МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

им. Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Специальность: 050201.65 - Математика с дополнительной специальностью

Специализация: математика и информатика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Дипломная работа)

«Решение задач теории вероятности в пакете Maple»

Работа завершена:

"___"_____ 2014 г. _____М.В. Наумов

Работа допущена к защите:

Научный руководитель

к.ф-м.н., доцент

"___"_____ 2014 г. _____ Н.А. Москалев

Заведующий кафедрой

докт.ф-м.н., профессор

"___"_____ 2014 г. _____ Ю.Г. Игнатьев

Казань, 2014

ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия все большое внимание к изучению курса «Теории вероятности» обусловлено использованием методов этой дисциплины в различных прикладных и фундаментальных науках. Теория вероятности является теоретической основой математической статистики и широко используется в теоретической физике, эконометрике, теории массового обслуживания и многих других дисциплинах. Наметился определённый тренд более глубокого изучения этой дисциплины не только в вузовской системе образования, но и в системе среднего профессионального образования, в том числе и в средней школе.

С другой стороны развитие программных средств и все большая и большая компьютеризация жизни дало толчок к внедрению компьютерных методов в решении, в том числе задач, относящихся к разделу теории вероятности и математической статистики. Использование мощного пакета символьной математики Maple к решению вероятностных и статистических задач весьма актуально. Всем перечисленным и объясняется обращение к данной тематике в постановке и выполнении квалификационной работы «Решении задач теории вероятности в математическом пакете Maple». Разработка этой темы позволит под новым углом подойти к изучению разделов теории вероятности в школьном и в вузовском курсах математики. Использование Maple в решении вероятностных задач дает новые методические подходы к устоявшемуся и стабильному математическому курсу, имеющему богатую историю преподавания.

Цель исследования – разработать методическое пособие по использованию пакета Maple при решении задач теории вероятностей и приложений (на примере задач теории массового обслуживания).

Достижении цели обусловило постановку следующих **задач**:

- Составить описание команд пакета Maple применительно к теории вероятностей и её приложений;

- Изучить основные разделы теории вероятностей и рассмотреть ряд типичных задач теории вероятностей и их решения в пакете Maple;
- Разработать с помощью Maplets программу для решения задачи из теории массового обслуживания с различными входными данными.

Квалификационная работа состоит из введения, трех глав, приложения, заключения и списка литературы. В приложении имеется CD-диск с текстом квалификационной работы и презентацией.

ГЛАВА 1. ПРОЦЕДУРЫ ПАКЕТА MAPLE В ЭЛЕМЕНТАХ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1 Основные понятия теории вероятностей

Пусть в результате опыта (эксперимента) получаем один или несколько взаимоисключающих друг друга элементарных исходов (событий) данного эксперимента. Исходы считаются взаимно исключающие друг друга. Тогда говорят, что данный эксперимент заканчивается одним и только одним элементарным исходом.

Под пространством элементарных событий (исходов) Ω будем понимать множество всех элементарных событий (элементарное событие соответствует элементарному исходу).

Подмножества пространства элементарных событий Ω называются случайными событиями.

1.1.1 Алгебра событий

Задаем пространство элементарных событий

> Omega:=[a,b,c,d];

Из библиотеки combinat используем команду choose

> U:=combinat[choose](Omega);

$$\Omega := [a, b, c, d]$$

Для вычисления количества n элементов в алгебре событий U получаем

> n:=combinat[numbcomb](Omega);

$$U := [[\ ], [a], [b], [a, b], [c], [a, c], [b, c], [a, b, c], [d], [a, d], [b, d], [a, b, d], [c, d], [a, c, d], [b, c, d], [a, b, c, d]]$$

1.1.2. Некоторые формулы комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, изучающий виды комбинаций различных объектов. Комбинаторные методы применяются в теории вероятности, статистике, математическом программировании, вычислительной математике, планировании экспериментов.

Элементарные комбинаторные операции можно проводить при помощи команд стандартной библиотеки. Все эти команды собраны в комбинаторный пакет **combinat.** Для его подключения следует набрать:

> with(combinat);

Далее к его командам можно обратиться по имени

command (args),

или указывая префикс пакета перед командой

combinat[command](args).

Все команды этого пакета перечислены в **Приложении 1.**

Перестановки

Перестановками называются наборы (кортежи), состоящие из одной и той же совокупности *n* различных элементов и которые различаются только порядком расположения элементов. Число всех возможных перестановок (обозначается P_n) вычисляется по следующей формуле:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$$

Перестановки из 4-х элементов задаются следующей командой:

> P:=combinat[permute](4);

$$P := [[1, 2, 3, 4], [1, 2, 4, 3], [1, 3, 2, 4], [1, 3, 4, 2], [1, 4, 2, 3], [1, 4, 3, 2], [2, 1, 3, 4], [2, 1, 4, 3], [2, 3, 1, 4], [2, 3, 4, 1], [2, 4, 1, 3], [2, 4, 3, 1], [3, 1, 2, 4], [3, 1, 4, 2], [3, 2, 1, 4], [3, 2, 4, 1], [3, 4, 1, 2], [3, 4, 2, 1], [4, 1, 2, 3], [4, 1, 3, 2], [4, 2, 1, 3], [4, 2, 3, 1], [4, 3, 1, 2], [4, 3, 2, 1]]$$

Общее количество перестановок будет

> combinat[numbperm](4);

$$24$$

Пример. Пусть имеются, выписанные в случайном порядке четыре элемента a, b, c, d. Найти вероятность того, что элементы a и b будут рядом.

Всевозможные перестановки элементов a, b, c, d задаются:

> P:=combinat[permute]([a,b,c,d]);

$$P := [[a, b, c, d], [a, b, d, c], [a, c, b, d], [a, c, d, b], [a, d, b, c], [a, d, c, b], [b, a, c, d], [b, a, d, c], [b, c, a, d], [b, c, d, a], [b, d, a, c], [b, d, c, a], [c, a, b, d], [c, a, d, b], [c, b, a, d], [c, b, d, a], [c, d, a, b], [c, d, b, a], [d, a, b, c], [d, a, c, b], [d, b, a, c], [d, b, c, a], [d, c, a, b], [d, c, b, a]]$$

Таких различных перестановок будет 24 (из 4-х элементов). Получим перестановки из следующих элементов ab,c,d

> Pab:=combinat[permute]([ab,c,d]);

$$Pab := [[ab, c, d], [ab, d, c], [c, ab, d], [c, d, ab], [d, ab, c], [d, c, ab]]$$

В результате имеем 6 элементов. А, учитывая перестановки символов a и b, перестановок, которые благоприятствуют наступлению события состоящего в том, что элементы a и b расположены рядом, будет 12.

Размещения

Комбинации по m элементов, составленные из n различных элементов $(m \le n)$, отличающиеся друг от друга либо элементами, либо их порядком, называется *размещениями*. Число всевозможных размещений (обозначается A_n^m) вычисляется по формуле

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1).$$

Всего количество размещений из 4-х по 2 элемента будет:

> combinat[numbperm](4, 2);

$$12$$

Всевозможные размещения из указанных элементов по 2 элемента будет:

> combinat[permute]([a,b,c,d],2);

$$[[a,b],[a,c],[a,d],[b,a],[b,c],[b,d],[c,a],[c,b],[c,d],[d,a],[d,b],[d,c]]$$

Пример. Перечислите все комбинации перестановок из данных четырех цветов: Красных, Белых, Синих, и Желтых. Сгенерировать перестановки из трех элементов.

> with(combinat);

> permute([Red, White, Blue, Yellow];

$$[[Red, White, Blue, Yellow], [Red, White, Yellow, Blue], [Red, Blue, White, Yellow], [Red, Blue, Yellow, White], [Red, Yellow, White, Blue], [Red, Yellow, Blue, White], [White, Red, Blue, Yellow], [White, Red, Yellow, Blue], [White, Blue, Red, Yellow], [White, Blue, Yellow, Red], [White, Yellow, Red, Blue], [White, Yellow, Blue, Red], [Blue, Red, White, Yellow], [Blue, Red, Yellow, White], [Blue, White, Red, Yellow], [Blue, White, Yellow, Red], [Blue, Yellow, Red, White], [Blue, Yellow, White, Red], [Yellow, Red, White, Blue], [Yellow, Red, Blue, White], [Yellow, White, Red, Blue], [Yellow, White, Blue, Red], [Yellow, Blue, Red, White], [Yellow, Blue, White, Red]]$$

> permute([Red, White, Blue, Yellow], 3);

$$[[Red, White, Blue], [Red, White, Yellow], [Red, Blue, White], [Red, Blue, Yellow], [Red, Yellow, White], [Red, Yellow, Blue], [White, Red, Blue], [White, Red, Yellow], [White, Blue, Red], [White, Blue, Yellow], [White, Yellow, Red], [White, Yellow, Blue], [Blue, Red, White], [Blue, Red, Yellow], [Blue, White, Red], [Blue, White, Yellow], [Blue, Yellow, Red], [Blue, Yellow, White], [Yellow, Red, White], [Yellow, Red, Blue], [Yellow, White, Red], [Yellow, White, Blue], [Yellow, Blue, Red], [Yellow, Blue, White]]$$

Слагаемые целого

Рассмотрим следующую задачу: найти различные комбинации слагаемых числа 6, если количество таких слагаемых равно трем:

> combinat[composition](6, 3);

$$\{[1, 1, 4], [1, 2, 3], [1, 3, 2], [1, 4, 1], [2, 1, 3], [2, 2, 2], [2, 3, 1], [3, 1, 2], [3, 2, 1], [4, 1, 1]\}$$

Общее число таких наборов будет

> combinat[numbcomp](6, 3);

$$10.$$

Сочетания

Комбинации, содержащие по m элементов каждая, составленные из n различных элементов $(m \le n)$ и различающиеся хотя бы одним элементом, называется *сочетаниеми.* Число сочетаний определяется формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Приведем примеры вычисления

> binomial(5, 2);

$$10$$

> binomial(5, 3);

$$10$$

> binomial(6, 4);

$$15$$

Вычислим число сочетаний из n по 2 (по 3) и разложим в ряд по n

> binomial(n, 2);

$$\mathrm{binomial}(n, 2)$$

> expand(%);

$$\frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} n$$

> binomial(n, 3);

$$\mathrm{binomial}(n, 3)$$

> expand(%);

$$\frac{1}{6} n^3 - \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n$$

Выразим число сочетаний из n по 3 через факториалы

> convert(binomial(n,3),factorial);

$$\frac{1}{6}\,\frac{n!}{(n-3)!}$$

1.2 Умножение и сложение вероятностей

Определение. *Под суммой событий* A и B понимается событие

$$A + B,$$

которое наступает тогда и только тогда, когда имеет место хотя бы одно из событий A и B.

Определени. *Произведением событий* A и B называется событие

$$AB,$$

состоящее в одновременном наступлении событий A и B.

1.3 Формула полной вероятности.

Пусть событие A наступает в результате появления одного и только одного события $H_i (i = 1, 2, ..., n)$. События

$$H_1, H_2, ..., H_n$$

образуют полную группу и называются в этом случае гипотезами.

Имеет место формула для вероятности события

$$P(A / H_k)$$

которая и называется *формулой полной вероятности*.

1.4 Формула Байеса

Имеется полная группа гипотез

$$H_1, H_2, ..., H_n.$$

Их вероятности известны до опыта. В результате испытания наступает событие *A*, которому гипотезы приписывали определенные вероятности

$$P(A/H_k).$$

Необходимо переоценить вероятности гипотез после опыта. Это достигается с помощью формулы Байеса:

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A/H_k)}.$$

1.5.1 Схема Бернулли. Формула Бернулли

Пусть в серии повторных независимых испытаний событие *A* наступает с одной и той же вероятностью (не зависящей от номера испытания)

$$P(A) = p.$$

Подобного рода серия испытаний называется схемой Бернулли.

Пусть также *q* – вероятность противоположного события $\bar{A}$. Тогда *q=1-p*.

В условиях схемы Бернулли найти вероятность того, что в серии из n испытаний, событие *A* появиться ровно m раз. Эту вероятность будем обозначать

$$P_n(m).$$

Данную вероятность вычисляют по следующей формуле

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$,

которая называется формулой Бернулли.

Пример. Пусть монета бросается 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет ровно 3 раза

ГЛАВА 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Определение. Величина называется *случайной*, если все свои значения она принимает в зависимости от исходов испытания. Для каждого элементарного исхода случайная величина будет принимать единственное значение. Случайные величины обозначаются заглавными буквами X, Y,…

Различают случайные величины дискретные и непрерывные. Если множество принимаемых случайной величиной значений конечно, то эта случайная величина называется дискретной. Если же множество значений случайной величины представляет из себя некоторый промежуток числовой оси (то есть значения случайной величины непрерывным образом заполняют этот промежуток), то такая случайная величина называется непрерывной.

Обозначим так же через

$$p_i = P\left(X = x_i\right), \text{ где } (i = 1, 2, ..., n).$$

Здесь p_i - вероятность, с которой случайная величина X принимает значение x_i.

Пакет программ, который используется в теории вероятности и в математической статистике, называется "stats". Обращаться к нему можно следующим образом:

> with(stats);

$$[anova, describe, fit, importdata, random, statevalf, statplots, transform]$$

Параметры распределения прописываются в квадратных скобках. С приведенными списками распределений и достаточно подробным их описанием можно ознакомиться в **приложении 2**, а так же в справочной системе Maple на странице distributions. Интегральная функция, дифференциальная функция (закон распределения вероятностей) и квантиль дискретного распределения,

соответственно, обозначаются dcdf, pf, icdf. Подобное обозначение для непрерывного распределения: cdf, pdf, icdf. Встроенная функция теории вероятности можно задать двумя видами, и вычисление его значения x=t :

1) **statevalf[вид функции, закон распределения] (аргумент**),

statevalf[вид функции, закон распределения] (аргумент)(t)

2) **X:=RandomVariable(закон распределения);**

ProbabilityFunction(X, x);

ProbabilityFunction(X, t);

evalf(%)

2.1 Дискретные случайные величины

2.1.1 Табличный закон распределения

Определение. *Законом распределения дискретной величины называется* соответствие между всеми возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями, с которыми случайная величина принимает эти свои значения.

Как правило в случае дискретной случайной величины X закон распределения задается в виде следующей таблицы

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Все возможные значения x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ случайной величины X образуют полную группу. Поэтому, имеем

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

Пример. Пусть закон распределения случайной величины имеет вид:

> matrix([[-2, -1, 0, 1, 2], [0.1, 0.2, 0.2, 0.4, 0.1]]);

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Найти функцию распределения случайной величины и определить вероятность попадания этой случайной величины в промежуток [-1; 2].

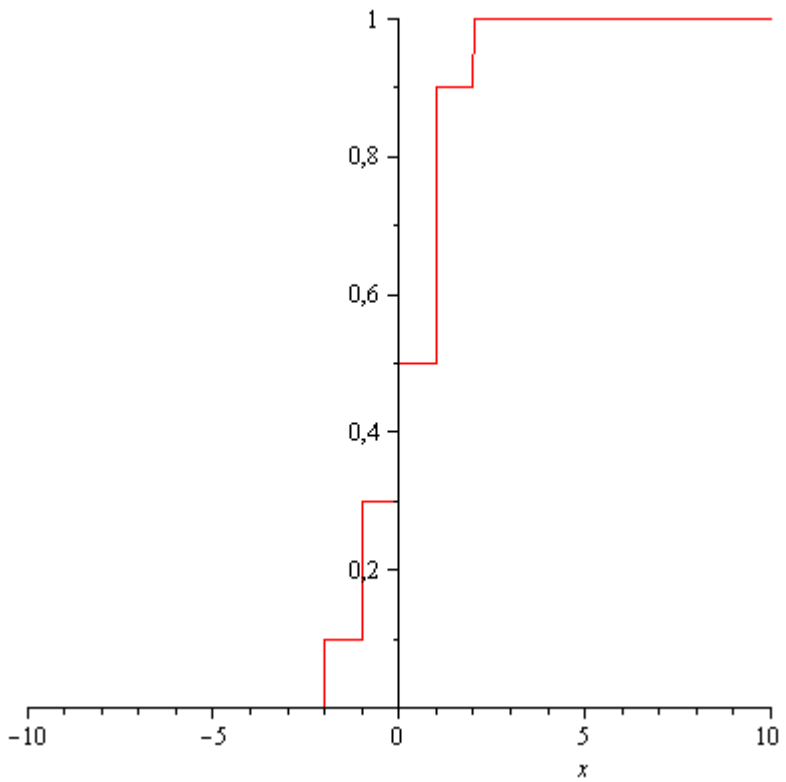
Решение. Функция распределения имеет вид:

> F:=piecewise(x<-2,0,x>=-2 and x<-1,0.1,x>=-1 and x<0,0.3,x>=0 and x<1,0.5,x>=1 and x<2,0.9,x>=2,1);

$$F := \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0.1 & -2 \le x \ \textbf{and} \ x < -1 \\ 0.3 & -1 \le x \ \textbf{and} \ x < 0 \\ 0.5 & 0 \le x \ \textbf{and} \ x < 1 \\ 0.9 & 1 \le x \ \textbf{and} \ x < 2 \\ 1 & 2 \le x \end{cases}$$

Для построения графика функции распределения воспользуемся стандартной командой:

> plot(F(x),x);



Для нахождения вероятности попадания случайной величины в промежуток [-1; 2], воспользуемся следующей процедурой:

> F:=x->piecewise(x<-2,0,x>=-2 and x<-1,0.1,x>=-1 and x<0,0.3,x>=0 and x<1,0.5,x>=1 and x<2,0.9,x>=2,1);

$$F := x \rightarrow piecewise\,(x < -2, 0, -2 \leq x \textbf{ and } x < -1, 0.1, -1 \leq x \textbf{ and } x < 0, 0.3, 0 \leq x \textbf{ and } x < 1, 0.5, 1 \leq x \textbf{ and } x < 2, 0.9, 2 \leq x, 1)$$

Помня, что P(a<p<b)=F(b)-F(a), имеем:

> p:=F(2)-F(-1);

$$p := 0.7$$

Перечислим основные распределения и их обозначение в Maple:

<u>Дискретные распределения</u>

binomiald[n,p]	**discreteuniform[a,b]**
empirical[list_prob]	**hypergeometric[Nl, N2, n]**
negativebinomial[n,p]	**poisson[mu]**

2.1.2 Биномиальное распределение

В условиях схемы Бернулли проводится серия из n независимых испытаний, каждое из которых заканчивается либо “успехом” либо “неуспехом”. Пусть в каждом испытании вероятность появления события A (вероятность успеха) равна p, а вероятность неуспеха $q = 1- p$. Число появлений события A в этих испытаниях рассмотрим в качестве дискретной случайной величины X. Эта величина принимает значения от 0 до n. Ее распределение называется *биномиальным*. Вероятность этих возможных значений k определяется формулой Бернулли (см. выше).

Сумма всех вероятностей биномиального распределения равна единице, то есть

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = p^n + np^{n-1}q + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + q^n = 1$$

Данную последовательность можно задать в видах:

Binomial(n, p);

BinomialDistribution(n, p);

где n - число испытаний

p - вероятность успеха

Биномиальное распределение описывается как:

> f(t) = piecewise(t < 0,0,binomial(n,t)*p^t*(1-p)^(n-t));

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \mathrm{binomial}(n, t)\, p^t\, (1-p)^{n-t} & otherwise \end{cases}$$

Где:

> 0 < n, 0 <= p, p <= 1;

$$0 < n, 0 \le p, p \le 1$$

Биномиальное распределение используется для оценки вероятностей в ряде успеха или неудач. Полученная величина указывает на число успехов в ряде n испытания Бернулли, каждый с вероятностью успеха p.

Пример 1.

> with(Statistics):

> X := RandomVariable(Binomial(n,p)):

> ProbabilityFunction(X, u);

$$\begin{cases} 0 & u < 0 \\ \mathrm{binomial}(n, u)\, p^{u}\, (1-p)^{n-u} & otherwise \end{cases}$$

> ProbabilityFunction(X, 1);

$$n\, p\, (1-p)^{n-1}$$

> Mean(X);

$$n\, p$$

> Variance(X);

$$n\, p\, (1-p)$$

Пример 2.

Пусть случайная дискретная величина починяется биномиальному закону распределения с параметрами n = 13, p = 7/11. Тогда закон распределения вероятностей находится следующим образом:

> with(Statistics):

>X := RandomVariable(Binomial(13, 7/11));

> ProbabilityFunction(X, u);

$$\begin{cases} 0 & u < 0 \\ \text{binomial}(13, u) \left(\frac{7}{11}\right)^{u} \left(\frac{4}{11}\right)^{13-u} & otherwise \end{cases}$$

Находим значения в точках равные 0, 3, 11 и строим график данного распределения

> **ProbabilityFunction(X, 0); evalf(%);**

$$0.00000194390474$$

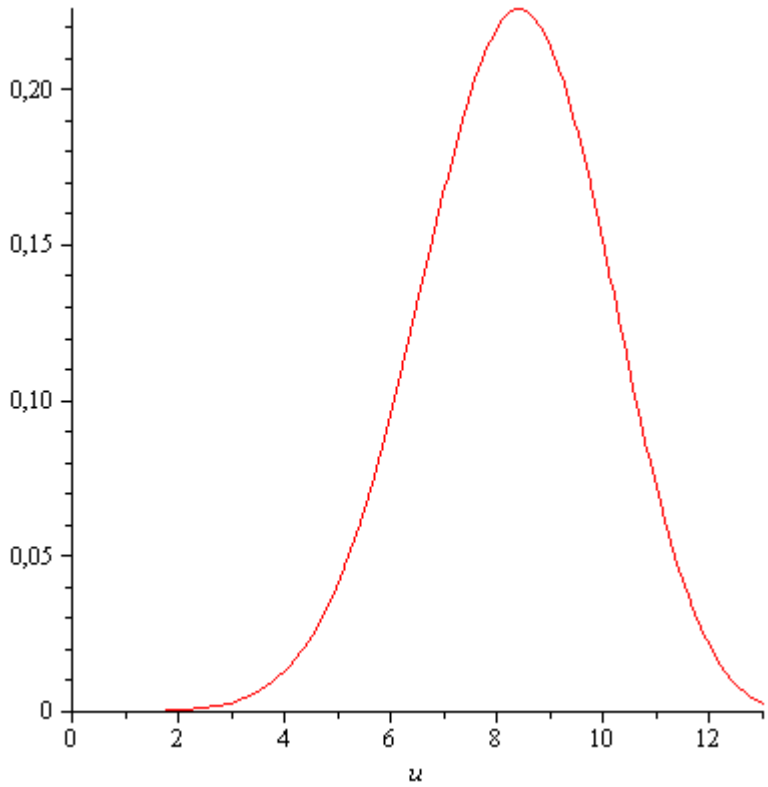
> **ProbabilityFunction(X, 3); evalf(%);**

$$0.00297958074$$

> **ProbabilityFunction(X, 11); evalf(%);**

$$0.0714805883$$

> **plot(ProbabilityFunction(X, u), u = 0 .. 13);**



Второй способ нахождения закона распределения вероятности выглядит следующим образом:

> restart;

> with(stats);

$$[anova, describe, fit, importdata, random, statevalf, statplots, transform]$$

>p := statevalf[pf, binomiald[13, 7/11]]: [[m, p(m)]$m = 0 .. 13)];

$$[[0, 0.00000194390474], [1, 0.00004422383298], [2, 0.0004643502463], [3, 0.00297958074], [4, 0.01303566577], [5, 0.04106234717], [6, 0.09581214340], [7, 0.16767125100], [8, 0.22006851699], [9, 0.21395550255], [10, 0.14976885188], [11, 0.07148058834], [12, 0.02084850493], [13, 0.00280652951 0]]$$

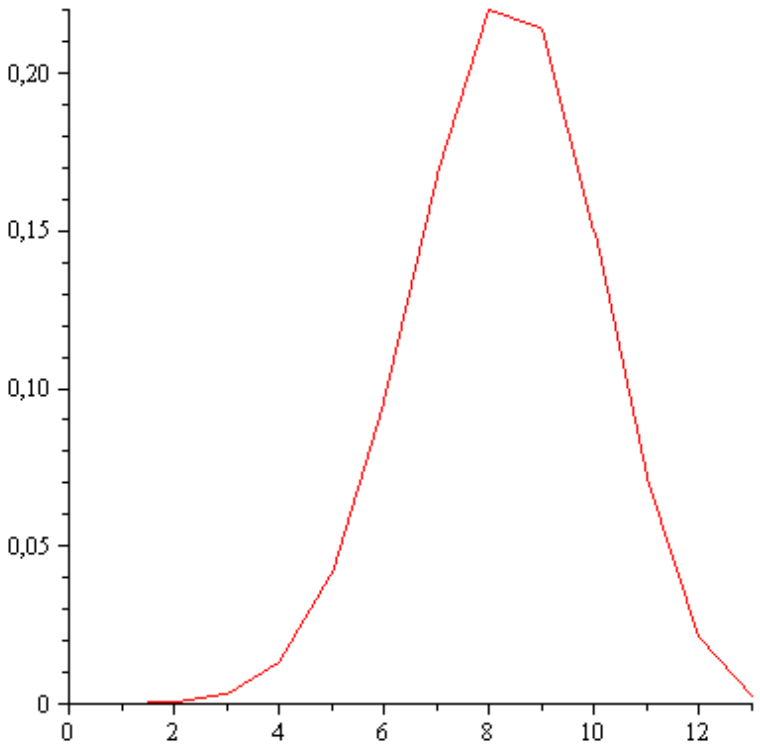
Находим значения в точках равные 0, 3, 11 и строим график данного распределения

>p(0); p(3); p(11); plot([[m, p(m)]$m = 0 .. 13)]);

$$0.00000194390474$$

$$0.00297958074$$

$$0.0714805883$$



Задача. Банк выдает 5 кредитов. Вероятность невозврата кредита равно 0,2 для каждого из заемщиков. Составить таблицу законов распределения количество заемщиков, не вернувших кредит по окончанию срока кредитования.

> with(Statistics):

> X := RandomVariable(Binomial(5,0.2)):

> ProbabilityFunction(X, u);

$$\begin{cases} 0 & u < 0 \\ \mathrm{binomial}(5, u)\ 0.2^{u}\ 0.8^{5-u} & otherwise \end{cases}$$

> ProbabilityFunction(X, 0);

$$0.32768($$

> ProbabilityFunction(X, 1);

$$0.4096($$

> **ProbabilityFunction(X, 2);**

$$0.2048($$

> **ProbabilityFunction(X, 3);**

$$0.0512($$

> **ProbabilityFunction(X, 4);**

$$0.0064($$

> **ProbabilityFunction(X, 5);**

$$0.00032($$

> **Mean(X);**

$$1.0$$

> **Variance(X);**

$$0.80$$

> matrix([[x[i], 5, 4, 3, 2, 1, 0], [P, ProbabilityFunction(X, 5), *ProbabilityFunction* (X, 4), *ProbabilityFunction* (X, 3), *ProbabilityFunction* (X, 2), *ProbabilityFunction* (X, 1), *ProbabilityFunction* (X, 0)]]);

$$\begin{bmatrix} x_i & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ P & 0.000320 & 0.00640 & 0.05120 & 0.20480 & 0.40960 & 0.327680 \end{bmatrix}$$

2.1.3 Распределение Пуассона

Производится n испытаний, вероятность появления события A равна p. Тогда вероятность того, что событие A наступит ровно k раз, дается формулой, которая представляет собой закон распределения Пуассона вероятностей массовых и

редких событий, при условии что произведение np является постоянной величиной, то есть $np = \lambda$

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Данную последовательность можно задать в виде:

Poisson(lambda) или **PoissonDistribution(lambda)**

Где **lambda -** параметр интенсивности.

Описание:

> f(t) = piecewise(t < 0,0,lambda^t*exp(-lambda)/t!);

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{\lambda^t e^{-\lambda}}{t!} & otherwise \end{cases}$$

Выполняющийся при условии:

> 0 < lambda;

$$0 < \lambda$$

Надо обратить внимание на то, что команда Пуассона инертна и должна использоваться в сочетании с командой **RandomVariable**.

Функции Quantile и функции CDF используются в Пуассоновском распределении как последовательность повторений, чтобы получить желаемый результат. Максимальное количество повторений, предложенный компанией Maple по умолчанию равно 100, но эта число может быть изменена, установив циклическую переменную _EnvStatisticsIterations к желаемому числу повторений.

Вычисления происходят следующим образом:

> with(Statistics):

> X := RandomVariable(Poisson(lambda)):

> ProbabilityFunction(X, u);

$$\begin{cases} 0 & u < 0 \\ \dfrac{\lambda^u e^{-\lambda}}{u!} & otherwise \end{cases}$$

> ProbabilityFunction(X, 2);

$$\frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda}$$

> Mean(X);

$$\lambda$$

> Variance(X);

$$\lambda$$

Пример. На базу отправлено 10 000 изделий. Вероятность того, что изделие в пути получит повреждение, равна 0,0003. Найти вероятность того, что на базу прибудут 4 поврежденных изделия.

Решение. По условию задачи n= 10 000, p= 0,0003, k= 4. Находим λ, а затем по формуле: $P_n(k) = \dfrac{\lambda^k e^{-k}}{k!}$

и искомую вероятность:

$\lambda = np$ =10 000 * 0,0003 = 3, $P_{10000}(4) = \dfrac{3^4 e^{-3}}{4!}$

> with(Statistics):

> n := 10000;

$$n := 10000$$

> $p := 0.0003;$

$$p := 0.0003$$

> $u := 4;$

$$u := 4$$

> lambda $:= n \cdot p;$

$$\lambda := 3.0000$$

> X := RandomVariable(Poisson(lambda)):

> ProbabilityFunction(X, u);

$$0.1680313558$$

> Mean(X);

$$3.0000$$

> Variance(X);

$$3.0000$$

2.2 Числовые характеристики дискретных случайных величин

Определение. *Математическим ожиданием дискретной случайной величины* называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Определение. Разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием называется *отклонением*: *X – M(X)*.

Определение. Математическое ожидание квадрата квадрата отклонения называется *дисперсией,* или *рассеянием*:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

При вычислении дисперсии удобно воспользоваться формулой

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Определение. Средним квадратичным отклонением случайной величины X называется квадратный корень из ее дисперсии

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

2.3 Непрерывные случайные величины

2.3.1 Функция и плотность распределения вероятностей

Пусть X – непрерывная случайная величина, значения которой полностью заполняют интервал (a, b).

Определение. *Функцией распределения случайной величины X* называется функция $F(x)$,определяющая вероятность того, что X примет значения меньше x:

$$F(x) = P(X < x).$$

1. Вероятность того, что случайная величина X принимает значения, заключенные внутри интервала (α, β), равна разности значения функции распределения на концах этого интервала:

$$P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равно нулю.

Определение. Производная от функции распределения непрерывной случайной величины X называется *плотностью распределения* вероятности X:

$$f(x) = F'(x)$$

Из этого определения следует, что функция распределения является первообразной для плотности определения или неопределенным интегралом от нее. Отсюда справедливо равенство

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Пример 1. Пусть случайная величина задана функцией распределения:

> F:=piecewise(x<2,0,x>=2 and x<3,(x-2)^2,x>3,1);

$$F := \begin{cases} 0 & x < 2 \\ (-2+x)^2 & 2 \le x \textbf{ and } x < 3 \\ 1 & 3 < x \end{cases}$$

Найти плотность вероятности f(x), построит графики F и f, вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал (1; 2.5).

Решение. Найдем плотность вероятности случайной величины :

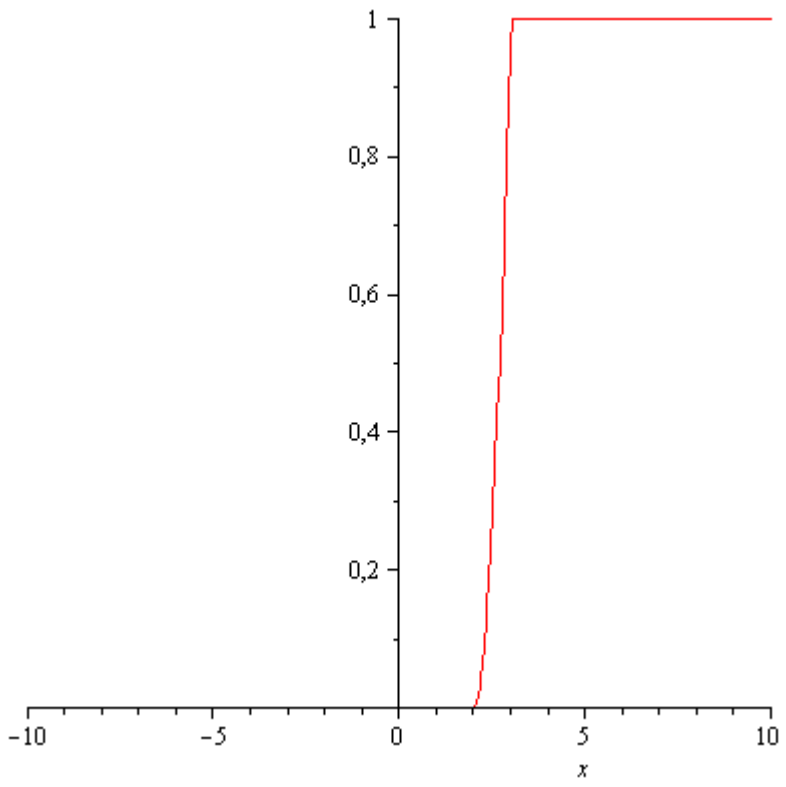
> f:=diff(F, x);

$$f := \begin{cases} 0 & x \le 2 \\ -4+2x & x < 3 \\ undefined & x = 3 \\ 0 & 3 < x \end{cases}$$

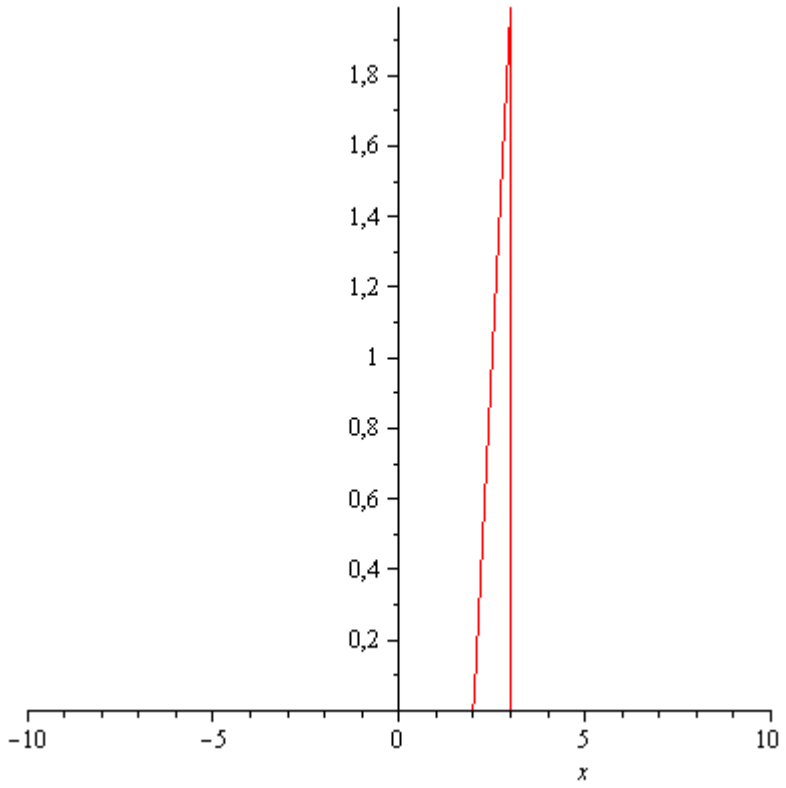
Заметим, что в точке x=3 производная функции F(x) не существует.

Построим графики функций F(x) и f(x).

> plot(F,x);



> plot(f,x);



Вычислим вероятность попадания случайной величины в интервал (1; 2.5), для чего преобразуем функцию F(x) в функцию-процедуру

> F:=unapply(F,x);

$$F := x \to piecewise\left(x < 2, 0, 2 \le x \textbf{ and } x < 3, (-2 + x)^2, 3 < x, 1\right)$$

Тогда искомая вероятность равна

> F(2.5)-F(1);

$$0.25$$

2.3.2 Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Разница между определениями дискретных и непрерывных случайных величин заключается в том, вместо сумм в формулах дискретных величин берутся их интегральные аналоги. Формулы для математического ожидания и дисперсии

$$M(X) = \int_a^b xf(x), \quad D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x)dx$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется так же, как и у дискретной случайной величины, по формуле

$$\sigma(X) = \sqrt{D(x)}$$

Для вычисления дисперсии так же можно воспользоваться формулой, с помощью которого намного удобнее находить значения

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2$$

Задача 1. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X равны 10 и 2, соответственно. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале (12, 14).

Решение.

> with(statevalf);

$$[cdf, dcdf, icdf, idcdf, pdf, pf]$$

> int(statevalf[pdf,normald[10,2]](x),x=12..14);

$$\int_{12}^{14} statevalf_{pdf,\, normald_{10,\,2}}(x)\, dx$$

>evalf(%)

$$0.135905122$$

2.4 Основные распределения непрерывных случайных величин

Перечислим основные непрерывные распределения и их обозначения в Maple

<u>Непрерывные распределения:</u>

beta[nul, nu2]	**cauchy[a, b]**	**chisquare[nu]**
gamma[a, b]	**exponential[alpha, a]**	**fratio[nul, nu2]**
laplaced[a, b]	**logistic[a, b]**	**logriormal[mu, sigma]**
normald[mu, sigma]	**studentst[nu]**	**uniform[a, b]**
weibull[a, b]		

2.4.1 Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина X , все возможные значения которой заполняют конечный промежуток на отрезке $(a,\ b)$, называется *равномерно распределенной,* если её плотность вероятности постоянна на этом промежутке.

Плотность равномерного распределения находится по формуле:

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le a,\\ \dfrac{1}{b-a}, a<x\le b,\\ 0, x>b.\end{cases}$$

Следующими командами можно задать данное распределение:

Uniform(a, b) или **UniformDistribution(a, b)**

Также можно его задать как обычную функцию

> f(t) = piecewise(t < a,0,t < b,1/(b-a),0);

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ \dfrac{1}{b-a} & t<b\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

где $a<b$.

Решение состоит в следующем:

> with(Statistics):

> X := RandomVariable(Uniform(a,b)):

> PDF(X, u);

$$\begin{cases}0 & u<a\\ \dfrac{1}{b-a} & u<b\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

> PDF(X, .5);

$$\begin{cases} 0. & 0.5 < a \\ \dfrac{1}{b - 1.\,a} & 0.5 < b \\ 0. & otherwise \end{cases}$$

> Mean(X);

$$\frac{1}{2}\,a + \frac{1}{2}\,b$$

> Variance(X);

$$\frac{1}{12}\,(b - a)^2$$

Пример. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, распределенной равномерно на интервале (1, 5). Построить график данного распределения.

> with(Statistics):

> X := RandomVariable(Uniform(1,5));

$$X := \_R3$$

> PDF(X, u);

$$\begin{cases} 0 & u < 1 \\ \dfrac{1}{4} & u < 5 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

> PDF(X, .5);

$$0.$$

> Mean(X);

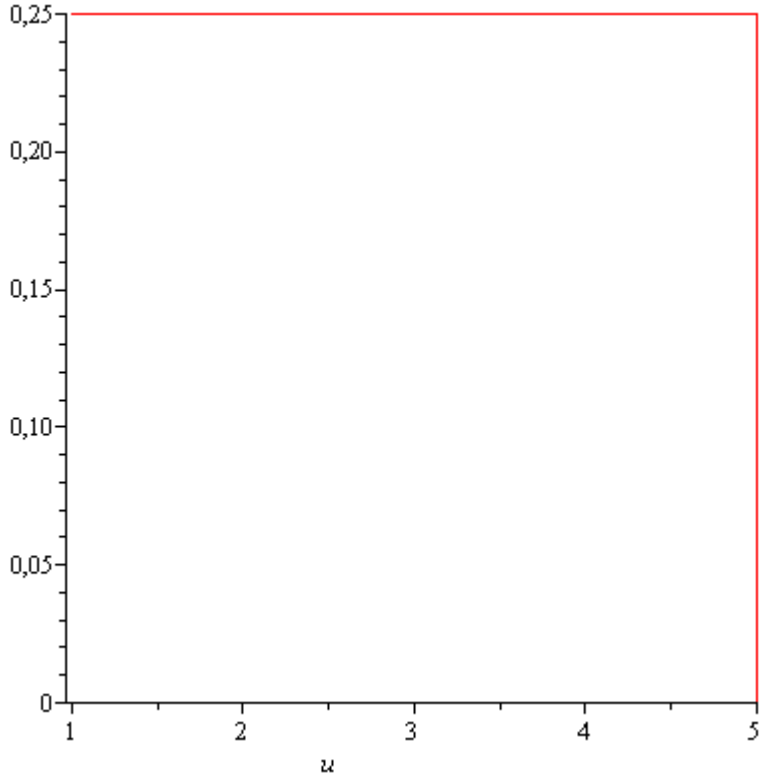
$$3$$

> Variance(X);evalf(%);

$$\frac{4}{3}$$

1.33333333:

> plot(PDF(X, u), u = 1 .. 5);



2.4.2 Нормальное распределение

Распределение вероятностей случайной величины X называется *нормальным*, если плотность распределения равно

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Нормальное распределение задается двумя параметрами: a и σ. Которые можно выразить через математическое ожидание и дисперсию

$$M(X) = a, \quad D(X) = \sigma^2, \sigma(X) = \sigma.$$

Модой $M_0(X)$ называется возможные значения случайной величины X, при котором плотность распределения имеет максимум. *Медианой* $M_0(X)$ называется такое возможное значение случайной величины X, что вертикальная прямая $x=M_0(X)$ делит пополам площадь, ограниченную кривой плотности распределения.

где μ(mu) – математическое ожидание, σ(Sigma) – среднее квадратическое отклонение

В пакете Maple данное распределение прописывается в виде:

> f(t) = 1/2*2^(1/2)/Pi^(1/2)/sigma*exp(-1/2*(t-mu)^2/sigma^2);

$$f(t) = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{\pi}\,\sigma}$$

где μ (mu) – математическое ожидание, σ (Sigma) – среднее квадратическое отклонение

Причем:

> mu::real, 0 < sigma;

$$\mu{:}real,\ 0 < \sigma$$

Нормальное распределение в Maple можно задать используя одну из встроенных функций:

Normal(mu, sigma) или NormalDistribution(mu, sigma)

Если некоторая величина возникает, как сумма воздействий множества независимых факторов, её распределение часто близко к нормальному.

Стандартное описание:

> with(Statistics):

> X := RandomVariable(Normal(mu,sigma)):

> PDF(X, u);

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}\frac{(u-\mu)^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{\pi}\,\sigma}$$

> PDF(X, .5);

$$\frac{0.3989422802e^{-\frac{0.5000000000\,(0.5-1.\,\mu)^2}{\sigma^2}}}{\sigma}$$

> Mean(X);

$$\mu$$

> Variance(X);

$$\sigma^2$$

Пример 1. Построить график нормального распределения, если математическое ожидание равно 3, а дисперсия равно 4

Решение.

> with(Statistics):

> X := RandomVariable(Normal(3,2)):

> PDF(X, u);

$$\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{8}(-3+u)^2}}{\sqrt{\pi}}$$

> PDF(X, .5);

$$0.0913245426$$

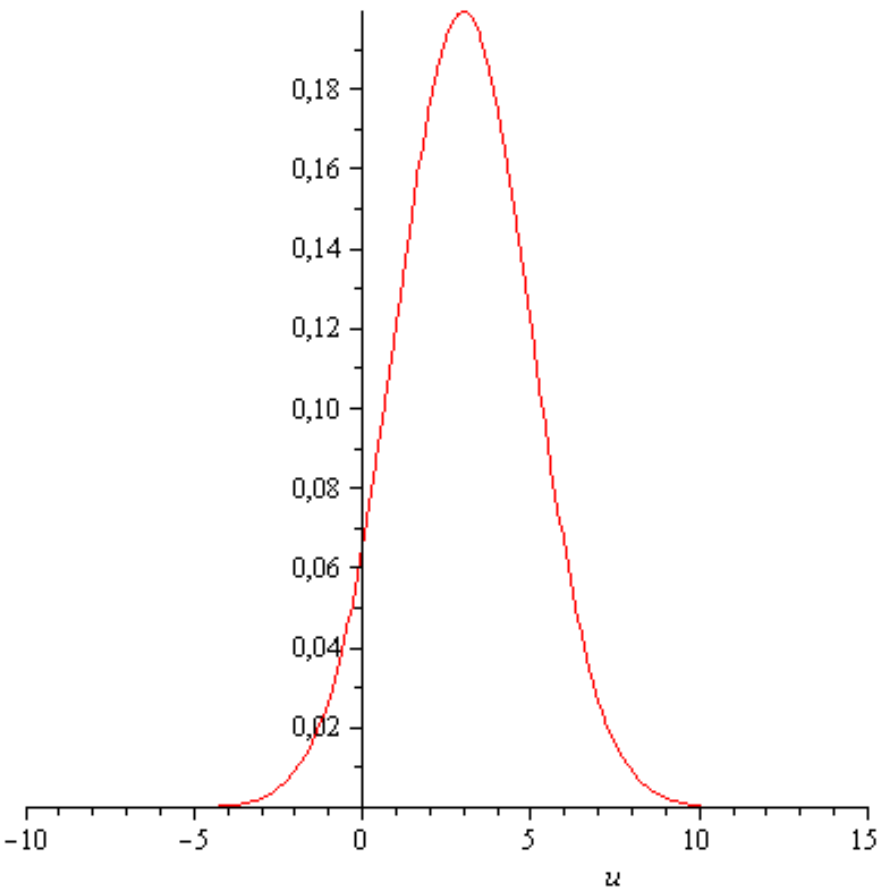
> Mean(X);

$$3$$

> Variance(X);

$$4$$

>plot(PDF(X, u), u = -10 .. 15);



2.4.3 Распределение χ^2 Пирсона

Пусть X_1, $X_2,\ldots,$ X_n - нормально распределенные независимые случайные величины с параметрами a=0 и σ=1. Тогда сумма их квадратов

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$$

называется χ^2 - распределением с n степенями свободы. Доказано, что плотность этого распределения определяется формулой

$$f(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, 0 \le x,$$

где $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-1} dt$ - гамма-функция.

В Maple распределение Пирсона задается следующим образом

> f(t) = piecewise(t < 0,0,1/(2^(1/2*nu))/GAMMA(1/2*nu)*t^(1/2*nu-1)*exp(-1/2*t));

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{t^{\frac{1}{2}\nu - 1}\, e^{-\frac{1}{2}t}}{2^{\frac{1}{2}\nu}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right)} & otherwise \end{cases}$$

$\nu>0$

Базовая встроенная функция имеет вид **ChiSquare(nu)** или **ChiSquareDistribution(nu).**

Вычисление происходит следующим образом

> with(Statistics):

> X := RandomVariable(ChiSquare(nu)):

> PDF(X, u);

$$\begin{cases} 0 & u < 0 \\ \dfrac{u^{\frac{1}{2}\nu - 1}\, e^{-\frac{1}{2}u}}{2^{\frac{1}{2}\nu}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right)} & otherwise \end{cases}$$

> PDF(X, .5);

$$\frac{0.7788007831\, 0.5^{0.5000000000\,\nu - 1.}}{2.^{0.5000000000\,\nu}\, \Gamma(0.5000000000\nu)}$$

> Mean(X);

$$\nu$$

> Variance(X);

$$2\,\nu$$

Пример 1. Строим распределение хи-квадрат с числом степеней свободы 3 и находим его характеристики среднее дисперсию, асимметрию и эксцесс:

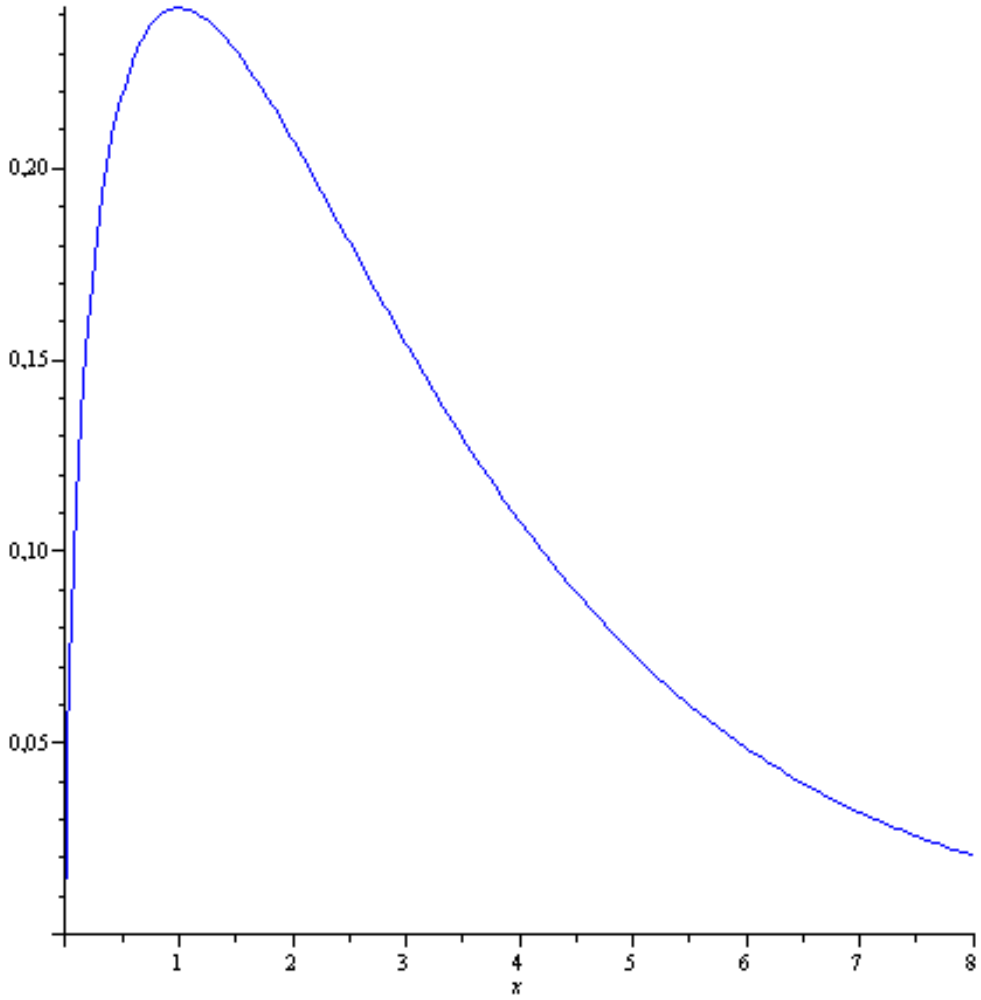
```
>restart;
>with(stats):with(plots):
>nu:=3;
```

$$\nu := 3$$

```
>p:=statevalf[pdf,chisquare[nu]](x);
```

$$p := statevalf_{pdf,\ chisquare_3}(x)$$

```
>plot([p],x=0..8,color=blue);
```




```
>ex:=evalf(int(p*x,x=0..infinity));
```

$$ex := 3.000000000$$

>dx:=int(p*(x-ex)^2,x=0..infinity);

$$dx := \int_0^{\infty} statevalf_{pdf,\, chisquare_3}(x)\,(x - 3.000000000)^2\, dx$$

>ddx:=evalf(%);

$$ddx := 6.000000000$$

>sx:=sqrt(ddx);

$$sx := 2.44948974$$

>as:=int(p*(x-ex)^3,x=0..infinity)/sx^3;

$$as := 0.06804138173\left(\int_0^{\infty} statevalf_{pdf,\, chisquare_3}(x)\,(x - 3.000000000)^3\, dx\right)$$

>evalf(%);

$$1.63299316$$

>ku:=int(p*(x-ex)^4,x=0..infinity)/ddx^2;

$$ku := 0.02777777778\left(\int_0^{\infty} statevalf_{pdf,\, chisquare_3}(x)\,(x - 3.000000000)^4\, dx\right)$$

>evalf(%);

$$7.00000000$$

2.4.4 Распределение Стьюдента

Пусть Z – нормальная случайная величина с параметрами a =0 и σ=1, а Y – независимая от Z величина, распределенная по закону χ^2 с n степенями свободы. Тогда случайная величина, распределенная по закону

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}},$$

Называется распределением Стьюдента с n степенями свободы. Плотность этого распределения дается формулой

$$p_i(t)$$

С возрастанием n распределение Стьюдента быстро приближается к нормальному.

В Maple данное распределение имеет команды

StudentT(nu) или **StudentTDistribution(nu)**

расписывается с помощью функции

> f(t) = GAMMA(1/2*nu+1/2)/(Pi*nu)^(1/2)/GAMMA(1/2*nu)/((1+t^2/nu)^(1/2*nu+1/2));

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right)\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}}}$$

> with(Statistics):

> X := RandomVariable(StudentT(nu)):

> PDF(X, u);

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\,\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\,\nu}\;\Gamma\left(\frac{1}{2}\,\nu\right)\left(1+\frac{u^2}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}\,\nu+\frac{1}{2}}}$$

> PDF(X, .5);

$$\frac{0.5641895835\,\Gamma(0.5000000000\,\nu+0.5000000000)}{\sqrt{\nu}\;\Gamma(0.5000000000\,\nu)\left(1.+\frac{0.25}{\nu}\right)^{0.5000000000\,\nu+0.5000000000}}$$

> Mean(X);

$$\begin{cases} \mathit{undefined} & \nu \le 1 \\ 0 & \mathit{otherwise} \end{cases}$$

> Variance(X);

$$\begin{cases} \mathit{undefined} & \nu \le 2 \\ \frac{\nu}{-2+\nu} & \mathit{otherwise} \end{cases}$$

ГЛАВА 3. Решение некоторых задач с помощью пакета Maple на примере элементов теории массового обслуживания

Теория вероятностей является теоретической основой многих научных дисциплин. Одной из таких ярких представителей является теория массового обслуживания. Теория массового обслуживания – это математический аппарат для изучения закономерностей функционирования систем, удовлетворяющих массовый спрос. Методы теории массового обслуживания находят широкое применение на транспорте (расчет рациональной организации подачи вагонов, выбора числа кассовых аппаратов и турникетов на вокзалах и станциях метрополитена и т.д.), в телефонных и сотовых компаниях и других областях человеческой деятельности, где в процессе функционирования различных систем образуются потоки, каналы обслуживания, очереди.

3.1 Основные понятия теории массового обслуживания

Приведем основные понятия, используемые в теории массового обслуживания:

Заявка – спрос на удовлетворение некоторой потребности;

Обслуживание заявки – удовлетворение спроса;

Система массового обслуживания (СМО) – система, предназначенная для обслуживание заявок;

Канал обслуживания – устройство для обслуживания заявки;

Событие – поступление заявки в СМО;

Интенсивность потока заявок – среднее число заявок, поступающих в единицу времени (обозначается λ);

Пуассоновский поток – простейший поток, вероятность поступления в СМО заявок которого имеет пуассоновское распределение.

3.2 Показатели эффективности СМО

Средние характеристики системы называются *показателями эффективности СМО*. Будем рассматривать следующие показатели эффективности:

A – абсолютная пропускная способность СМО (среднее число заявок, обслуживаемое СМО в единицу времени);

Q – относительная пропускная способность СМО (вероятность обслуживания поступившей заявки);

$P_{отк}$ - вероятность отказа;

$\overline{z}$ - среднее число заявок в СМО;

$\overline{r}$ - среднее число заявок в очереди;

$\overline{t}_{сист}$ - среднее время пребывания заявки в СМО;

$\overline{t}_{оч}$ - среднее время пребывания заявки в очереди;

$\overline{k}$ - среднее число занятых каналов;

ρ - коэффициент загрузки СМО.

Справедливы следующие соотношения:

$$Q = \frac{A}{\lambda}; \qquad \overline{t} = \frac{\overline{z}}{\lambda}; \quad P_{отк} = 1 - Q; \qquad \overline{t}_{оч} = \frac{\overline{r}}{\lambda}; \qquad \overline{k} = \frac{A}{\mu}; \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

где λ - интенсивность потока заявок,

μ - интенсивность потока обслуживание.

3.3 Многоканальная СМО с отказами (задача Эрланга)

Пусть СМО содержит k каналов, входящий поток заявок имеет интенсивность λ, поток обслуживание заявки одним каналом имеет интенсивность μ.

Справедливы формулы Эрланга:

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!}\right]^{-1};$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0; \qquad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0; \quad \ldots \quad p_i = \frac{\rho^i}{i!} p_0; \qquad \ldots \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_k.$$

С помощью формул Эрланга вычисляются по следующим формулам показатели эффективности СМО:

$$A = \lambda(1 - p_k); \qquad Q = \frac{A}{\lambda} = 1 - p_k; \qquad P_{отк} = p_k;$$

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho(1 - p_k),$$

где p_i - вероятность поступления в СМО i заявок.

3.4 Решение задачи многоканальной СМО с отказами в пакете Maple

Рассмотрим следующую задачу:

Диспетчерская служба имеет 5 линий связи. Поток вызовов простейший с интенсивностью λ=0,8 вызовов в минуту. Среднее время переговоров с диспетчером составляет 3 минуты. Время переговоров распределено по показательному закону. Найти абсолютную и относительные пропускные способности диспетчерской службы; вероятность отказа; среднее число занятых каналов. Определить, сколько линий связи должно иметь диспетчерская служба, чтобы вероятность отказа не превышала 0,01?

Решение:

> n := 5

$$n := 5$$

> lambda := .8;

$$\lambda := 0.8$$

> t := 3;

$$t := 3$$

> k := 0.1e-1;

$$k := 0.01$$

Найдем интенсивность потока обслуживания

> mu := 1/t;

$$\mu := \frac{1}{3}$$

Коэффициент загрузки СМО равен

> rho := lambda/mu;

$$\rho := 2.4$$

> rho[0] := 1/(sum(rho^i/factorial(i), i = 0 .. 5));

$$\rho_0 := 0.0940738020$$

> rho[5] := 2.4^5*rho[0]/factorial(5);

$$\rho_5 := 0.0624228594$$

> A := lambda*(1-rho[5]);

$$A := 0.750061712$$

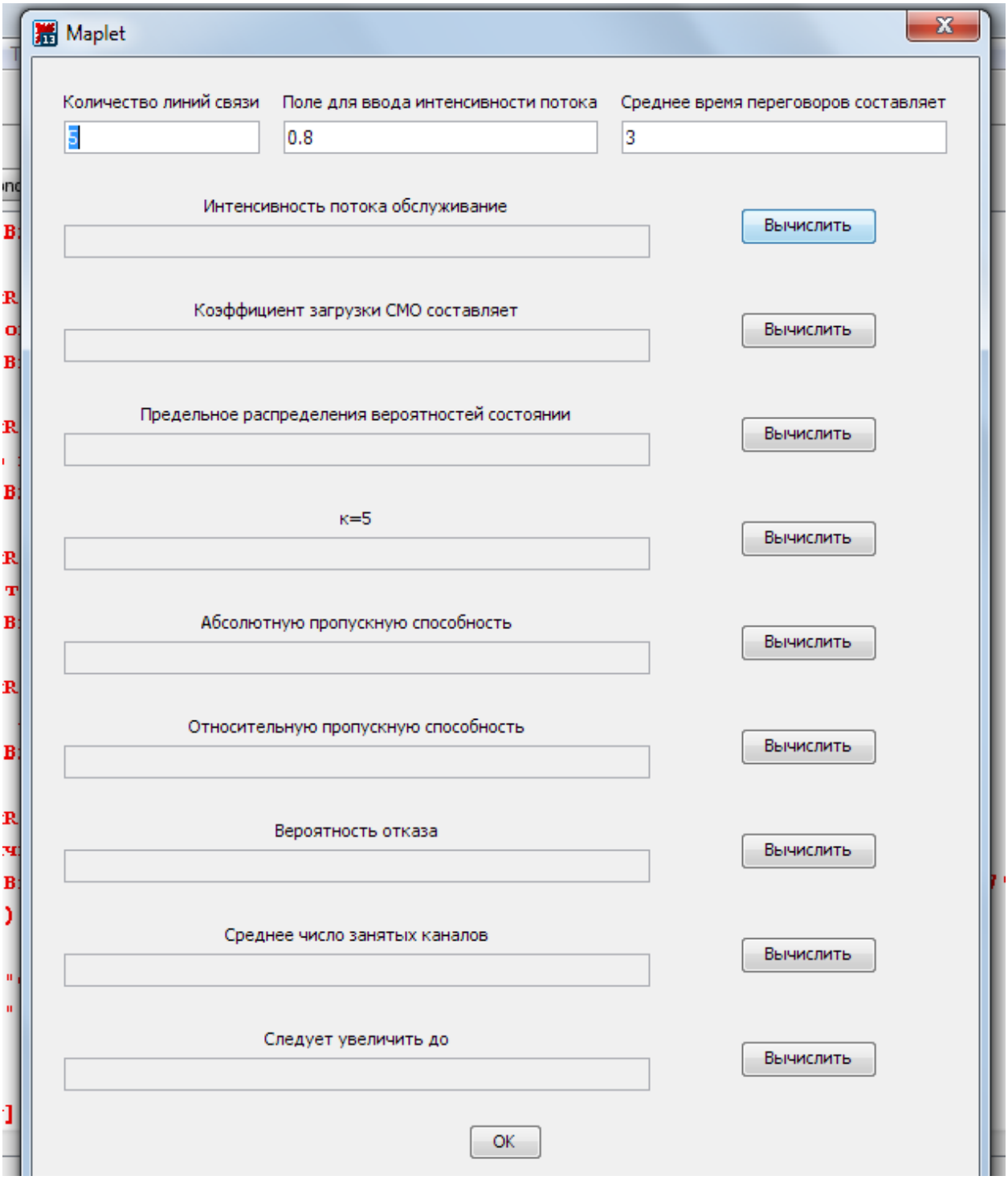
> Q := A/lambda;

$$Q := 0.937577140$$

> l := A/mu;

$$l := 2.25018513$$

Для данной задачи с помощью Maplets составлена программа для решения этой и подобных ей задач Эрланга с многоканальными СМО для различных входных данных. Программа представлена в **приложении 2.** В результате на выходе получается следующее окно для задания различных входных данных и получаемых в результате решения показателей эффективности систем массового обслуживания.


Maplet
Количество линий связи
5
Поле для ввода интенсивности потока
0.8
Среднее время переговоров составляет
3
Интенсивность потока обслуживание
Вычислить
Коэффициент загрузки СМО составляет
Вычислить
Предельное распределения вероятностей состоянии
Вычислить
к=5
Вычислить
Абсолютную пропускную способность
Вычислить
Относительную пропускную способность
Вычислить
Вероятность отказа
Вычислить
Среднее число занятых каналов
Вычислить
Следует увеличить до
Вычислить
OK

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе по теме «Решение задач теории вероятностей в пакете Maple»:

- Составлено описание команд пакета Maple относящихся к теории вероятностей и её приложениям;
- Изучены основные разделы теории вероятностей и рассмотрены типичные задачи теории вероятностей и их решения в пакете Maple;
- С помощью пакета Maplets создана программа для решения задачи Эрланга с различными входными данными из теории массового обслуживания.

Список литературы

1. Игнатьев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. – Казань: Казанский университет, 2014. – 298с.

2. Дьяконов В. П. Maple 9 в математике, физике и образовании. М.: СОЛОН-Пресс, 2004.

3. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. Пособие для студентов втузов. Изд. 4-е, М.: ВШ, 1998. 400 с: ил.

4. Калихман И. Л. Сборник задач по математическому программированию. Изд. 2-е, доп. и перераб. М., «Высшая школа», 1975.

5. Васильев А. Н. Maple 8. Самоучитель. М.: Издательский дом «Вильямс», 2003.

6. Сдвижков О. А. Математика на компьютере: Maple 8. М.: СОЛОН-Пресс, 2003.

7. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. Учебник для вузов. СПб.: Питер, 2004.

8. Дьяконов В.П. Maple 7: учебный курс. — СПб: Питер, 2002. 672 с, ил.

Приложение 1

Обзор пакета *combinat*

Для запроса функции следует использовать команду:

combinat[command](arguments) или, если заранее подключен данный пакет

command(arguments)

Описание:

пакет combinat содержит комбинаторные функции, такие как перестановки, комбинации и разделение.

К каждой команде пакета combinat доступ можно получить или при помощи полной формы или при помощи краткой формы названия команды в последовательности запроса команды.

Список команд:

bell	binomial	cartprod	character
Chi	choose	composition	conjpart
decodepart	encodepart	eulerian1	eulerian2
fibonacci	firstpart	graycode	inttovec
lastpart	multinomial	nextpart	numbcomb
numbcomp	numbpart	numbperm	partition
permute	powerset	prevpart	randcomb
randpart	randperm	setpartition	stirling1
stirling2	subsets	vectoint	

<u>1)Bell</u> – вычисление чисел Белла

Запрос происходит по команде:

combinat[bell(n)]; где n – количество элементов

Для нахождения *n* – го числа решается уравнение:

$$e^{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{bell(n)x^n}{n!},$$

причем для вычислений используется рекуррентное соотношение:

$$bell(n+1)=\left(bell(n)+1\right)^n$$

Примеры вычисления:

>with(combinat, bell);

$$[bell]$$

>bell(1);

$$1$$

>bell(4);

15

bell(-1);

1

bell(n);

$combinat{:}\text{-}bell(n)$

<u>2). binomial(n, r)</u> —вычисление биномиальных коэффициентов

запрос команды: **combinat[binomial(n, r)];**

где n и r – номер и аргумент

если n и r — целые числа и удовлетворяют условию $0 \le r \le n$, то

$$binomial(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

В общем случае

$$binomial(n,r) = \lim_{t\to\infty} \frac{\Gamma(n+t+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+t-r+1)}$$

Примеры:

binomial(4, 2);

$$6$$

binomial(2, 1/2);

$$\frac{16}{3\pi}$$

binomial(2.1, 2+3*I);

$$-56.56167619 - 98.27156511\mathrm{I}$$

binomial(n, 2);

$$\mathrm{binomial}(n, 2)$$

expand();

$$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

3).Cartprod – повторение из списка списков или наборов.

Задается в таком виде **cartprod(LL)**

Команда cartprod является специальной функцией повторения. Это позволяет повторять списка по спискам или наборов свойств, как иллюстрировано в

примере ниже. Данная команда возвращает таблицу с двумя законченными записями и nextvalue.

```
> with(combinat, cartprod);
```

$$[cartprod]$$

```
> T:=cartprod([[1,2,3], {a,b}]):
> while not T[finished] do T[nextvalue]() end do;
```

$$[1, a]$$

$$[1, b]$$

$$[2, a]$$

$$[2, b]$$

$$[3, a]$$

$$[3, b]$$

4). Choose - построение списка комбинаций.

Задается в виде **choose(n)** или **choose(n, m).**

```
> with(combinat):
> choose(3, 2);
```

$$[[1, 2], [1, 3], [2, 3]]$$

```
> choose([a, a, b]);
```

$$[[\ ], [a], [b], [a, b], [a, a], [a, a, b]]$$

```
> choose({a, b, c});
```

$$\{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

```
> choose([a, b, b, c], 2);
```

$$[[a, b], [a, c], [b, b], [b, c]]$$

5). composition(n, k) — выдает списки композиций целых чисел n и k, больших или равных нулю;

```
> with(combinat):
```

> composition(5, 2);

$$\{[1, 4], [2, 3], [3, 2], [4, 1]\}$$

> composition(3, 3);

$$\{[1, 1, 1]\}$$

> composition(4, 3);

$$\{[1, 1, 2], [1, 2, 1], [2, 1, 1]\}$$

6). fibonacci(n) — выдает числа Фибоначчи

> with(combinat, fibonacci):

> fibonacci(5);

$$5$$

> seq(fibonacci(i), i=0..10);

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$$

> seq(fibonacci(i), i=-10..0);

$$-55, 34, -21, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0$$

> seq(fibonacci(i, x), i=1..5);

$$1, x, x^2 + 1, x^3 + 2\,x, x^4 + 3\,x^2 + 1$$

> fibonacci(n);

$$combinat{:}\text{-}fibonacci\,(n)$$

7). firstpart(n) — выдает первый элемент последовательности ряда;

nextpart(l) — выдает следующий элемент последовательности ряда;

lastpart(n) — выдает последний элемент канонической последовательности ряда;

prevpart(1) — выдает предыдущий элемент последовательности ряда;

conjpart(l) — выдает вместе объединенные элементы последовательности ряда;

> with(combinat):

> partition(3);

$$[[1, 1, 1], [1, 2], [3]]$$

> firstpart(3);

$$[1, 1, 1]$$

> nextpart();

$$[1, 2]$$

> nextpart();

$$[3]$$

> prevpart();

$$[1, 2]$$

> lastpart(3);

$$[3]$$

8). graycode(n) — выдает множество кодов Грея для чисел Габита.

> with(combinat, graycode);

$$[graycode]$$

> graycode(0);

$$[0]$$

> graycode(1);

$$[0, 1]$$

> g := graycode(3);

$$g := [0, 1, 3, 2, 6, 7, 5, 4]$$

9). numbcomb(n) и numbcomb(n. m) — выдает число комбинаций;

> with(combinat):

> numbcomb(3, 2);

$$3$$

> numbcomb([a, a, b]);

$$6$$

> numbcomb({a, b, c});

$$8$$

> numbcomb([a, b, b, c], 2);

$$4$$

10). numbpart(n) — выдает список всех возможных сумм;

> with(combinat):

> numbpart(5);

$$7$$

> partition(5);

$$[[1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 2], [1, 2, 2], [1, 1, 3], [2, 3], [1, 4], [5]]$$

> numbpart(6, 3);

$$7$$

> partition(6, 3); >

$$[[1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 2], [1, 1, 2, 2], [2, 2, 2], [1, 1, 1, 3], [1, 2, 3], [3, 3]]$$

11). powerset(s) — выражает степень множества в множестве s;

> with(combinat, powerset);

$$[powerset]$$

> powerset(3);

$$\{\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

> powerset({a, b});

$$\{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

> powerset([a, a, b]);

$$[[\ ], [a], [b], [a, b], [a, a], [a, a, b]]$$

12). randcomb(n, m) — строит случайную комбинацию;

> with(combinat, randcomb);

$$[randcomb]$$

> randcomb(5, 3);

$$\{1, 3, 4\}$$

> randcomb([a, b, c, d], 2);

$$[a, d]$$

> randcomb({W, X, Y, Z}, 1);

$$\{X\}$$

13). stirling(n) — находит числа Стирлинга второго рода;

> stirling1(n,m) = Sum((-1)^k * binomial(n-1+k,n-m+k) * binomial(2*n-m,n-m-k) * stirling2(n-m+k,k), k = 0 .. n-m);

$$\mathrm{stirling1}(n, m) = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \,\mathrm{binomial}(n-1+k, n-m+k)\,\mathrm{binomial}(2n-m, n-m-k)\,\mathrm{stirling2}(n-m+k, k)$$

> stirling2(n,m);

$$\mathrm{stirling2}(n, m)$$

> = convert(,Sum);

$$\mathrm{stirling2}(n, m) = \sum_{\_k1=0}^{m} \frac{\mathrm{binomial}(m, \_k1)\,\_k1^{\,n}}{m!\,(-1)^{-m+\_k1}}$$

Приложение 2

```
> restart;
f := proc(x,y)
  1/(sum(x^i/factorial(i), i = 0 .. y)):evalf(%)
end proc:
g := proc(n,k,m,d)
    while n > 0.01 do k=k+1,n=m^k/k!*(d+m^k/k!) end do
end proc:
> with(Maplets[Elements]):
> Maplet := Maplet([
             BoxRow('halign'='none',
["Количество линий связи",TextField['TF5']("5",5)],
["Поле для ввода интенсивности
потока",TextField['TF1']("0.8",5)],
["Среднее время переговоров
составляет",TextField['TF2']("3",5)]
),
            BoxRow('halign'='none',
["Интенсивность потока
обслуживание",TextField['TF3']("", editable=false,35)],
[Button['B1']("Вычислить",Evaluate('TF3'= '1/TF2'))]
),
            BoxRow('halign'='none',
["Коэффициент загрузки СМО
составляет",TextField['TF4']("", editable=false,35)],
[Button['B2']("Вычислить",Evaluate('TF4'='TF1/TF3'))]
),
            BoxRow('halign'='none',
["Предельное распределения вероятностей
состоянии",TextField['TF6']("",editable=false,35)],
```

```
[Button['B3']("Вычислить",Evaluate(x=['TF4'],y=['TF5'],
'target' = 'TF6', 'function' = "f",
Argument('TF4'),Argument('TF5')))]
),
            BoxRow('halign'='none',
["к=5",TextField['TF7']("",editable=false,35)],
[Button['B4']("Вычислить",Evaluate('TF7'=
'TF4^TF5/TF5!*TF6'))]
),
            BoxRow('halign'='none',
["Абсолютную пропускную
способность",TextField['TF8']("",editable=false,35)],
[Button['B5']("Вычислить",Evaluate('TF8'= 'TF1*(1-
TF7)'))]
),
            BoxRow('halign'='none',
["Относительную пропускную
способность",TextField['TF9']("", editable=false,35)],
[Button['B6']("Вычислить",Evaluate('TF9'= 'TF8/TF1'))]
),
            BoxRow('halign'='none',
["Вероятность отказа",TextField['TF10']("",
editable=false,35)],
[Button['B7']("Вычислить",Evaluate('TF10'= 'TF7'))]
),
            BoxRow('halign'='none',
["Среднее число занятых каналов",TextField['TF11']("",
editable=false,35)],
[Button['B8']("Вычислить",Evaluate('TF11'= 'TF8/TF3'))]
),
```

```
            BoxRow('halign'='none',
["Следует увеличить до",TextField['TF12']("",
editable=false,35)],
[Button['B9']("Вычислить",Evaluate('target' = 'TF12',
'function' = "g",
Argument('TF7'),Argument('TF5'),Argument('TF4'),Argumen
t('TF6')))]
),
[Button['B10']("OK", Shutdown(['TF2']))],
Button("Закрыть", Shutdown())

]):
> Maplets[Display](Maplet);
>
>
>
```