ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 1 (536)

УДК 517.518

В.Ф. ЧИСТЯКОВ, Е.В. ЧИСТЯКОВА

О НЕЛОКАЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ У ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ИНДЕКСА 1

Рассматривается начальная задача

$$A(t)\dot{x} + B(x,t) = 0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где $A(t)$ — $n \times n$-матрица, $B(x,t)$ — n-мерная вектор-функция, $x \equiv x(t)$ — искомая вектор-функция, $(x(t),t) \in U = R^n \times T$, x_0 — заданный вектор из R^n, $\dot{} \equiv d/dt$. При этом предполагается, что

$$\det A(t) = 0 \ \ \forall t \in T \tag{3}$$

и, кроме того, входные данные обладают необходимой гладкостью: $A(t) \in C^1(T)$, $B(x,t) \in C^2(U)$.

Системы вида (1), удовлетворяющие условию (3), называются дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ) [1] и встречаются во многих областях приложений, например, при анализе электронных схем электрических сетей и механических конструкций [1]–[4]. В настоящее время доказан ряд теорем существования решений задач вида (1), (2), но все они в случае нелинейной вектор-функции $B(x,t)$ являются локальными ([2], с. 160; [3], с. 36), в то время как существует довольно обширный класс задач, для которых необходимы нелокальные утверждения. В частности, для систем $A(t)\dot{x} + B(x,t,u) = 0$, где $u \equiv u(t)$ — управление, при постановке задач об управляемости и наблюдаемости необходимо предположение о продолжимости решений на весь отрезок T. Кроме того, нелокальные теоремы важны и при численном решении ДАУ, поскольку дают уверенность в отсутствии на отрезке определения системы особых точек. Например, в [4] рассматривается начальная задача, имеющая известное решение $\forall t \in (-\infty, +\infty)$, однако в точках $\sqrt{\pi k}$, $k = 1, 2, \ldots$, от данного решения ответвляются неизвестные решения и при численных расчетах имеет место авост, если отрезок T содержит точки $\sqrt{\pi k}$.

Для систем в нормальной форме (в формуле (1) $A(t) = E_n$) нелокальные теоремы существования базируются либо на предположении о глобальной липшицевости вектор-функции $B(x,t)$ ([5], с. 392), либо на некоторых разделах теории устойчивости, включая теорему Ла-Салля ([6], с. 276). Здесь и ниже E_* — единичная матрица размерности, равной индексу. Имеются и более сложные методы, основанные на исследовании спектра оператора матрицы Якоби от вектор-функции $B(x,t)$ ([5], теорема Певзнера). В данной работе использованы аналоги первых двух подходов.

Определение 1. Дифференциальный оператор $\Lambda_l = \sum\limits_{j=0}^{l} W_j(t,Z)(d/dt)^j$, где $Z = (x, \dot{x}, ..., x^{(l+1)})$, $W_j(t,Z)$ — гладкие $n \times n$-матрицы, называется левым регуляризирующим оператором (ЛРО) для системы (1), если

$$\Lambda_l \circ [A(t)\dot{x} + B(x,t)] = \mathcal{A}(x,t)\dot{x} + \mathcal{B}(x,t) \ \ \forall x \in C^{l+1}(T), \quad (x(t),t) \in U,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 04-01-00857).

и $\det \mathcal{A}(x_0, t_0) \neq 0$. Минимально возможное число l называется индексом системы.

Определение 2 ([1], с. 31). Полуобратной матрицей к $m \times n$-матрице A называется $n \times m$-матрица A^-, удовлетворяющая матричному уравнению $AA^-A = A$.

Определение 3 ([1], с. 52). Ненулевой многочлен $\det(\lambda G + H)$, где λ — скалярный параметр (в общем случае комплексный), удовлетворяет критерию "ранг-степень", если $\operatorname{rank} G = \deg \det(\lambda G + H)$, где deg — символ степени многочлена.

Лемма 1 ([2], с. 52). *Многочлен* $\Theta(\lambda) = \det(\lambda \operatorname{diag}\{E_r, 0\} + \|b_{ij}\|_{i,j=1}^2)$ *удовлетворяет критерию "ранг-степень" тогда и только тогда, когда* $\det b_{22} \neq 0$. *Более того, корни* $\Theta(\lambda)$ *совпадают с корнями многочлена* $\Theta_1(\lambda) = \det[\lambda E_r + (b_{11} - b_{12} b_{22}^{-1} b_{21})]$ *и* $\Theta(\lambda) = \Theta_1(\lambda) \det b_{22}$.

Замечание 1. Если многочлен $\det(\lambda G + H)$ ненулевой, то найдутся неособенные постоянные матрицы P, Q: $P(\lambda G + H)Q = \lambda \operatorname{diag}\{E_d, N\} + \operatorname{diag}\{J, E_{n-d}\}$, где $N^k = 0$, $k \leq n - d$, J — некоторый блок подходящей размерности [1]. Отсюда вытекает, что $d = \deg \det(\lambda G + H) \leq \operatorname{rank} G$ и критерий "ранг-степень" имеет место тогда и только тогда, когда $N = 0$.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *выполнены условия*

1) $\operatorname{rank}\{A(t_0)|b\} = r$, *где* $r = \max \operatorname{rank}\{A(t),\ t \in T\}$, $b = B(x_0, t_0)$;
2) *многочлен* $\det[\lambda A(t) + B_x(x,t)]$ *имеет вид* $a_r(x,t)\lambda^r + \cdots$, *причем* $|a_r(x,t)| \geq \varkappa \quad \forall (x,t) \in U$;
3) $\|B_x(x,t)\| \leq L \quad \forall (x,t) \in U$, $\|B_t(x_1,t) - B_t(x_2,t)\| \leq L_1 \|x_1 - x_2\| \quad \forall (x,t) \in U$, *где* $B_x(x,t) = \partial B(x,t)/\partial x$, $B_t(x,t) = \partial B(x,t)/\partial t$, $\varkappa$, L, L_1 — *положительные константы.*

Тогда на T *определено единственное решение задачи* (1), (2). *Более того, на* T *определен ЛРО* (*в частности, можно принять* $\Lambda_1 = E_n + S(t)(d/dt)$, $S(t) = E_n - A(t)A^-(t)$).

Доказательство. Согласно замечанию 1 и условию 2) теоремы $\operatorname{rank} A = r \quad \forall t \in T$. Здесь и ниже в текстах утверждений для упрощения записи указание зависимости от t может опускаться, если это не вызывает путаницы. Рассмотрим представление $A = P \operatorname{diag}\{E_r, 0\} Q$, где $P \equiv P(t)$, $Q \equiv Q(t) \in C^2(T)$, $\det P \neq 0$, $\det Q \neq 0 \quad \forall t \in T$, из которого вытекает существование полуобратной матрицы $A^- \in C^2(T)$ [2]. В частности, можно принять $A^- = Q^{-1} \operatorname{diag}\{E_r, 0\} P^{-1}$. Подействуем на систему (1) оператором $E_n + S(d/dt)$. Получим

$$\mathcal{A}(x,t)\dot{x} + \mathcal{B}(x,t) = P \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ \gamma_{21} + \beta_{21}(x,t) & \beta_{22}(x,t) \end{pmatrix} Q\dot{x} + \mathcal{B}(x,t) = 0, \tag{4}$$

$\mathcal{A}(x,t) = A + S[\dot{A} + B_x]$, $\mathcal{B}(x,t) = B(x,t) + SB_t(x,t)$, $B_x = B_x(x,t)$, $\|\beta_{ij}\|_{i,j=1}^2 = P^{-1} B_x Q^{-1}$, $\|\gamma_{ij}\|_{i,j=1}^2 = P^{-1} \dot{A} Q^{-1}$. В формуле (4) учтено, что справедливы представления

$$\begin{gathered} \|\gamma_{ij}\|_{i,j=1}^2 = d[P^{-1}AQ^{-1}]/dt - \dot{P}^{-1}AQ^{-1} - P^{-1}A\dot{Q}^{-1}, \\ P^{-1}[E - AQ^{-1}QA^-]P = \operatorname{diag}\{0, E_{n-r}\}, \end{gathered} \tag{5}$$

где блок $\gamma_{22} \equiv 0$. Рассмотрим выражение

$$\lambda A + B_x = \lambda P \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q + PP^{-1}B_x Q^{-1} Q = P \begin{pmatrix} \lambda E_r + \beta_{11}(x,t) & \beta_{12}(x,t) \\ \beta_{21}(x,t) & \beta_{22}(x,t) \end{pmatrix} Q. \tag{6}$$

Согласно условию 2) теоремы пучок $\lambda \operatorname{diag}\{E_r, 0\} + \|\beta_{ij}\|_{i,j=1}^2$ удовлетворяет критерию "ранг-степень" для любых $(x,t) \in U$. Из леммы 1 следует $\det \beta_{22}(x,t) \neq 0 \quad \forall (x,t) \in U$. Сравнивая формулы (4), (6), получаем $\det \mathcal{A}(x,t) = a_r(x,t) = \det \beta_{22}(x,t) \det(PQ)$ и, согласно условиям 2), 3) теоремы справедлива оценка

$$\|\mathcal{A}^{-1}(x,t)\| \leq \|P^{-1}\| \, \|Q^{-1}\| (L^{n-r}/\varkappa + 1). \tag{7}$$

По условию 3) теоремы и теореме о среднем [7] имеем $\|B(x_1,t) - B(x_2,t)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$ $\forall (x,t) \in U$. Условие 3) и последнее равенство позволяют записать

$$\|B(x,t)\| \leq L_0 + L\|x\|, \quad \|B_t(x,t)\| \leq L_2 + L_1\|x\|. \tag{8}$$

Действительно, $\|B(x,t)-B(0,t)\| \le \|B(0,t)\| + L\|x\|$, $\|B_t(x,t)-B_t(0,t)\| \le \|B_t(0,t)\| + L\|x\|$, откуда $L_0 = \max\{\|B(0,t)\|,\ t\in T\}$, $L_1 = \max\{\|B_t(0,t)\|,\ t\in T\}$. Из условия теоремы 3) и оценок (7), (8) для системы

$$\dot x = F(x,t) = -\mathcal{A}^{-1}(x,t)\mathcal{B}(x,t)$$

следуют оценки

$$\|F(x_1,t)-F(x_2,t)\| \le M\|x_1-x_2\|, \quad \|F(x,t)\| \le M_0 + M\|x\| \ \ \forall (x,t)\in U, \tag{9}$$

где M, M_0 — некоторые константы. Применение принципа сжатых отображений позволяет доказать, что начальная задача $\dot x = F(x,t)$, $x(t_0)=x_0$ при выполнении оценок (9) имеет единственное решение $x_*(t)$ на отрезке T ([5], с. 79). $\square$

Любое решение системы (1) является решением системы (4). Докажем, что при выполнении условия 1) теоремы $x_*(t)$ совпадает с решением задачи (1), (2). Допустим, невязка $\delta(t) = A(t)\dot x_* + B(x_*,t) \not\equiv 0$, $t\in T$. Далее, $\Lambda_1\delta(t) = [\dot x_* - F(x_*,t)] = 0$ и по условию 1) $\delta(t_0)=0$. Используя представление (5), легко доказать, что задача $\Lambda_1\delta(t)=0$, $\delta(t_0)=0$ имеет только нулевое решение ([6]).

Замечание 2. Для локального существования достаточно выполнение лишь условия 1) теоремы и равенства $\deg\det[\lambda A(t_0) + B_x(x_0,t_0)] = r$ ([2], с. 160).

Замечание 3. Оператор $\Lambda_1 = E_n + S(t)(d/dt)$ введен в работах М.В. Булатова.

Теорема 2. *Пусть для системы* (1) *выполнены условия* 1) $\operatorname{rank}\{A(t_0)|b\} = r$, *где* $r = \max\operatorname{rank}\{A(t),\ t\in T\}$, $b = B(x_0,t_0)$; 2) *многочлен* $\deg\det[\lambda A(t) + B_x(x,t)] = r \quad \forall (x,t)\in U$, $\|B(x_1,t)-B(x_2,t)\| \le L\|x_1-x_2\| \quad \forall (x,t)\in U$, L *— положительная константа. Тогда на* T *определено единственное решение задачи* (1), (2). *Более того, на* T *определен ЛРО (в частности, можно принять* $\Lambda_1 = E_n + S(t)(d/dt)$*).*

Условие $\|B_x(x,t)\| \le L$ является очень жестким. Для случая автономных систем его можно иногда обойти.

Лемма 2. *Пусть* 1) *система* (1) *является автономной* $A(t)\equiv A$, $B(x,t) = B(x)$; 2) $B(x)\in C^2(U)$, $U = \{x : \|a-x\| \le \rho\}$, *где вектор* $a\in R^n$ *удовлетворяет системе* $B(a)=0$; 3) *многочлен* $\det[\lambda A + B_x(a)]$ *удовлетворяет критерию "ранг-степень". Тогда первые* r *корней характеристического многочлена* $\det[\lambda E_n - \partial F(a)/\partial x]$ *равны корням многочлена* $\det[\lambda A + B_x(a)]$, *а остальные* $n-r$ *корней равны* -1, *где* $F(x) = [A + SB_x(x)]^{-1}B(x)$, $S = E_n - AA^-$.

Доказательство. Умножим систему (4) на матрицу P^{-1} и произведем замену $x = Q^{-1}y$, где $A = P\operatorname{diag}\{E_r, 0\}Q$, учитывая тот факт, что имеем дело с автономной системой. Получим

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ \beta_{21}(y) & \beta_{22}(y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot y_1\\ \dot y_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1(y)\\ B_2(y)\end{pmatrix} = 0, \quad y = \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B_1(y)\\ B_2(y)\end{pmatrix} = PB(Q^{-1}y), \tag{10}$$

где $\beta_{ij}(y) = \partial B_i(y)/\partial y_j$, $i,j = 1,2$. Производя те же действия с исходной системой, согласно лемме 1 получим

$$\det[\lambda A + B_x(a)] = \det(PQ)\det[\lambda E_r + b_{11} - b_{12}b_{22}^{-1}b_{21}], \tag{11}$$

где $b_{ij} = \beta_{ij}(Qa)$. Здесь $\det b_{22} \ne 0$ в силу условия 3) и леммы 1. Вводя в системе (10) замену переменной $y = \left(\begin{smallmatrix} E_r & 0\\ -b_{22}^{-1}b_{21} & b_{22}^{-1}\end{smallmatrix}\right) z = Wz$, и обращая матрицу при производной, получим

$$\dot z = -W^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0\\ \beta_{21}(Wz) & \beta_{22}(Wz)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} B_1(Wz)\\ B_2(Wz)\end{pmatrix} = F(z).$$

Вычислим матрицу Якоби $J(z) = \partial F(z)/\partial z$ на векторе $a : B(a)=0$

$$J(a) = -\begin{pmatrix} b_{11} - b_{12}b_{22}^{-1}b_{21} & b_{12}b_{22}^{-1}\\ 0 & E_{n-r}\end{pmatrix}.$$

Сравнивая с (11) ее характеристический полином

$$\det[\lambda E_n - J(a)] = \det(\lambda E_r + b_{11} - b_{12}b_{22}^{-1}b_{21})\det((\lambda+1)E_{n-r}),$$

убеждаемся в справедливости леммы. $\square$

Теорема 3. *Если выполнены условия леммы* 1, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|B(x_0))$, $\|a - x\| \le \rho_0$, *и все корни многочлена* $\det[\lambda A + B_x(a)]$ *имеют отрицательные вещественные части, то решение начальной задачи* (1), (2) *определено при достаточно малом* ρ_0 *на интервале* $[t_0, \infty)$ *и, более того,* $\|x(t) - a\| \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Доказательство следует из теоремы об исследовании на устойчивость в смысле Ляпунова по первому приближению ([5], с. 412) и леммы 2.

Приведем пример на применение теоремы 1:

$$\begin{pmatrix} 1 - \sin\phi(t) & \cos\phi(t) \\ \cos\phi(t) & 1 + \sin\phi(t) \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} (\mu + 3t)x_1 + \sin(t(x_1 - x_2)) \\ (\mu + 3t)x_2 + \cos(t(x_1 + x_2)) \end{pmatrix} = 0, \quad t \in T,$$
$$x(0) = x_0,$$

где $\phi(t)$ — некоторая гладкая функция, $\phi(0) = 0$. Очевидно, всегда можно подобрать начальное значение x_0 таким образом, что будет выполнено условие 1) теоремы 1 и, кроме того, при $\mu > 0$ старший коэффициент многочлена $\det[\lambda A(t) + B_x(x,t)]$ удовлетворяет условию 2) теоремы 1:

$$a_r(x,t) = 2\mu + t[6 + \cos(t(x_1 - x_2))\sin\phi(t) + \sin\phi(t)\sin(t(x_1 + x_2)) + \cos(t(x_1 - x_2)) -$$
$$- \sin(t(x_1 + x_2)) + \cos(t(x_1 - x_2))\cos\phi(t) + \cos\phi(t)\sin(t(x_1 + x_2))] \ge 2\mu.$$

Выполнение условия 3) также легко проверяемо, и, кроме того, ранг матрицы $A(t)$ постоянен, т. к. степень характеристического полинома не может быть больше ранга матрицы. Следовательно, рассматриваемое уравнение имеет решение, продолжимое на T.

Для систем индекса 1 можно также сформулировать и доказать аналог теоремы Хопфа о бифуркации цикла.

Теорема 4. *Пусть*

1) *в системе* $A\dot{x} + B(x,\nu) = 0$, *где* $\nu \in \mathcal{N} = (-\nu_0, \nu_0)$ — *числовой параметр, а — изолированная неподвижная точка системы* $B(a,\nu) = 0 \quad \forall\nu$;
2) *все частные производные по* x *и* ν *компонент вектор-функции* $B(x,\nu)$ *непрерывны до порядка* $L + 3$, *где* $L \ge 3$, *в окрестности точки* $(a, 0)$;
3) *многочлен* $\det[\lambda A + B_x(a,\nu)]$ *удовлетворяет критерию "ранг-степень" для любых* ν;
4) *все корни многочлена* $\det[\lambda A + B_x(a,\nu)]$ *имеют строго отрицательные вещественные части, кроме двух комплексно-сопряженных корней* $\lambda(\nu) = \alpha(\nu) + i\omega(\nu)$, $\overline{\lambda}(\nu) = \alpha(\nu) - i\omega(\nu)$, *при этом* $\omega(0) = \omega_0 > 0$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) \ne 0$.

Тогда рассматриваемая система имеет семейство периодических решений, вид и свойства которых описываются формулами из ([8], с. 20).

Доказательство. Подействуем на рассматриваемую систему оператором $E_n + Sd/dt$ и приведем ее к нормальному виду. Получим систему, в которой правая часть имеет вид

$$F(x,\nu) = [A + SB_x(x,\nu)]^{-1}B(x,\nu).$$

В силу леммы 2 выполняются условия теоремы II ([8], с. 20), из которой следует, что система $\dot{x} = F(x,\nu)$ имеет периодические решения в окрестности точки a.

Осталось доказать, что эти периодические решения являются и решениями исходной системы.

Умножением на матрицу P и заменой $x = Qy$ приведем рассматриваемую систему к виду

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{y} + \begin{pmatrix} B_1(y,\nu) \\ B_2(y,\nu) \end{pmatrix} = 0, \tag{12}$$

где $\binom{B_1(y,\nu)}{B_2(y,\nu)} = PB(Qy)$ и $y = \binom{y_1}{y_2}$. Из леммы 1 следует $\det \partial B_2(y,\nu)/\partial y_2|_{y=a} \neq 0$ и $B_2(a,\nu) = 0$, а значит, выполнены условия теоремы о неявной функции, и можно разрешить второе уравнение системы (12) относительно $y_2 = \phi(y_1,\nu)$, где $B_2(y_1,\phi(y_1,\nu)) = 0$, и в силу данного соотношения y_2 всегда будет периодична, если периодична y_1. Таким образом, получена система вида

$$\dot{y}_1 + \psi(y_1) = 0, \quad \text{где} \quad \psi(y_1) = B_1(y_1,\phi(y_1,\nu)).$$

По правилу дифференцирования неявной функции имеем

$$\frac{\partial \psi(y_1)}{\partial y_1} = \frac{\partial B_1(y,\nu)}{\partial y_1}|_{y=a} = b_{11} - b_{12}b_{22}^{-1}b_{21}.$$

В силу равенства (11) и условий 3), 4) теоремы собственные числа матрицы $\lambda E_r - (b_{11} - b_{12}b_{22}^{-1}b_{21})$ удовлетворяют условиям теоремы II ([8], с. 20). $\square$

Замечание 4. При невыполнении критерия "ранг-степень" характеристический многочлен в общем случае не дает информации о разрешимости системы. Также без этого предположения неверны теоремы 3 и 4.

В заключение статьи рассмотрим линейную систему с коэффициентами, зависящими от параметра

$$A(\nu)\dot{x} + B(\nu)x = f(t,\nu), \quad \nu \in \mathcal{N}, \quad t \in T, \tag{13}$$

где $A(\nu)$, $B(\nu)$ — $n \times n$-матрицы.

Лемма 3 ([2], с. 47). *Пусть матрицы $A(\nu)$ и $B(\nu)$ в системе (13) являются вещественно-аналитическими функциями параметра ν и старший коэффициент характеристического многочлена $\det(\lambda A(\nu) + B(\nu)) = a_d(\nu)\lambda^d + \cdots$ не имеет нулей на отрезке $\mathcal{N}$. Тогда существуют такие неособенные вещественно-аналитические матрицы $P(\nu)$ и $Q(\nu)$, что*

$$P(\nu)[\lambda A(\nu) + B(\nu)]Q(\nu) = \lambda \begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & N(\nu) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(\nu) & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix},$$

где $N(\nu)$ — верхнетреугольная матрица с m квадратными нулевыми блоками на диагонали, $N^m(\nu) \equiv 0$.

Следствием леммы 3 является то, что общее решение системы (13) имеет вид

$$x_\nu(t,c) = Q(\nu)\begin{pmatrix} e^{J(\nu)(t-t_0)} \\ 0 \end{pmatrix} c + Q(\nu)\begin{pmatrix} \int\limits_{t_0}^{t} e^{J(\nu)(t-s)} f_1(s,\nu)ds \\ \sum\limits_{l=0}^{m-1} \Omega^l f_2(t,\nu) \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $\binom{f_1(t,\nu)}{f_2(t,\nu)} = P(\nu)f(t,\nu)$, Ω — оператор, действующий по правилу $\Omega z = -N(\nu)\frac{dz}{dt}$, c — произвольный вектор из R^d. Доказательство можно произвести прямой подстановкой (14) в (13).

Из формулы (14) видно, что решение системы (13) при аналитической вектор-функции $f(t,\nu)$ и выполненных условиях леммы 3 аналитически зависит от параметра ν. Если же старший коэффициент многочлена $\det(\lambda A(\nu) + B(\nu))$ имеет нули на $\mathcal{N}$, то отсутствует даже непрерывная зависимость решений от ν, т. к. в формуле (14) размерность матрицы $J(\nu)$ зависит от ν.

Лемма 2 и теорема 4 не имеют места, если не выполняется критерий "ранг-степень", что эквивалентно принадлежности системы к системам индекса 1. Для линейных систем процесс понижения индекса можно продолжить. Если подействуем на систему (13) оператором вида $E_n + \frac{d}{dt}S(\nu)$, где $S(\nu) = E_n - A(\nu)A^-(\nu)$, то получим новую систему

$$A_1(\nu)\dot{x} + B_1(\nu)x = f_1(t,\nu), \tag{15}$$

у которой индекс на единицу меньше и характеристический полином $\det(\lambda A_1(\nu) + B_1(\nu))$ имеет степень, равную $d + n_m$, где n_m — размерность последнего квадратного блока на диагонали

матрицы $N(\nu)$. Кроме того, d корней нового характеристического многочлена совпадают с корнями характеристического многочлена исходной системы, а остальные корни равны -1. Над системой (15) можно произвести те же действия, что и над исходной. В результате получим оператор

$$\mathcal{L}_m := \prod_{l=0}^{m-1} \left[E_n + \frac{d}{dt}\right], \quad S_l(\nu) = E_n - A_l(\nu)A_l^-(\nu), \quad A_0(\nu) = A(\nu),$$

сводящий систему (13) к системе

$$\mathcal{L}_m[A(\nu)\dot{x} + B(\nu)x] = A_m(\nu)\dot{x} + B_m(\nu)x \ \ \forall x \in C^1(T),$$

где $\det A_m(\nu) \neq 0 \ \forall \nu \in \mathcal{N}$. Характеристический многочлен последней системы имеет d корней, совпадающих с корнями характеристического многочлена системы (13), а остальные корни равны -1. Доказательство этого факта опирается на результат из [9], где он доказан для $m = 0$. Если отказаться от аналитичности матриц $A(\nu)$, $B(\nu)$ по параметру ν, то описанный выше процесс не всегда осуществим, т. к. в гладком случае не всегда можно доопределить произведение $A(\nu)A^-(\nu)$ до гладкости исходной матрицы $A(\nu)$, если $\operatorname{rank} A(\nu) \neq \mathrm{const}$, $\nu \in \mathcal{N}$ ([2], с. 45).

Авторы выражают благодарность М.В. Булатову за полезные обсуждения и замечания, сделанные в процессе работы над статьей.

Литература

1. Бояринцев Ю.Е. *Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* – Новосибирск: Наука, 1980. – 222 с.
2. Чистяков В.Ф. *Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром.* – Новосибирск: Сиб. изд. фирма РАН “Наука”, 1996. – 279 с.
3. Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R. *Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations.* – SIAM. Philadelphia, 1996. – 256 p.
4. Куликов Г.Ю. *Численное решение задачи Коши для системы дифференциально-алгебраических уравнений с помощью неявных методов Рунге–Кутта с нетривиальным предиктором* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1998. – Т. 38. – № 1. – С. 68–84.
5. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1970. – 534 с.
6. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* – М.: Наука, 1967. – 472 с.
7. Шилов Г.Е. *Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных.* Ч. 1, 2. – М.: Наука, 1972. – 622 с.
8. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. *Теория и приложения бифуркации рождения цикла.* – М.: Мир, 1985. – 280 с.
9. Булатов М.В. *О преобразовании алгебро-дифференциальных систем уравнений* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1994. – Т. 34. – № 3. – С. 360–372.

Институт динамики систем
и теории управления
Сибирского отделения
Российской академии наук

Поступила
11.01.2005