} &= \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

Эти поля образуют базис продолженной алгебры $(A_{3,8} \bigoplus A_1)^{(4)}$. Инварианты этой алгебры имеют вид

$$I_1 = \frac{y^{IV}y'^2(-3y''^3 + 4y'y''y''')}{y'^3}, \quad I_2 = \frac{y'''}{y'} - \frac{3y''^2}{2y'^2}.$$

Поэтому, ОДУ четвертого порядка, допускающее эту алгебру, имеет вид

$$y^{IV} = \frac{-3y''^3 + 4y'y''y''' + y'^3 F(\frac{y'''}{y'} - \frac{3y''^2}{2y'^2})}{y'^2}.$$

Алгебра $A_{3,9} \oplus A_1$.

Эта алгебра является прямой суммой алгебры $A_{3,9}$ с коммутационными соотношениями

$$[e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_2] = e_3 \tag{19}$$

и алгебры A_1, натянутой на вектор e_4.

Выберем систему координат, в которой

$$e_4 = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}.$$

Пусть в этой системе координат

$$e_k = \xi_k(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta_k(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad k = 2, 3, 4.$$

Тогда из того, что e_4 коммутирует со всеми векторными полями e_k,

$$\xi_{ky} \frac{\partial}{\partial x} + \eta_{ky} \frac{\partial}{\partial y} = 0,$$

получим, что ξ_k, η_k — функции только от переменной x при $k = 2, 3, 4$.

Сравнив коэффициенты при $\frac{\partial}{\partial x}$ в равенствах (19), получим систему уравнений (штрихом обозначены производные по x)

$$\begin{aligned} \xi_2' \xi_1 - \xi_1' \xi_2 &= \xi_3, \\ \xi_3' \xi_2 - \xi_2' \xi_3 &= \xi_1, \\ \xi_1' \xi_3 - \xi_3' \xi_1 &= \xi_2. \end{aligned}$$

Из этой системы следует, что если одна из функций ξ_k тождественно равна нулю, то равны нулю и обе оставшиеся.

Предположим теперь, что ни одна из этих функций не равна нулю. Обозначим

$$a = \frac{\xi_2}{\xi_1}, \quad b = \frac{\xi_3}{\xi_2}, \quad c = \frac{\xi_1}{\xi_3},$$

тогда $abc = 1$. Имеем

$$a' = \frac{\xi_2' \xi_1 - \xi_1' \xi_2}{\xi_1^2} = \frac{\xi_3}{\xi_1^2} = \frac{1}{c\xi_1}.$$

Аналогично,

$$b' = \frac{1}{a\xi_2}, \quad c'\frac{1}{b\xi_3}.$$

Из того, что $abc = 1$, следует, что $a'bc + b'ca + c'ab = 0$. Подставив сюда выражения для производных, придем к равенству

$$\frac{b}{\xi_1} + \frac{c}{\xi_2} + \frac{a}{\xi_3} = 0.$$

В свою очередь, подставим в это равенство выражения для a, b, c и приведем к общему знаменателю. Получим

$$\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}{\xi_1\xi_2\xi_3} = 0,$$

откуда $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$.

Точно так же доказывается, что $\eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0$. Следовательно, алгебра $A_{3,9} \oplus A_1$ не может быть реализована как алгебра векторных полей на $\mathbb{R}^2$.

Алгебра $A_{4,8}$.

Коммутационные соотношения этой алгебры имеют вид:

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = -e_3.$$

Базис трехмерной подалгебры образуют элементы e_1, e_2, e_3. Алгебра с такими коммутационными соотношениями обозначается $A_{3,1}$. Ее реализация имеет вид

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_3 = x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Пусть

$$e_4 = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}.$$

Запишем условия $[e_1, e_4] = 0$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_3, e_4] = -e_3$.

Они принимают вид

$$\begin{aligned}
&\xi_y = \eta_y = 0,\\
&\xi_x = 1, \quad \eta_x = 0,\\
&x\xi_y = 0, \quad -\xi + x\eta_y = -x.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что функции $\xi = x$, $\eta = 0$ являются ее решением. Поэтому возьмем

$$e_4 = x\frac{\partial}{\partial x}.$$

Вычислим продолжения полей e_1, e_2, e_3, e_4 до четвертого порядка. Они имеют вид

$$
\begin{aligned}
e_1^{(4)} &= \frac{\partial}{\partial y},\\
e_2^{(4)} &= \frac{\partial}{\partial x},\\
e_3^{(4)} &= x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'},\\
e_4^{(4)} &= x\frac{\partial}{\partial x} - y'\frac{\partial}{\partial y'} - 2y''\frac{\partial}{\partial y''} - 3y'''\frac{\partial}{\partial y'''} - 4y^{IV}\frac{\partial}{\partial y^{IV}}.
\end{aligned}
$$

Эти поля образуют базис продолженной алгебры $A_{4,8}^{(4)}$. Инварианты этой алгебры имеют вид

$$I_1 = \frac{y^{IV}}{y''^2}, \quad I_2 = \frac{y'''^2}{y''^3}.$$

Следовательно, ОДУ четвертого порядка, допускающее алгебру $A_{4,8}$, может быть записано в виде

$$y^{IV} = y''^2 F\left(\frac{y'''^2}{y''^3}\right).$$

Алгебра $A_{4,9}^b, (0 < |b| < 1)$.

Соотношения этой алгебры определяются следующим образом:

$$[e_1, e_4] = (1+b)e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = be_3, \quad [e_2, e_3] = e_1.$$

Трехмерная подалгебра $A_{3,1}$ натянута на векторы e_1, e_2, e_3. Выберем

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_3 = x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Обозначим $e_4 = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}$.

Из соотношений $[e_1, e_4] = (1+b)e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_3, e_4] = be_3$ следует, что

$$
\begin{aligned}
&\xi_y = 0, \quad \eta_y = (1+b),\\
&\xi_x = 1, \quad \eta_x = 0,\\
&x\eta_y - \xi = bx.
\end{aligned}
$$

Частным решением этой системы являются функции $\xi = x$, $\eta = (1+b)y$, значит

$$e_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + (1+b)y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Вычислим продолжения полей e_1, e_2, e_3, e_4 до четвертого порядка. Они имеют вид

$$
\begin{aligned}
e_1^{(4)} &= \frac{\partial}{\partial y},\\
e_2^{(4)} &= \frac{\partial}{\partial x},\\
e_3^{(4)} &= x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'},\\
e_4^{(4)} &= x\frac{\partial}{\partial x} + (1+b)y\frac{\partial}{\partial y} + by'\frac{\partial}{\partial y'} + (b-1)y''\frac{\partial}{\partial y''} +\\
&\qquad +(b-2)y'''\frac{\partial}{\partial y'''} + (b-3)y^{IV}\frac{\partial}{\partial y^{IV}}.
\end{aligned}
$$

Эти поля образуют базис продолженной алгебры $(A_{4,9}^b)^{(4)}$. Найдем ее инварианты

$$I_1 = \frac{y^{IV}}{y''^{\frac{(b-3)}{(b-1)}}}, \quad I_2 = y''^{(2-b)}y'''^{(b-1)}.$$

и ОДУ четвертого порядка, допускающее алгебру $A_{4,9}^b$, принимает вид

$$y^{IV} = y''^{\frac{(b-3)}{(b-1)}}F(y''^{(2-b)}y'''^{(b-1)}).$$

Алгебра $A_{4,9}^0$.

Рассмотрим коммутативные соотношения этой алгебры:

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = e_1, \quad [e_2, e_4] = e_4.$$

Трехмерная подалгебра $A_{3,1}$ натянута на векторы e_1, e_2, e_3. Выберем

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_3 = x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Обозначим $e_4 = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}$.

Из соотношений $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_4$ следует, что

$$
\begin{aligned}
&\xi_y = 0, \quad \eta_y = 1, \quad \xi_x = 1, \quad \eta_x = 0,\\
&-x\xi_x - y\xi_y + \xi = 0, \quad -x\eta_x - y\eta_y + \eta = 0.
\end{aligned}
$$

В качестве решения этой системы выберем $\xi = x$, $\eta = y$, тогда

$$e_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Вычислим продолжения полей e_1, e_2, e_3, e_4 до четвертого порядка. Они имеют вид

$$
\begin{aligned}
e_1^{(4)} &= \frac{\partial}{\partial y},\\
e_2^{(4)} &= \frac{\partial}{\partial x},\\
e_3^{(4)} &= x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'},\\
e_4^{(4)} &= x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - y''\frac{\partial}{\partial y''} - 2y'''\frac{\partial}{\partial y'''} - 3y^{IV}\frac{\partial}{\partial y^{IV}}.
\end{aligned}
$$

Эти поля образуют базис продолженной алгебры $(A^0_{4,9})^{(4)}$. Инварианты этой алгебры имеют вид

$$I_1 = \frac{y^{IV}}{y''^3}, \quad I_2 = \frac{y'''}{y''^2}.$$

Следовательно, ОДУ четвертого порядка, допускающее алгебру $A^0_{4,9}$, может быть записано в виде

$$y^{IV} = y''^3 F\left(\frac{y'''}{y''^2}\right).$$

Уравнение, допускающее алгебру $A^0_{4,9}$, имеет вид

$$y^{IV} = y''^3 F(y'''/y''^2). \tag{20}$$

Операторы e_1, e_2, e_3 образуют идеал $\mathfrak{h}$ в алгебре $A^0_{4,9}$. Базис его дифференциальных инвариантов составляют функции

$$u = y'', \quad v = y'''.$$

Тогда $dv/du = Dv/Du = y^{IV}/y'''$, следовательно, уравнение (20) можно переписать в виде

$$v\frac{dv}{du} = u^3 F\left(\frac{v}{u^2}\right). \tag{21}$$

Это уравнение допускает оператор e_4. Найдем, как запишется этот оператор в координатах (u, v). Из формулы продолжения $e_4^{(4)}$ следует, что $e_4^{(4)}(u) = -u$, $e_4^{(4)}(v) = -2v$. Следовательно, оператор e_4 запишется как

$$X = e_4(u)\frac{\partial}{\partial u} + e_4(v)\frac{\partial}{\partial v} = -u\frac{\partial}{\partial u} - 2v\frac{\partial}{\partial v}.$$

Сделаем замену переменных $(u, v) \to (p, q)$, приводящую X к оператору группы параллельных переносов. Для этого нужно найти решения уравнений $X(p) = 0$, $X(q) = 1$. Возьмем

$$p = \frac{v}{u^2}, \quad q = \ln u,$$

тогда

$$u = e^q, \quad v = pe^{2q}.$$

Уравнение (21) перепишется в виде

$$p\left(\frac{dp}{dq} + 2p\right) = F(p).$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными. Если его общее решение найдено, а, соответственно, и решение уравнения (21) найдено в виде $\Phi(u, v) = C$, то относительно y получится уравнение $\Phi(y'', y''') = C$, допускающее алгебру Ли $\mathfrak{h}$, натянутую на e_1, e_2, e_3, и поэтому решающееся в квадратурах [9].

Алгебра $A^1_{4,9}$.

Коммутационные соотношения этой алгебры имеют вид:

$$[e_1, e_4] = 2e_1, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_4] = e_3.$$

Базис трехмерной подалгебры $A_{3,1}$ образуют элементы e_1, e_2, e_3. Возьмем

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_3 = x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Пусть $e_4 = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}$.

Запишем условия $[e_1, e_4] = 2e_1$, $[e_2, e_4] = e_1$, $[e_3, e_4] = e_3$.

Они принимают вид

$$\xi_y = 0, \quad \eta_y = 2,$$
$$\xi_x = 1, \quad \eta_x = 0.$$

Легко видеть, что функции $\xi = x$, $\eta = 2y$ являются ее решением. Поэтому возьмем

$$e_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Вычислим продолжения полей e_1, e_2, e_3, e_4 до четвертого порядка. Они имеют вид

$$e_1^{(4)} = \frac{\partial}{\partial y},$$
$$e_2^{(4)} = \frac{\partial}{\partial x},$$
$$e_3^{(4)} = x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'},$$
$$e_4^{(4)} = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} + y'\frac{\partial}{\partial y'} - y'''\frac{\partial}{\partial y'''} - 2y^{IV}\frac{\partial}{\partial y^{IV}}.$$

Эти поля образуют базис продолженной алгебры $(A^1_{4,9})^{(4)}$. Инварианты этой алгебры имеют вид

$$I_1 = \frac{y^{IV}}{y'''^2}, \quad I_2 = y''.$$

Следовательно, ОДУ четвертого порядка, допускающее алгебру $A^1_{4,9}$, может быть записано в виде

$$y^{IV} = y'''^2 F(y'').$$

Алгебра $A_{4,10}$.

Коммутационные соотношения имеют вид:

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_4] = -e_3, \quad [e_3, e_4] = e_2.$$

Покажем, что эта алгебра не реализуется, как алгебра векторных поле на $\mathbb{R}^2$.

Выберем систему координат, в которой

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Пусть в этих координатах

$$e_k = \xi_k(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta_k(x, y)\frac{\partial}{\partial y}, \quad k = 2, 3, 4.$$

Поскольку $[e_1, e_2] = 0$, имеем

$$\xi_{2y}\frac{\partial}{\partial x} + \eta_{2y}\frac{\partial}{\partial y} = 0,$$

или, $\xi_{2y} = \eta_{2y} = 0$. Следовательно, ξ_2, η_2 — функции только от переменной x. Аналогично, ξ_3, η_3 и ξ_4, η_4 — функции только от переменной x.

Из соотношения $[e_2, e_3] = e_1$ получаем

$$\xi_3 = C\xi_2, \quad \xi_2\eta_3' - \xi_3\eta_2' = 1, \tag{22}$$

где $C = \text{const}$, штрихом обозначена производная по x.

Из сравнения коэффициентов при $\frac{\partial}{\partial x}$ в равенствах $[e_2, e_4] = -e_3$ и $[e_3, e_4] = e_2$ получаем

$$\xi_2\xi_4' - \xi_4\xi_2' = -\xi_3, \quad \xi_3\xi_4' - \xi_4\xi_3' = \xi_2.$$

Подставив в последние два равенства $\xi_3 = C\xi_2$, придем к системе уравнений

$$\xi_2\xi_4' - \xi_4\xi_2' = -C\xi_2, \quad C(\xi_2\xi_4' - \xi_4\xi_2') = \xi_2.$$

Домножив первое из этих уравнений на C и вычтя из него второе, получим $\xi_2(1+C^2)=0$, откуда $\xi_2=\xi_3=0$, что противоречит второму из равенств (22). Следовательно, реализации алгебры $A_{4,10}$ не существует.

Алгебра $A^a_{4,11}$.

Коммутационные соотношения имеют вид:

$$[e_1,e_4]=2ae_1,\quad [e_2,e_4]=ae_2-e_3,\quad [e_3,e_4]=e_2+ae_3,\quad [e_2,e_3]=e_1.$$

Покажем, что эта алгебра не реализуется, как алгебра векторных полей на $\mathbb{R}^2$.

Выберем систему координат, в которой

$$e_1=\frac{\partial}{\partial y}.$$

Пусть в этих координатах

$$e_k=\xi_k(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta_k(x,y)\frac{\partial}{\partial y},\quad k=2,3,4.$$

Поскольку $[e_1,e_2]=0$, имеем

$$\xi_{2y}\frac{\partial}{\partial x}+\eta_{2y}\frac{\partial}{\partial y}=0,$$

или, $\xi_{2y}=\eta_{2y}=0$. Следовательно, ξ_2, η_2 — функции только от переменной x. Аналогично, ξ_3, η_3 — функции только от переменной x.

Из соотношения $[e_1,e_4]=2ae_1$ получаем

$$\xi_{4y}\frac{\partial}{\partial x}+\eta_{4y}\frac{\partial}{\partial y}=2a\frac{\partial}{\partial y},$$

откуда $\xi_{4y}=0$, $\eta_{4y}=2a$. Следовательно, $\xi_4=\xi_4(x)$, $\eta_4=2ay+m(x)$.

Аналогично, из соотношения $[e_2,e_3]=e_1$ получаем

$$\xi_3=C\xi_2,\quad \xi_2\eta_3'-\xi_3\eta_2'=1, \tag{23}$$

где $C=\mathrm{const}$, штрихом обозначена производная по x.

Из сравнения коэффициентов при $\frac{\partial}{\partial x}$ в равенствах $[e_2,e_4]=ae_2-e_3$ и $[e_3,e_4]=e_2+ae_3$ получаем

$$\xi_2\xi_4'-\xi_4\xi_2'=a\xi_2-\xi_3,\quad \xi_3\xi_4'-\xi_4\xi_3'=\xi_2+a\xi_3.$$

Подставив в последние два равенства $\xi_3=C\xi_2$, придем к системе уравнений

$$\xi_2\xi_4'-\xi_4\xi_2'=(a-C)\xi_2,\quad C(\xi_2\xi_4'-\xi_4\xi_2')=\xi_2(1+aC).$$

Домножив первое из этих уравнений на C и вычтя из него второе, получим $\xi_2(1+C^2)=0$, откуда $\xi_2=\xi_3=0$, что противоречит второму из равенств (23). Следовательно, реализации алгебры $A_{4,11}$ не существует.

Алгебра $A_{4,12}$.

Рассмотрим коммутативные соотношения этой алгебры:

$$[e_1,e_4]=-e_2,\quad [e_2,e_4]=e_1,\quad [e_1,e_3]=e_1,\quad [e_2,e_3]=e_2.$$

Трехмерная подалгебра $A_{3,3}$ натянута на e_1,e_2,e_3 . Ее реализация имеет вид:

$$e_1=\frac{\partial}{\partial y},\quad e_2=x\frac{\partial}{\partial y},\quad e_3=y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Пусть $e_4=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}$.

Запишем условия $[e_1,e_4]=-e_2$, $[e_2,e_4]=e_1$, $[e_3,e_4]=0$.

Они принимают вид

$$\begin{aligned}&\xi_y=0,\quad \eta_y=-x,\\ &x\xi_y=0,\quad x\eta_y-\xi=1.\end{aligned}$$

Заметим, что функции $\xi=-x^2-1$ и $\eta=-xy$ являются решением этой системы. Выберем

$$e_4=-(1+x^2)\frac{\partial}{\partial x}-xy\frac{\partial}{\partial y}.$$

Вычислим продолжения полей e_1, e_2, e_3, e_4 до четвертого порядка:

$$\begin{aligned}
e_1^{(4)}&=\frac{\partial}{\partial y},\\
e_2^{(4)}&=x\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y'},\\
e_3^{(4)}&=y\frac{\partial}{\partial y}+y'\frac{\partial}{\partial y'}+y''\frac{\partial}{\partial y''}+y'''\frac{\partial}{\partial y'''}+y^{IV}\frac{\partial}{\partial y^{IV}},\\
e_4^{(4)}&=-(1+x^2)\frac{\partial}{\partial x}-xy\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial y'}+xy'\frac{\partial}{\partial y'}+3xy''\frac{\partial}{\partial y''}+\\
&\qquad+(3y''+5xy''')\frac{\partial}{\partial y'''}+(8y'''+7xy^{IV})\frac{\partial}{\partial y^{IV}}.
\end{aligned}$$

Эти поля образуют базис продолженной алгебры $A_{4,12}^{(4)}$. Инварианты этой алгебры имеют вид

$$I_1=\frac{y^{IV}(1+x^2)^2(-8xy'''(1+x^2)-12x^2y'')}{y''},\quad I_2=\frac{y'''(1+x^2)+3xy''}{y''}.$$

и ОДУ четвертого порядка, допускающее алгебру $A_{4,12}$, принимает вид:

$$y^{IV} = \frac{y''F(I_2) - 8xy'''(1+x^2) - 12x^2y''}{(1+x^2)^2}. \tag{24}$$

Операторы e_1, e_2, e_3 образуют идеал $\mathfrak{h}$ в алгебре $A_{4,12}$. Базис его дифференциальных инвариантов составляют функции

$$u = x, \quad v = \frac{y'''}{y''}.$$

Тогда уравнение (24) можно переписать в виде

$$\frac{dv}{du} = \frac{F(v(1+u^2)+3u) - 8uv(1+u^2) - 12u^2 - v^2(1+u^2)^2}{(1+u^2)^2}. \tag{25}$$

Это уравнение допускает оператор e_4. Найдем, как запишется этот оператор в координатах (u, v). Из формулы продолжения $e_4^{(4)}$ следует, что $e_4^{(4)}(u) = -(1+u^2)$, $e_4^{(4)}(v) = (3+2uv)$. Следовательно, оператор e_4 запишется как

$$X = e_4(u)\frac{\partial}{\partial u} + e_4(v)\frac{\partial}{\partial v} = -(1+u^2)\frac{\partial}{\partial u} + (3+2uv)\frac{\partial}{\partial v}.$$

Уравнение (25) может быть проинтегрировано при помощи оператора $e_4^{(4)}$. После этого исходное уравнение сведется к уравнению третьего порядка, которое в свою очередь, может быть решено.

Алгебра $A_{4,7}$.

Рассмотрим коммутационные соотношения этой алгебры:

$$[e_1, e_4] = 2e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = e_2 + e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1.$$

Найдем какую-нибудь реализацию этой алгебры. Возьмем

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial y},$$

следовательно

$$e_i = \xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x} + \eta_i(x)\frac{\partial}{\partial y}, \quad i = 2, 3.$$

Выберем $e_2 = x\frac{\partial}{\partial y}$ для удобства, т.е., возьмем $\xi = 0, \eta = x$.

Из условия $[e_2, e_3] = e_1$ получаем

$$-\xi_3\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y},$$

а это значит $\xi_3 = -1$.

Из соотношений $[e_1, e_4] = 2e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_3, e_4] = e_2 + e_3$ последовательно находим

$$\begin{aligned}
&\xi_{4y} = 0, \quad \eta_{4y} = 2,\\
&\xi_4 = \xi_4(x), \quad \eta_4 = 2y + m(x),\\
&-\xi_4 + 2x = x.
\end{aligned}$$

Отсюда $\xi_4 = x$. Осталось подобрать η_3 и η_4. Имеем

$$-x\eta_3' - m' + \eta_3 = x$$

— это единственное условие на η_3 и m. Выберем $m = 0$, тогда $\eta_4 = 2y$.

Из условия $\eta_3' - \frac{\eta_3}{x} = -1$ получаем

$$\eta_3 = C_3 x - x \ln x.$$

Выберем $C = 0$, тогда

$$\eta_3 = -x \ln x.$$

Вычислим продолжения полей e_1, e_2, e_3, e_4 до четвертого порядка:

$$\begin{aligned}
&e_1^{(4)} = \frac{\partial}{\partial y},\\
&e_2^{(4)} = x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'},\\
&e_3^{(4)} = -\frac{\partial}{\partial x} - x\ln x\frac{\partial}{\partial y} - (\ln x + 1)\frac{\partial}{\partial y'} - \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial}{\partial y''} + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y'''} - \frac{2}{x^3}\cdot\frac{\partial}{\partial y^{IV}},\\
&e_4^{(4)} = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} + y'\frac{\partial}{\partial y'} - y'''\frac{\partial}{\partial y'''} - 2y^{IV}\frac{\partial}{\partial y^{IV}}.
\end{aligned}$$

Эти поля образуют базис продолженной алгебры $A_{4,7}^{(4)}$. Инварианты этой алгебры имеют вид

$$I_1 = \frac{y^{IV}x^2}{e^{2y''} - 1}, \quad I_2 = \left((xy''' - 1)e^{-y''}\right).$$

Следовательно, ОДУ четвертого порядка, допускающее алгебру $A_{4,7}$, может быть записано в виде

$$y^{IV} = \frac{e^{2y''} - 1}{x^2} F\left((xy''' - 1)e^{-y''}\right).$$

Заключение

В дипломной работе решены следующие задачи:

1. Указаны различные примеры, показывающие, как найти однопараметрическую группу преобразований, допускаемую данным ОДУ 1 порядка, как написать общий вид уравнения, допускающего данную однопараметрическую группу, Кроме того, проиллюстрированы методы решения ОДУ 1 порядка, допускающих группу.

2. Найдены реализации на плоскости всех четырехмерных алгебр Ли, обладающих некоммутативной трехмерной подалгеброй. Для ряда таких алгебр показано невозможность их реализации.

3. Построены ОДУ 4 порядка, допускающие эти алгебры Ли.

4. Приведена полная схема интегрирования полученных ОДУ 4 порядка.

Список литературы

[1] В.В. Шурыгин. *Групповой анализ дифференциальных уравнений* (учебно-методическое пособие). – Казань: Изд-во КПФУ. – 2010. – 55 с.

[2] Н.Х. Ибрагимов. *Азбука группового анализа.* – М.: Знание. – 1989. – 48 с.

[3] Н.Х. Ибрагимов. *Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Знание. – 1991. – 48 с.

[4] Н.Х. Ибрагимов. *Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования.* – Н.Новгород: Изд-во ННГУ – 2007. – 421 с.

[5] A. Schmucker, G. Czichowski, *Symmetry algebras and normal forms of third order ordinary differential equations*, J. of Lie Theory, Vol. 8 (1998) 129–137.

[6] F. M. Mahomed, P. G. L. Leach, *Lie algebras associated with scalar second order ordinary differential equations*, J. Math. Phys., vol. 30 (1989), 2770–2777.

[7] F. M. Mahomed, *Symmetry group classification of ordinary differential equations: Survey of some results*, Math. Meth. Appl. Sci., 2007, 30, 1995–2012.

[8] K. S. Mahomed and E. Momoniat, *Symmetry Classification of First Integrals for Scalar Linearizable Second-Order ODEs*, J. of Appl. Math., Vol. 2012 (2012), Article ID 847086, 14 pp.

[9] N.H. Ibragimov, M.C. Nucci, *Integration of third order ordinary differential equations by Lie's method: equations admitting three-dimensional Lie algebras*, Lie Groups and their Applications **2** (1994), 49–64.

[10] T. Cerquetelli, N. Ciccoli, M. C. Nucci, *Four dimensional Lie symmetry algebras and fourth order ordinary differential equations*, J. Nonlinear Math. Phys. 9-suppl 2 (2002) pp. 24–35, `arXiv:nlin/0205064 [nlin.SI]`.