ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 5 (456)

УДК 517.925.51

Ю.А. КОНЯЕВ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Изучены три класса линейных и квазилинейных неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (регулярно возмущенные системы с периодическими коэффициентами, сингулярно возмущенные системы с периодическими коэффициентами и системы с полиномиально периодическими коэффициентами), для которых получены критерии асимптотической устойчивости, устойчивости и неустойчивости тривиального решения.

В отличие от известного [1]–[8] предложенный алгоритм, в основе которого лежит один из вариантов метода расщепления [9]–[11], позволяет проводить исследование устойчивости достаточно просто и без использования (для нелинейных систем) традиционного аппарата функций Ляпунова [3]–[6], включая критический случай.

1. Исследование регулярно возмущенных систем с периодическими коэффициентами

Ряд задач механики и физики приводит к изучению дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = A(t,\varepsilon)x + f(x,t), \quad x(0,\varepsilon) = x^0$$
$$\Big(A(t,\varepsilon) = \sum_0^\infty A_k(t)\varepsilon^k, \quad f(0,t) \equiv 0, \quad \|A(t,\varepsilon)\| \le C, \quad t \ge 0, \quad |\varepsilon| \le \varepsilon_0 < 1\Big), \tag{1.1}$$

где $A_k(t)$, $k \ge 0$, — достаточно гладкие T-периодические матричные функции (напр., уравнения Хилла–Матье, возникающие при изучении движения Луны [6]).

Теорема 1.1. *Система* (1.1) *в случае, когда матрица A_0 является постоянной и ее спектр $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ удовлетворяет условиям*

$$\sigma_{jk} \equiv \lambda_{0j} - \lambda_{0k} \ne i2\pi qT^{-1}, \quad j \ne k, \quad j,k = \overline{1,n}, \quad q = 0, \pm 1, \dots, \tag{1.2}$$

может быть преобразована с помощью невырожденной (*при достаточно малых* $|\varepsilon| \ll 1$) *замены к системе с почти постоянной и диагональной матрицей*

$$\dot{z} = Q(t,\varepsilon)z + b(z,t), \quad z(0,\varepsilon) = z^0,$$
$$Q(t,\varepsilon) = \Lambda(\varepsilon) + \varepsilon^{N+1}G(t,\varepsilon), \quad \Lambda(\varepsilon) = \sum_0^N \Lambda_k\varepsilon^k, \quad N = 0,1,2,\dots, \tag{1.3}$$

где матрицы Λ_k, $k = \overline{0,N}$, являются постоянными и диагональными, а матрица $G(t,\varepsilon)$ равномерно ограничена по норме при $t \ge 0$ и $|\varepsilon| \ll 1$, т. е. $\|G(t,\varepsilon)\| = O(1)$, $t \ge 0$, $|\varepsilon| \le |\varepsilon_0| \ll 1$.

Доказательство. В силу условий (1.2) всегда существует невырожденная матрица S_0 такая, что замена

$$x = S_0 y \quad (S_0^{-1}A_0S_0 = \Lambda_0 = \mathrm{diag}\{\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0n}\}) \tag{1.4}$$

преобразует систему (1.1) к виду

$$\dot{y} = B(t,\varepsilon)y + h(y,t), \quad y(0,\varepsilon) = y^0, \tag{1.5}$$

где $B(t,\varepsilon) = S_0^{-1}A(t,\varepsilon)S_0 = \sum\limits_0^\infty B_k(t)\varepsilon^k$ $(B_0 = \Lambda_0)$. Последующая T-периодическая невырожденная при достаточно малых $|\varepsilon| \ll 1$ замена

$$y = H(t,\varepsilon)z, \quad H(t,\varepsilon) = E + \sum_1^N H_k(t)\varepsilon^k, \tag{1.6}$$

позволяет получить систему (1.3). При этом матрицы $H(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)$ и $B(t,\varepsilon)$ связаны соотношением

$$\dot{H} = B(t,\varepsilon)H(t,\varepsilon) - H(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon). \tag{1.7}$$

Приравнивая в (1.7) коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим простые дифференциальные уравнения для последовательного и однозначного определения каждой из постоянных диагональных матриц Λ_k и T-периодических матриц $H_k(t)$, $k = \overline{1,N}$,

$$\begin{gathered}\dot{H}_k(t) = P_k(t) - \Lambda_k + \Lambda_0 H_k(t) - H_k(t)\Lambda_0, \quad P_1(t) = B_1(t), \\ P_k(t) = B_k(t) + \sum_{j=1}^{k-1}(B_j(t)H_{k-j}(t) - H_{k-j}(t)\Lambda_j), \quad k = \overline{2,N}.\end{gathered} \tag{1.8}$$

Для удобства дальнейшего изложения для произвольной квадратной матрицы A обозначим

$$A = \{a_{jk}\}_1^n, \quad \overline{A} = \mathrm{diag}\{a_{11},\ldots,a_{nn}\}, \quad \overline{\overline{A}} = A - \overline{A}.$$

Далее отметим, что каждое из уравнений (1.8) распадается на два уравнения

$$\dot{\overline{H}}_k(t) = \overline{P}_k(t) - \Lambda_k, \quad P_k(t) = \{p_{ijk}(t)\}, \tag{1.9}$$

$$\dot{\overline{\overline{H}}}_k(t) = \Lambda_0\overline{\overline{H}}_k(t) - \overline{\overline{H}}_k(t)\Lambda_0 + \overline{\overline{P}}_k(t), \quad H_k(t) = \{h_{ijk}(t)\}, \quad k = \overline{1,N}, \tag{1.10}$$

при этом уравнение (1.9) имеет в классе C_T T-периодических функций единственное решение

$$\overline{H}_k(t) = \int_0^t (\overline{P}_k(s) - \Lambda_k)ds \in C_T,$$

если положить

$$\Lambda_k = T^{-1}\int_0^T \overline{P}_k(s)ds, \quad k = \overline{1,N}.$$

Уравнение (1.10) распадается в свою очередь на $(n^2 - n)$ скалярных дифференциальных уравнений

$$\dot{h}_{ijk}(t) = \sigma_{ij}h_{ijk}(t) + p_{ijk}(t), \quad i \neq j, \;\; i,j = \overline{1,n}, \;\; k = \overline{1,N},$$

решение каждого из которых может быть представлено в виде

$$h_{ijk}(t) = e^{\sigma_{ij}(t+T)}(1 - e^{\sigma_{ij}T})^{-1}\int_t^{t+T} e^{-\sigma_{ij}s}p_{ijk}(s)ds \in C_T.$$

Оценка $\|G(t,\varepsilon)\| = O(1)$ следует из соотношения (1.7) и равенства

$$G(t,\varepsilon) = \sum_{k=N+1}^\infty B_k(t)\varepsilon^{k-N-1} + \sum_{j=1}^N (B_j(t)H_{N+1-j}(t) - H_{N+1-j}(t)\Lambda_j),$$

что и завершает доказательство теоремы. $\square$

Замечание 1.1. Теорему 1.1 можно рассматривать как асимптотический (и, в отличие от ранее известного [3]–[6], конструктивный) аналог известной теоремы Флоке–Ляпунова о приводимости, т. к. преобразования (1.4) и (1.6), приводящие исходную систему к более простому виду, имеют явное представление.

Замечание 1.2. При наличии у матрицы A_0 кратных точек спектра $\{\lambda_{0j}\}_1^p$, удовлетворяющих условиям

$$\sigma_{jk} \neq i2\pi q T^{-1}, \quad j \neq k, \quad j,k = \overline{1,p}, \quad 1 \leq p \leq n, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{1.11}$$

после замены вида (1.4) получим систему вида (1.5), где

$$B_0 = S_0^{-1} A_0 S_0 = J_0 = \operatorname{diag}\{J_{01}, \dots, J_{0p}\}, \quad J_{0j} = \lambda_{0j} E + N_j,$$

N_j – некоторые нильпотентные матрицы ($j = \overline{1,p}$).

С учетом структуры матрицы $B_0 = J_0$ можно построить замену (некоторый аналог “срезающего преобразования”, см. напр., [10])

$$y = U(\varepsilon) v, \quad U(\varepsilon) = \operatorname{diag}\{U_1(\varepsilon_1), \dots, U_p(\varepsilon_p)\}, \quad m_j = \dim J_{0j},$$
$$U_j(\varepsilon_j) = \operatorname{diag}(1, \varepsilon_j, \varepsilon_j^2, \dots, \varepsilon_j^{m_j - 1}), \quad \varepsilon_j^{m_j} = \varepsilon_i, \quad j = \overline{1,p},$$

приводящую систему вида (1.5) к системе с предельной диагональной матрицей

$$\dot{v} = F(t,\eta) v + g(v,t,\eta), \quad v(0,\eta) = v^0 \tag{1.12}$$

$$\Bigl(\eta = \underset{j=\overline{1,p}}{\text{НОД}}(\varepsilon_j), \quad F(t,\eta) = \sum_0^\infty F_k(t)\eta^k, \quad F_0 = \Lambda_0 = \operatorname{diag}\{\Lambda_{01}, \dots, \Lambda_{0p}\}, \quad \Lambda_{0j} = \lambda_{0j} E, \quad j = \overline{1,p}\Bigr).$$

С учетом структуры матрицы J_0 для произвольной квадратной матрицы A обозначим

$$A = \{A_{jk}\}_1^p, \quad \widehat{A} = \operatorname{diag}\{A_{11}, \dots, A_{pp}\}, \quad \hat{\hat{A}} = A - \widehat{A}.$$

Невырожденная при достаточно малых $|\eta|$ T-периодическая замена $v = \Bigl(E + \sum\limits_1^{N_1} H_k(t)\eta^k\Bigr) z$ позволяет, как и выше, преобразовать систему (1.12) к системе с почти постоянной блочно-диагональной матрицей вида

$$\dot{z} = Q(t,\eta) z + b(z,t,\eta), \quad z(0,\eta) = z^0, \quad Q(t,\eta) = \Lambda_0 + \sum_1^{N_1} \widehat{Q}_k \eta^k + O(\eta^{N_1+1}), \quad b(0,t,\eta) \equiv 0. \tag{1.13}$$

Процесс расщепления системы (1.13) может быть продолжен и далее.

Замечание 1.3. Ограничения вида (1.2) или (1.11) на наличие резонансных соотношений не являются существенными и их можно убрать, если на соответствующем шаге диагональную матрицу Λ_0 представить в виде

$$\Lambda_0 = \overline{D}_0 + i\overline{C}_0, \quad \overline{C}_0 = 2\pi T^{-1} \operatorname{diag}\{m_1, \dots, m_p\},$$

а спектр матрицы D_0 уже удовлетворяет условиям вида (1.2). При этом кратность некоторых точек спектра может измениться, что позволяет после замены $y = \exp(i\overline{C}_0 t) z$ перейти к системе вида (1.3).

Замечание 1.4. Отметим, что структура матрицы $Q(t,\varepsilon)$ в уравнении (1.3) позволяет провести исследование устойчивости тривиального решения задачи (1.3) и эквивалентной ей задачи (1.1) [10].

Рассмотрим несколько примеров.

1. Уравнение Матье

$$\ddot{x} + (\delta + \varepsilon_0 \cos t)x = 0, \tag{1.14}$$

где δ и ε_0 — некоторые параметры, описывает при некоторых допущениях движение Луны ([6], с. 246). Области неустойчивости тривиального решения уравнения (1.14) на плоскости параметров ε_0 и δ обычно определяются с помощью определителей бесконечного порядка и строятся с помощью диаграммы Айнса–Стретта ([6], с. 250). Покажем, что решение этой задачи можно получить с помощью более простого метода, описанного выше. Обозначив $\delta = \alpha^2$, преобразуем уравнение (1.14) к системе

$$\dot{y} = A(t, \varepsilon_0)y, \quad A(t, \varepsilon_0) = A_0 + \varepsilon_0 A_1(t), \tag{1.15}$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cos t, \quad y = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix},$$

которая после замены вида (1.6) может быть преобразована к виду

$$\begin{gathered} \dot{z} = B(t, \varepsilon)z, \quad B(t, \varepsilon) = \Lambda_0 + \varepsilon B_1(t), \quad \varepsilon = \varepsilon_0/2\alpha, \\ \Lambda_0 = i\alpha \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1(t) = i \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cos t, \quad S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\alpha & i\alpha \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{1.16}$$

В силу теоремы 1.1 система (1.16) в нерезонансном случае ($\sigma_{jk} \neq i2\pi n T^{-1}$) может быть с любой точностью преобразована к системе вида (1.3) с почти постоянной и диагональной матрицей, исследование которой не вызывает затруднений. При наличии резонансных соотношений, когда $\alpha = n/2$ ($\sigma_{jk} = \pm 2i\alpha = in$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), исходное уравнение после дополнительных преобразований приводится к системам другого вида.

При $n = 0$ система (1.15) преобразуется к виду

$$\dot{y} = (\nu B_1(t) + \nu^3 B_3)y, \quad \varepsilon_0 = \nu^2, \;\; \delta = \varepsilon_0^2 \beta,$$

где

$$B_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos t & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\beta & 0 \end{pmatrix},$$

что позволяет после замены $y = \left(E + \sum\limits_1^3 H_k(t)\nu^k\right)z$ получить систему $\dot{z} = (\nu C_1 + \nu^3 C_3 + o(\nu^3))z$, где

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -(\beta + 0,5) & 0 \end{pmatrix}.$$

Анализ приближенного характеристического уравнения $|\nu C_1 + \nu^3 C_3 - \lambda E| = 0$ определяет область неустойчивости $\beta + 1/2 < 0$, $\delta < -\varepsilon_0^2/2$ при $n = 0$.

В случае $n = 1$ после замен $\alpha = 1/2 + \varepsilon_0 \beta$, $z = \exp(\Lambda_0 t)v$ система (1.16) преобразуется к виду

$$\dot{v} = i\varepsilon P(t)v, \quad P(t) = \begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -\exp(-it) \\ \exp(-it) & 1 \end{pmatrix} \cos t + O(\varepsilon),$$

и после еще одной замены $v = (E + \varepsilon H_1(t))w$ имеем

$$\dot{w} = (\varepsilon Q_1 + o(\varepsilon))w, \quad Q_t = i \begin{pmatrix} -\beta & -1/2 \\ 1/2 & \beta \end{pmatrix},$$

что позволяет, как и выше, записать неравенства

$$\beta^2 < 1/4, \quad 1/4 - \varepsilon_0/2 < \delta = \alpha^2 < 1/4 + \varepsilon_0/2,$$

определяющие область неустойчивости при $n = 1$.

При $n=2$, положив $\alpha = 1+\varepsilon_0^2\beta$, после аналогичных преобразований получим систему

$$\dot y = (\varepsilon^2 C_2 + o(\varepsilon^2))y, \quad C_2 = i\begin{pmatrix} -\beta+1/3 & 1/2 \\ -1/2 & \beta-1/3 \end{pmatrix}.$$

Структура усеченного характеристического уравнения $|C_2-\lambda E| = 0$ позволяет определить границы области неустойчивости $1-\varepsilon_0^2/12 < \delta = \alpha^2 < 1+5\varepsilon_0^2/12$ при $n=2$.

Полученные оценки областей неустойчивости совпадают с известными ранее результатами ([6], с. 253).

2. Система двух связанных осцилляторов описывается системой уравнений ([5], с. 191)

$$\begin{aligned} &\ddot x + a^2 x = 2\varepsilon y \sin t, \quad a,b\in R, \quad a\neq b; \\ &\ddot y + b^2 y = 2\varepsilon x\cos t, \quad ab\neq 0, \quad |a\pm b|\neq 1, \end{aligned} \tag{1.17}$$

которая после обозначений $x_1 = x$, $x_2=\dot x$, $x_3 = y$, $x_4=\dot y$, $z_{1,2} = x_2 \pm iax_1$, $z_{3,4} = x_4\pm iBx_3$ преобразуется к системе четвертого порядка $\dot z = (\Lambda_0+\varepsilon A_1(t))z$, где

$$\Lambda_0 = \operatorname{diag}\{ia,-ia,ib,-ib\}, \quad A_1(t) = i\begin{pmatrix} 0 & b^{-1}C\sin t \\ a^{-1}C\cos t & 0\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

С помощью приведенного выше алгоритма после замены $z = \Big(E+\sum\limits_1^2 H_k(t)\varepsilon^k\Big)v$ последняя система может быть преобразована к виду

$$\dot v = \Big(\sum_0^2 \Lambda_k\varepsilon^k + o(\varepsilon^2)\Big)v, \tag{1.18}$$

где

$$\Lambda_1 = 0, \quad \Lambda_2 = \operatorname{diag}\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4\}, \quad \nu_1=\nu_2=-\nu_3=-\nu_4 = \frac{1}{2\pi ab}\Big(\frac{1}{1-(a+b)^2} - \frac{1}{1-(a-b)^2}\Big).$$

Структура матриц Λ_k $(k=\overline{0,2})$ позволяет сделать вывод о неустойчивости тривиального решения системы (1.18) и эквивалентной ей системы (1.17) при любых действительных параметрах a и b в случае, когда $a\neq b$, $ab\neq 0$, $|a\pm b|\neq 1$.

3. Новый метод оказался полезным при нахождении области устойчивости стационарных вращений симметричного идеально проводящего твердого тела в переменном магнитном поле, что имеет приложение в теории гироскопов [11]. После ряда упрощений движение такого тела с неподвижным центром масс может быть записано в линеаризованной форме

$$\dot x = (A_0 + \varepsilon A_1(t))x, \tag{1.19}$$

где

$$A_0 = \Lambda_0 = i\Omega\operatorname{diag}\{1,0\}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} -p(t) & r(t) \\ p(t) & r(t)\end{pmatrix},$$
$$p(t) = (1-\chi)\Omega\sin^2\omega t + i\omega(\xi-1)(\sin 2\omega t)/2, \quad r(t) = p(t) - \Omega\sin^2\omega t, \quad \chi = I_1/I_2,$$
$$\xi = \alpha_3/\alpha_1, \quad \varepsilon = \alpha_1 H_0^2/L,$$

Ω — частота нутационных колебаний тела, ω — частота колебаний магнитного поля, I_k — моменты инерции тела относительно его осей, ξ — величина,определяемая поляризуемостью тела относительно его осей, ε — безразмерный малый параметр. После замен вида (1.6) в нерезонансном случае $(\Omega\neq 2\omega)$ система (1.19) преобразуется к виду

$$\dot y = (\Lambda_0 + \varepsilon\Lambda_1 + o(\varepsilon))y, \quad \Lambda_1 = \frac{\Omega}{2I_3}\begin{pmatrix} (I_1-I_3) & 0 \\ 0 & -I_1\end{pmatrix},$$

откуда следует, что в этом случае стационарное движение данного тела со сплюснутым эллипсоидом инерции ($I_3 > I_1$) при достаточно малых $|\varepsilon|$ асимптотически устойчиво, а для тела с вытянутым эллипсоидом инерции ($I_3 < I_1$) неустойчиво. При частотах, близких к резонансным, анализ устойчивости усложняется. Например, после замены $x = \exp(\Lambda_0 t)v$ система (1.19) принимает вид

$$\dot{v} = \varepsilon Q(t)v, \quad Q(t) = \begin{pmatrix} (-p(t) + i\beta) & -r(t)\exp(-2i\omega t) \\ p(t)\exp(2i\omega t) & r(t) \end{pmatrix},$$

и далее после замены вида (1.6) получаем систему $\dot{z} = (\varepsilon C_1 + o(\varepsilon))z$, $\Omega = 2\omega + \varepsilon\beta$, где

$$C_1 = \begin{pmatrix} (1-\chi)\omega + i\beta & \omega(1 - 2\chi - \xi)/4 \\ -(1 - 2\chi + \xi)\omega/4 & -\chi\omega \end{pmatrix}.$$

Асимптотическая устойчивость стационарных движений твердого тела в этом случае имеет место, когда корни усеченного характеристического уравнения

$$|C_1 - \lambda E| = 0, \quad \lambda^2 + (\omega - i\beta)\lambda + a + ib = 0, \quad a = \omega^2(1 + 12\chi - 12\chi^2 - \xi^2)/16, \quad b = -\omega\beta\chi,$$

лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$, что приводит к неравенству

$$\left((\chi - 1/2)\Big/\sqrt{\frac{4+\zeta}{4(3+\zeta)}}\right)^2 + (\xi/\sqrt{4+\zeta}\,)^2 < 1, \quad \zeta = \frac{4\beta^2}{\omega^2}. \tag{1.20}$$

Область, определяемая неравенством (1.20), представляет собой эллипс в пространстве χ и ξ, зависящий от параметра ζ. Полуось эллипса в плоскости $\xi = 0$ монотонно убывает с увеличением “расстройки” β и асимптотически стремится к значению $1/2$ при $\beta \to +\infty$. В плоскости $\chi = 1/2$ полуось эллипса неограниченно возрастает с ростом β и при достаточно больших значениях β ограничения на соотношения коэффициентов поляризуемости в этом случае будут отсутствовать. Таким образом, при больших значениях β область устойчивости вблизи резонанса переходит в область устойчивости, найденную в нерезонансном случае, когда эллипсоид инерции сжат ($I_1 < I_3$) при любом ξ.

2. Анализ сингулярно возмущенных систем с периодическими коэффициентами

Для исследования устойчивости тривиального решения сингулярно возмущенной задачи Коши на полуоси

$$\varepsilon\dot{x} = A(t,\varepsilon)x + \varepsilon b(x,t), \quad A(t,\varepsilon) = \sum_0^\infty A_k(t)\varepsilon^k, \quad x(0,\varepsilon) = x^0, \tag{2.1}$$

где ряд $\sum\limits_0^\infty A_k(t)\varepsilon^k$ сходится абсолютно и равномерно при $t \ge 0$ и $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$, $b(x,t)$ и $A_k(t)$, $k \ge 0$, — достаточно гладкие и T-периодические по t функции, также воспользуемся методом расщепления.

В случае, когда спектр $\{\lambda_{0j}(t)\}_1^n$ матрицы $A_0(t)$ удовлетворяет условиям

$$\sigma_{jk}(t) \equiv \lambda_{0j}(t) - \lambda_{0k}(t) \ne 0, \quad j \ne k, \quad j,k = \overline{1,n}, \quad t \ge 0, \tag{2.2}$$

замена

$$x = S_0(t)y, \quad S_0^{-1}(t)A_0(t)S_0(t) = \Lambda_0(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_{01}(t), \dots, \lambda_{0n}(t)\}$$

преобразует задачу (2.1) к виду

$$\varepsilon\dot{y} = B(t,\varepsilon)y + \varepsilon f(y,t), \quad y(0,\varepsilon) = y^0, \quad B(t,\varepsilon) = \Lambda_0(t) + \sum_1^\infty B_k(t)\varepsilon^k.$$

Далее с помощью невырожденного при достаточно малых $|\varepsilon|$ преобразования

$$y = H(t,\varepsilon)z, \quad H(t,\varepsilon) = E + \sum_{1}^{N} \overline{\overline{H}}_k(t)\varepsilon^k,$$

имеем возможность перейти к анализу системы с почти диагональной матрицей

$$\varepsilon \dot{z} = Q(t,\varepsilon)z + \varepsilon h(z,t,\varepsilon), \quad z(0,\varepsilon) = z^0, \tag{2.3}$$

где

$$Q(t,\varepsilon) = \Lambda(t,\varepsilon) + \varepsilon^{N+1}G(t,\varepsilon),$$

$$\Lambda(t,\varepsilon) = \sum_{0}^{N} \Lambda_k(t)\varepsilon^k = \mathrm{diag}\{\lambda_1(t,\varepsilon),\dots,\lambda_n(t,\varepsilon)\}, \quad \|G(t,\varepsilon)\| = O(1), \;\; t \ge 0, \;\; |\varepsilon| \le \varepsilon_0 < 1,$$

при этом матрицы $H(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)$ и $B(t,\varepsilon)$ связаны соотношением

$$\varepsilon \dot{H} = B(t,\varepsilon)H(t,\varepsilon) - H(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon),$$

что дает возможность получить простые алгебраические уравнения для последовательного и однозначного определения диагональных $\Lambda_k(t)$ и “бездиагональных” $\overline{\overline{H}}_k(t)$ матриц, $k = \overline{1,N}$, (аргументы опущены)

$$\Lambda_0\overline{\overline{H}}_k - \overline{\overline{H}}_k\Lambda_0 = \Lambda_k - P_k, \quad P_1 = B_1,$$

$$P_k = B_k + \sum_{j=1}^{k-1}(B_j\overline{\overline{H}}_{k-j} - \overline{\overline{H}}_{k-j}\Lambda_j) - \frac{d\overline{\overline{H}}_{k-1}}{dt}, \quad k = \overline{2,N},$$

$$\Lambda_0\overline{\overline{H}}_k - \overline{\overline{H}}_k\Lambda_0 = -\overline{\overline{P}}_k, \quad P_k = \{p_{ijk}\}, \quad \overline{\overline{H}}_k = \{\overline{\overline{h}}_{ijk}\},$$

при этом

$$\Lambda_k(t) = \overline{P}_k(t) \in C_T, \quad \overline{\overline{h}}_{ijk}(t) = -\sigma_{ij}^{-1}(t)p_{ijk}(t) \in C_T, \;\; i \ne j, \;\; i,j = \overline{1,n}, \;\; k = \overline{1,N}.$$

Теорема 2.1. *Если при выполнении условий* (2.2) *для некоторого* $N \ge 1$ *спектр* $\{\lambda_j(t,\varepsilon)\}_1^n$ *матрицы* $\Lambda(t,\varepsilon)$ *удовлетворяет соотношениям*

$$\mathrm{Re}\,\lambda_j(t,\varepsilon) \le \varepsilon^q(-\delta + \varphi(t)), \quad \delta > 0, \;\; 0 \le q \le N, \quad \int_0^t \varphi(s)ds \le C, \;\; t \ge 0,$$

и для достаточно гладкой функции $b(x,t)$ *справедлива оценка*

$$\|b(x,t)\| \le C\|x\|^{1+\alpha}, \quad C,\alpha > 0, \;\; t \ge 0,$$

тогда при достаточно малом фиксированном $\varepsilon > 0$ *тривиальное решение задачи* (2.3) *и эквивалентной ей задачи* (2.1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. С учетом результатов работы [12] запишем дифференциальное неравенство для нормы решения задачи (2.3)

$$\begin{aligned}\frac{d|z|^2}{dt} &= 2\,\mathrm{Re}(z^*Q(t,\varepsilon)z)\varepsilon^{-1} + 2\,\mathrm{Re}(z^*h(z,t,\varepsilon)) \le \\ &\le (2(-\delta + \varphi(t))\varepsilon^{q-1} + O(\varepsilon^N) + C_1|z|^\alpha)|z|^2 \le \\ &\le (-2\delta_1 + 2\varphi(t))\varepsilon^{q-1}|z|^2, \quad \delta > \delta_1 > 0,\end{aligned}$$

откуда следует оценка

$$|z(t)| \le |z^0|\exp\left(\varepsilon^{q-1}\int_0^t(-\delta_1 + \varphi(s))ds\right) \le |z^0|\exp((-\delta_1 + O(\varepsilon))t\varepsilon^{q-1}),$$

что и завершает доказательство теоремы. □

Замечание 2.1. Теорема 2.1 сохраняет справедливость и в критическом случае, когда некоторые (или все) точки спектра предельной ($\varepsilon = 0$) матрицы $A_0(t)$ лежат на мнимой оси ($1 \le q \le N$).

Замечание 2.2. При наличии у матрицы $A_0(t)$ тождественно кратных точек спектра имеет место аналог теоремы 2.1, для реализации которого необходимо ввести соответствующие дробные степени малого параметра ε и воспользоваться "срезающим" преобразованием [10].

Для иллюстрации предложенного алгоритма рассмотрим квазилинейное уравнение колебаний заряда $q(t)$ на пластинах конденсатора в электрическом контуре с переменной емкостью $C(t)$ при наличии нелинейной электродвижущей силы (э. д. с.)

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + qC^{-1}(t) = f(t)q^2, \quad q(0) = q^0; \tag{2.4}$$

здесь L — индуктивность, R — сопротивление, $f(t)q^2$ — нелинейная э. д. с., $C(t)$ и $f(t)$ — достаточно гладкие T-периодические функции. При $L = \varepsilon^2 L_0$, $R = \varepsilon^2 R_0$ и $f(t) = \varepsilon f_0(t)$ (ε — малый параметр) задача (2.4) может быть записана в векторной форме

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = (A_0(t) + \varepsilon A_1)y + \varepsilon h(y,t), \quad y(0,\varepsilon) = y^0, \tag{2.5}$$

где

$$y = (q,\, \varepsilon\dot{q})^T, \quad h(y,t) = (0,\, f_0(t)L_0^{-1}q^2),$$
$$A_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\beta_0 \end{pmatrix}, \quad \omega^2(t) = \frac{1}{C(t)L_0}, \quad 2\beta_0 = \frac{R_0}{L_0}.$$

Здесь имеем критический случай, т. к. предельный оператор $A_0(t)$ имеет чисто мнимый спектр $\lambda_{01,2} = \pm i\omega(t)$. Задача (2.5) после невырожденной при достаточно малом $\varepsilon > 0$ замены

$$y = S_0(t)(E + \varepsilon H_1(t_0))z, \;\; S_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\omega(t) & i\omega(t) \end{pmatrix}, \;\; H_1(t) = \frac{\beta(t)}{2i\omega(t)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \;\; \beta(t) = \beta_0 + \frac{\dot{\omega}(t)}{2\omega(t)},$$

по описанному выше алгоритму преобразуется к виду

$$\varepsilon\dot{z} = (\Lambda_0(t) + \varepsilon\Lambda_1(t) + o(\varepsilon^2))z + \varepsilon b(z,t,\varepsilon), \quad z(0,\varepsilon) = z^0,$$
$$\Lambda_0(t) = i\omega(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1(t) = -\beta(t)E, \quad \Lambda(t,\varepsilon) = \sum_0^1 \Lambda_k(t)\varepsilon^k.$$

Последняя система удовлетворяет условиям теоремы 2.1, т. к.

$$\|b(z,t,\varepsilon)\| \le C|z|^2, \quad \operatorname{Re}\lambda_{1,2}(t,\varepsilon) = (-\beta_0 - 0,5\dot{\omega}\omega^{-1}(t))\varepsilon,$$
$$\beta_0 > 0, \quad \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\dot{\omega}(s)}{\omega(s)}ds = \frac{1}{2}(\ln\omega(t) - \ln\omega(0)) \le C,$$

что гарантирует асимптотическую устойчивость тривиального решения задачи (2.4). Предложенный алгоритм позволяет построить асимптотическое разложение решения задачи (2.5) в виде

$$y(t,\varepsilon) = S_0(t)(E + \varepsilon\overline{\overline{\overline{H}}}_1(t)) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \Lambda(s,\varepsilon)ds\right)C + O(\varepsilon^2),$$

при этом структура погранслоя имеет явное аналитическое представление и определяется не только спектром матрицы $A_0(t)$, но и спектром вспомогательной матрицы $\Lambda_1(t)$.

3. Исследование некоторых систем дифференциальных уравнений с полиномиально периодическими коэффициентами

Предложенный алгоритм оказался полезным и при исследовании неавтономных линейных и квазилинейных систем [2], [8] вида

$$\dot{x} = A(t)x + f(x,t), \quad x(t_0) = x^0,$$
$$A(t) = t^m \sum_0^\infty A_k(t)t^{-k}, \quad m \geq 1, \quad f(0,t) \equiv 0, \quad t \geq t_0 \geq 1, \tag{3.1}$$

где $A_k(t)$ $(k \geq 0)$ — достаточно гладкие T-периодические матричные функции. Отметим, что к указанным линейным системам (при постоянных матрицах A_k) сводится большой класс уравнений гипергеометрического типа

$$p(t)\ddot{x} + q(t)\dot{x} + \lambda x = 0, \tag{3.2}$$

где $q(t)$ и $p(t)$ — полиномы не выше первой и второй степени соответственно, λ — некоторый постоянный параметр. К уравнениям вида (3.2) относятся уравнение Эйри $\ddot{x}+tx=0$, уравнение Бесселя $t^2\ddot{x}+t\dot{x}+(t^2-\nu^2)x=0$, уравнение Эрмита $\ddot{x}-2t\dot{x}+2\nu x=0$ и многие другие.

Теорема 3.1. *Если периодическая матрица $A_0(t)$ имеет простой спектр*

$$\{\lambda_{0j}(t)\}_1^n, \quad \sigma_{jk}(t) \equiv \lambda_{0j}(t) - \lambda_{0k}(t) \neq 0, \quad j \neq k, \quad j,k = \overline{1,n}, \quad t \geq t_0,$$

тогда существует невырожденная при достаточно больших $t_0 > 1$ замена

$$x = S_0(t)H(t)z, \quad H(t) = E + \sum_1^{m+1} \overline{\overline{H}}_k(t)t^{-k}, \quad S_0^{-1}(t)A_0(t)S_0(t) = \Lambda_0(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_{01}(t),\dots,\lambda_{0n}(t)\},$$

преобразующая систему (3.1) *к системе с почти диагональной матрицей*

$$\dot{z} = (\Lambda(t) + t^{-2}F(t))z + b(z,t), \quad z(t_0) = z^0,$$
$$\Lambda(t) = t^m \sum_0^{m+1} \Lambda_k(t)t^{-k} = \operatorname{diag}\{\lambda_1(t),\dots,\lambda_n(t)\}, \quad \|F(t)\| \leq C \tag{3.3}$$

(*матрицы $\Lambda_k(t)$ и $\overline{\overline{H}}_k(t)$ однозначно определяются в ходе доказательства* $(k = \overline{0,m+1})$).

Доказательство. В условиях теоремы всегда существует невырожденная достаточно гладкая T-периодическая замена $x = S_0(t)y$, приводящая систему (3.1) к виду

$$\dot{y} = B(t)y + h(y,t), \quad y(t_0) = y^0, \quad B(t) = t^m \sum_0^{m+1} B_k(t)t^{-k}, \quad B_0(t) = \Lambda_0(t),$$

которая после еще одной невырожденной замены $y = H(t)z$, $H(t) = E + \sum\limits_1^{m+1} \overline{\overline{H}}_k(t)t^{-k}$ при достаточно больших $t_0 > 1$, приводит к виду (3.3). При этом имеет место равенство

$$\dot{H} = B(t)H(t) - H(t)Q(t), \quad Q(t) = \Lambda(t) + t^{-2}F(t),$$

позволяющее получить простые алгебраические уравнения для последовательного и однозначного определения матриц $\Lambda_k(t)$ и $\overline{\overline{H}}_k(t)$, $k = \overline{1,m+1}$ (аргументы опущены) $\Lambda_0\overline{\overline{H}}_k - \overline{\overline{H}}_k\Lambda_0 = \Lambda_k - P_k$, $P_1 = B_1$, $P_k = B_k + \sum\limits_{j=1}^{k-1}(B_j\overline{\overline{H}}_{k-j} - \overline{\overline{H}}_{k-j}\Lambda_j) - \dot{\overline{\overline{H}}}_{k-m} = \{p_{ijk}\}$, $k = \overline{2,m+1}$, $\dot{\overline{\overline{H}}}_S = 0$, $s \leq 0$, $\overline{\overline{H}}_k = \{h_{ijk}\}$, при этом $\Lambda_k = \overline{P}_k$, $k = \overline{1,m+1}$, $h_{ijk} = -\sigma_{ij}^{-1}p_{ijk}$, $i \neq j$, $i,j = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,m+1}$, $t \geq t_0$, что и завершает доказательство теоремы. □

Теорема 3.2. *Если при выполнении условий теоремы* 3.1 *спектр* $\{\lambda_j(t)\}$ *матрицы* $\Lambda(t)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\operatorname{Re}\lambda_j(t) \le \delta(t), \quad a(t) = \int_{t_0}^{t} \delta(s)ds \to -\infty, \;\; t \to +\infty, \;\; j = \overline{1,n},$$

тогда тривиальное решение линейной однородной ($f \equiv 0$) *системы* (3.3) *и системы* (3.1) *асимптотически устойчиво, при* $a(t) \le C$ *устойчиво, а в случае* $\operatorname{Re}\lambda_j(t) \ge \delta(t)$, $a(t) \to +\infty$, $t \to +\infty$, $j = \overline{1,n}$, *неустойчиво.*

Доказательство асимптотической устойчивости (или устойчивости) следует из дифференциального неравенства [10]

$$\frac{d|z|^2}{dt} = 2\operatorname{Re}(z^*\Lambda(t)z) + 2\operatorname{Re}(z^*F(t)z)t^{-2} \le (\delta(t) + O(t^{-2}))|z|^2,$$

при этом $|z(t)| \le |z^0| \exp\Big(\int\limits_{t_0}^{t}(\delta(s) + O(s^{-2}))ds\Big)$, а доказательство неустойчивости — из аналогичного обратного неравенства $\frac{d|z|^2}{dt} \ge (2\delta(t) + O(t^{-2}))|z|^2$ и соответствующей ему оценки $|z(t)| \ge |z^0| \exp\Big(\int\limits_{t_0}^{t}(\delta(s) + O(s^{-2}))ds\Big)$.

Следствие 3.1. Если в условиях теоремы 3.1 спектр $\{\lambda_j(t)\}_1^n$ матрицы $\Lambda(t)$ удовлетворяет неравенствам $\operatorname{Re}\lambda_j(t) \le -\delta < 0$, $j = \overline{1,n}$, $t \ge t_0$, то тривиальное решение линейной однородной ($b(z,t) \equiv 0$) задачи (3.3) и соответствующей задачи (3.1) асимптотически устойчиво, при $\operatorname{Re}\lambda_j(t) \le 0$, $j = \overline{1,n}$, $t \ge t_0$, устойчиво, а в случае $\operatorname{Re}\lambda_j(t) \ge \delta > 0$, $j = \overline{1,n}$, $t \ge t_0$, неустойчиво.

Теорема 3.3. *Если в условиях теоремы* 3.1 *существует такое* q, $(0 \le q \le m)$, *при котором спектр матриц* $\Lambda_k(t)$ *удовлетворяет условиям*

$$\operatorname{Re}\lambda_{qj}(t) \le -\delta + \varphi(t), \quad \operatorname{Re}\lambda_{kj}(t) \le 0, \;\; k = \overline{0, q-1}, \;\; \delta > 0, \quad \int_{t_0}^{t} \varphi(s)ds \le C, \;\; t \ge t_0,$$

и при этом функция $f(x,t)$ *является достаточно гладкой и удовлетворяет неравенству* $|f(x,t)| \le C|x|^{1+\alpha}$, $C, \alpha > 0$, $t \ge t_0$, *то тривиальное решение задачи Коши для квазилинейной системы* (3.3) *и эквивалентной ей задачи* (3.1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство следует из дифференциального неравенства

$$\frac{d|z|^2}{dt} \le 2\operatorname{Re}(z^*\Lambda_q(t)z)t^{m-q} + C_1|z|^2 t^{m-q-1} + 2\operatorname{Re}(z^*b(z,t)) \le$$
$$\le (-2\delta_1 + 2\varphi(t))|z|^2, \quad \delta > \delta_1 > 0, \;\; t \ge t_1 > t_0 > 1,$$

и соответствующей оценки

$$|z(t)| \le |z^0| \exp\left(\int_{t_0}^{t}(-\delta_1 + \varphi(s))ds\right) \le |z^0| \exp(-\delta_2(t - t_0)), \quad \delta_2 > 0.$$

Замечание 3.1. При наличии у матрицы $A_0(t)$ тождественно кратных точек спектра можно воспользоваться аналогом "срезающего преобразования" [10].

С помощью предложенного алгоритма исследуем на устойчивость малые колебания оси гироскопа (на стадии его разгона) с переменным кинетическим моментом [13], которые описываются системой дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\dot{x} = (A_0 t + A_1)x, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -K & (hR) \end{pmatrix},$$

где

$$x = (\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta})^T, \quad K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

α и β — углы отклонения гироскопа, h определяется начальным кинетическим моментом, составляющие $(k_{11}\alpha + k_{12}\beta)$ и $(k_{21}\alpha + k_{22}\beta)$ описывают действие позиционных сил. После замены

$$x = S_0\Bigl(E + \sum_1^2 H_k t^{-k}\Bigr)y, \quad S_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix},$$

аналогично предыдущему, получаем систему с почти диагональной матрицей

$$\dot{y} = (\Lambda_0 t + \Lambda_1 + Q_2 t^{-1} + O(t^{-2}))y, \quad \Lambda_0 = \mathrm{diag}\{0, 0, i, -i\}, \quad \Lambda_1 = h\Lambda_0,$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} Q_{21} & 0 \\ 0 & \overline{Q}_{22} \end{pmatrix}, \quad Q_{21} = \begin{pmatrix} k_{21} & k_{22} \\ -k_{11} & -k_{12} \end{pmatrix},$$

$$\overline{Q}_{22} = \mathrm{diag}\{(k_{12} - k_{21} + i(k_{11} + k_{22})),\ (k_{12} - k_{21} - i(k_{11} + k_{22}))\}/2.$$

Это позволяет найти область устойчивости $k_{11}k_{22} \geq k_{12}k_{21}$, $k_{12} = k_{21}$, малых колебаний осей гироскопа.

Литература

1. Ляпунов А.М. *Общая задача об устойчивости движения.* – М.: Гостехиздат, 1950. – 472 с.
2. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Ин. лит., 1958. – 474 с.
3. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* – М.: Наука, 1967. – 472 с.
4. Якубович В.А., Старжинский В.М. *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.* – М.: Наука, 1972.– 720 с.
5. Розо М. *Нелинейные колебания и теория устойчивости.* – М.: Наука, 1971. – 288 с.
6. Меркин Д.Р. *Введение в теорию устойчивости движения.* – М.: Наука, 1987. – 304 с.
7. Федорюк М.В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1983. – 352 с.
8. Магницкий Н.А. *Асимптотические методы анализа нестационарных управляемых систем.* – М.: Наука, 1992. – 180 с.
9. Коняев Ю.А. *Конструктивные методы исследования многоточечных краевых задач* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 2. – С. 57–61.
10. Коняев Ю.А. *Об одном методе исследования некоторых задач теории возмущений* // Матем. сб. –1993. – № 12. – С. 133–144.
11. Коняев Ю.А., Мартыненко Ю.Г. *Об устойчивости стационарных вращений симметричного твердого тела в переменном магнитном поле* // ПММ. – 1987. – Т. 51. – Вып. 3. – С. 375–381.
12. Коняев Ю.А. *Достаточные условия устойчивости решений некоторых классов обыкновенных дифференциальных уравнений в критических случаях* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 4. – С. 709–712.
13. Коняев Ю.А., Мартыненко Ю.Е. *Исследование устойчивости неавтономных систем дифференциальных уравнений квазиполиномиального типа* // Дифференц. уравнения. –1998. – Т. 34.– № 10. – С. 1427–1429.

Российский Университет
Дружбы Народов

Поступила
09.12.1997