ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 9 (424)

УДК 514.752

В.А. МИРЗОЯН

ПОДМНОГООБРАЗИЯ С СИММЕТРИЧЕСКИМИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМИ ФОРМАМИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА КАК ОГИБАЮЩИЕ

1. Введение. Формулировка результата

Как известно [1], подмногообразие M в пространстве постоянной кривизны $M_n(c)$ называется полусимметрическим, если его вторая фундаментальная форма (ф. ф.) α_2 удовлетворяет условию $\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y\alpha_2 = \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X\alpha_2$, где $\overline{\nabla}$ обозначает связность Ван дер Вардена-Бортолотти. Это условие равносильно симметричности ф. ф. $\alpha_4 = \overline{\nabla}\,\overline{\nabla}\alpha_2$.

В 1990 г. Ю.Г. Лумисте получил один из важнейших в теории полусимметрических подмногообразий результатов. Им была доказана следующая характеристическая

Теорема 1 ([1]). *Подмногообразие M в $M_n(c)$ является полусимметрическим тогда и только тогда, когда оно является огибающим второго порядка семейства симметрических* (*по Д. Ферусу* [2]) *подмногообразий.*

Симметрические подмногообразия аналитически характеризуются условием параллельности второй ф. ф. α_2, т. е. $\overline{\nabla}\alpha_2 = 0$ [2].

Теорема 1 сформировала новый взгляд на природу полусимметрических подмногообразий и открыла новые возможности в решении задач классификации и геометрического описания таких подмногообразий. Полное освещение результатов о полусимметрических подмногообразиях и подробная библиография даны в обзорной статье Ю.Г. Лумисте [3] (см. также статью автора [4]).

Приведенный выше результат Ю.Г. Лумисте можно обобщать и развивать в двух разных направлениях: в направлении усиления закона огибания и, наоборот, в направлении его ослабления. В настоящей работе рассматривается одна из возможностей обобщения теоремы 1 в первом из указанных направлений.

Как естественное обобщение огибающей 2-го порядка, вводится понятие огибающей высшего порядка (см. § 2), и затем теорема 1 распространяется на ф. ф. любого порядка. Основной результат выражается следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть m-мерное подмногообразие M класса C^∞ в евклидовом пространстве E_n имеет симметрические ф. ф. $\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_{s-1}$ ($s \geq 4$). Тогда ф. ф. α_s будет симметрической в том и только том случае, если M является огибающим $(s-2)$-го порядка семейства m-мерных подмногообразий, каждое из которых обладает следующими свойствами: все его ф. ф. до $(s-2)$-го порядка включительно являются симметрическими, а ф. ф. α_{s-2} кроме того, параллельна, т. е. $\overline{\nabla}\alpha_{s-2} = 0$.*

Работа написана при финансовой поддержке АО “ПРОМЕТЕЙ”.

2. Основные определения и формулы

Пусть $O(E_n)$ — главное расслоение ортонормированных реперов $\{x, e_1, \ldots, e_n\}$ в евклидовом пространстве E_n. Отождествляя точку x с ее радиус-вектором, будем иметь

$$dx = \omega^a e_a, \quad de_a = \omega_a^b e_b, \quad \omega_a^b + \omega_b^a = 0.$$

Отсюда путем внешнего дифференцирования получаются структурные уравнения

$$d\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b^a, \quad d\omega_a^b = \omega_a^c \wedge \omega_c^b.$$

Пусть M является m-мерным подмногообразием класса C^∞ в E_n. Тогда расслоение $O(E_n)$ может быть приведено к главному расслоению $O(M, E_n)$ адаптированных реперов [5], характеризуемых тем, что $e_i \in T_x(M)$ для всех $i = 1, \ldots, m$ и $e_\alpha \in T_x^\perp(M)$ для всех $\alpha = m+1, \ldots, n$. В силу этого и первой группы структурных уравнений имеем

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha, \tag{2.1}$$

где вторая группа уравнений получается из первой путем внешнего дифференцирования и последующего применения леммы Картана. Таким же путем из второй группы уравнений (2.1) получаются соотношения

$$\overline{\nabla} h_{ij}^\alpha = h_{ijk}^\alpha \omega^k, \quad h_{ijk}^\alpha = h_{ikj}^\alpha \ (= \overline{\nabla}_j h_{ik}^\alpha), \tag{2.2}$$

где $\overline{\nabla}$ — связность Ван дер Вардена-Бортолотти, а ковариантный дифференциал $\overline{\nabla} h_{ij}^\alpha$ определяется формулой

$$\overline{\nabla} h_{ij}^\alpha = dh_{ij}^\alpha + h_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha - h_{kj}^\alpha \omega_i^k - h_{ik}^\alpha \omega_j^k. \tag{2.3}$$

В (2.1) и (2.2) функции h_{ij}^α, h_{jik}^α, симметричные по нижним индексам, являются компонентами ф. ф. α_2 и α_3 соответственно. Это $T^\perp(M)$-значные формы, действующие, соответственно, по правилу

$$\alpha_2 : (X, Y) \mapsto h_{ij}^\alpha X^i Y^j e_\alpha, \quad \alpha_3 : (X, Y, Z) \mapsto h_{ijk}^\alpha X^i Y^j Z^k e_\alpha, \tag{2.4}$$

где $X = X^i e_i$, $Y = Y^j e_j$, $Z = Z^k e_k$. Из (2.2) следует, что $\alpha_3 = \overline{\nabla} \alpha_2$. Компоненты $h_{ijkl}^\alpha, h_{ijklp}^\alpha, \ldots,$ $h_{i_1 i_2 \cdots i_s}^\alpha \ldots$ ф. ф. $\alpha_4, \alpha_5, \ldots, \alpha_s, \ldots$ определяются соотношениями

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\nabla} h_{ijk}^\alpha = h_{ijkl}^\alpha \omega^l, \\ \overline{\nabla} h_{ijkl}^\alpha = h_{ijklp}^\alpha \omega^p, \\ \ldots \\ \ldots \\ \overline{\nabla} h_{i_1 i_2 \cdots i_{s-1}}^\alpha = h_{i_1 i_2 \cdots i_{s-1} i_s}^\alpha \omega^{i_s}, \\ \ldots \end{array} \right. \tag{2.5}$$

где левые части раскрываются по той же схеме, что и в (2.3). Формы $\alpha_4, \alpha_5, \ldots, \alpha_s, \ldots$ также являются $T^\perp(M)$-значными, и их действие определяется таким же образом, как и в (2.4). Однако эти формы, в отличие от форм α_2 и α_3, симметричны только по первым трем аргументам и в общем случае симметрическими не являются. Из соотношений (2.5) следует, что $\alpha_4 = \overline{\nabla} \alpha_3$, $\alpha_5 = \overline{\nabla} \alpha_4, \ldots, \alpha_s = \overline{\nabla} \alpha_{s-1}$ и т. д.

Дифференцируя внешним образом уравнения (2.2) и все уравнения системы (2.5), получим

$$\begin{cases} h^\alpha_{ijkl}\omega^l\wedge\omega^k = h^\alpha_{kj}\Omega^k_i + h^\alpha_{ik}\Omega^k_j - h^\beta_{ij}\Omega^\alpha_\beta,\\ h^\alpha_{ijklp}\omega^p\wedge\omega^l = h^\alpha_{ljk}\Omega^l_i + h^\alpha_{ilk}\Omega^l_j + h^\alpha_{ijl}\Omega^l_k - h^\beta_{ijk}\Omega^\alpha_\beta,\\ \dots\\ \dots\\ h^\alpha_{i_1i_2\cdots i_{s-1}i_s}\omega^{i_s}\wedge\omega^{i_{s-1}} = h^\alpha_{ki_2\cdots i_{s-2}}\Omega^k_{i_1} + \dots + h^\alpha_{i_1i_2\cdots k}\Omega^k_{i_{s-2}} - h^\beta_{i_1i_2\cdots i_{s-2}}\Omega^\alpha_\beta,\\ \dots \end{cases} \tag{2.6}$$

где

$$\Omega^j_i = d\omega^j_i - \omega^k_i\wedge\omega^j_k = -\sum_\alpha h^\alpha_{i[k}h^\alpha_{l]j}\omega^k\wedge\omega^l, \tag{2.7}$$

$$\Omega^\beta_\alpha = d\omega^\beta_\alpha - \omega^\gamma_\alpha\wedge\omega^\beta_\gamma = -\sum_i h^\alpha_{i[k}h^\beta_{l]i}\omega^k\wedge\omega^l \tag{2.8}$$

являются 2-формами кривизны связности Ван дер Вардена-Бортолотти $\overline{\nabla} = \nabla\oplus\nabla^\perp$. Здесь ∇ обозначает риманову связность на подмногообразии M, а $\nabla^\perp$ — нормальную связность. В (2.7) и (2.8) коэффициенты

$$R^j_{ikl} = -\sum_\alpha h^\alpha_{i[k}h^\alpha_{l]j}, \quad R^\beta_{\alpha kl} = -\sum_i h^\alpha_{i[k}h^\beta_{l]i} \tag{2.9}$$

при $\omega^k\wedge\omega^l$ являются компонентами тензоров кривизны R и $R^\perp$ связностей ∇ и $\nabla^\perp$ соответственно. Если $R=0$, то подмногообразие называется локально-евклидовым. Если $R^\perp=0$, то говорят о подмногообразии с плоской нормальной связностью.

Из системы (2.6) непосредственно следует, что ф. ф. $\alpha_4,\dots,\alpha_s$ подмногообразия M одновременно будут симметрическими тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} h^\alpha_{kj}\Omega^k_i + h^\alpha_{ik}\Omega^k_j - h^\beta_{ij}\Omega^\alpha_\beta = 0,\\ h^\alpha_{ljk}\Omega^l_i + h^\alpha_{ilk}\Omega^l_j + h^\alpha_{ijl}\Omega^l_k - h^\beta_{ijk}\Omega^\alpha_\beta = 0,\\ \dots\\ \dots\\ h^\alpha_{ki_2\cdots i_{s-2}}\Omega^k_{i_1} + \dots + h^\alpha_{i_1i_2\cdots k}\Omega^k_{i_{s-2}} - h^\beta_{i_1i_2\cdots i_{s-2}}\Omega^\alpha_\beta = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Очевидно, что у локально-евклидовых подмногообразий с плоской нормальной связностью ф. ф. всех порядков являются симметрическими.

Пусть M и $\widetilde{M}$ — два m-мерных подмногообразия в E_n, имеющие общую точку x_0. Говорят, что x_0 является точкой касания 2-го порядка для M и $\widetilde{M}$, если для каждой кривой $\gamma\in M$, проходящей через x_0, существует кривая $\tilde\gamma\in\widetilde{M}$, также проходящая через x_0 и имеющая с γ общие касательную и вектор кривизны. Ю.Г. Лумисте [1] показал, что касание 2-го порядка в точке x_0 равносильно совпадению касательных пространств $T_{x_0}(M)$ и $T_{x_0}(\widetilde{M})$ и вторых ф. ф. α_{2x_0} и $\tilde\alpha_{2x_0}$ в этой точке. Как в первой, так и во второй форме понятие касания 2-го порядка допускает естественные обобщения. Здесь мы рассматриваем обобщение этого понятия только во второй форме.

Будем говорить, что два m-мерных подмногообразия M и $\widetilde{M}$ в E_n имеют в общей точке x_0 касание s-го порядка ($s\geq 2$) если в этой точке совпадают 1) касательные пространства $T_{x_0}(M)$ и $T_{x_0}(\widetilde{M})$, 2) все соответствующие ф. ф. подмногообразий M и $\widetilde{M}$ до s-го порядка включительно, т. е. $\alpha_{rx_0} = \tilde\alpha_{rx_0}$, $r = 2,3,\dots,s$.

Такое понимание касания s-го порядка подмногообразий, конечно, отличается от общепринятого (см., напр., [6], сс. 150, 190) и имеет ряд преимуществ. Подтверждением этому могут служить результаты настоящей работы.

Следующее определение обобщает понятие огибающей 2-го порядка.

Определение. m-мерное подмногообразие M в E_n будем называть огибающим s-го ($s \geq 2$) порядка некоторого семейства m-мерных подмногообразий $\{K\}$, если в каждой своей точке оно имеет касание s-го порядка с каким-либо подмногообразием этого семейства.

Это определение огибающей s-го порядка не является единственно возможным. Другие подходы в теории огибающих освещены, например, в монографии В.А. Залгаллера [7] и цитированной там литературе.

3. Доказательство теоремы 2. Необходимость

Доказательство будем проводить с помощью метода подвижного репера Картана и теории вполне интегрируемых дифференциальных систем Фробениуса-Картана. Идейная сторона доказательства такая же, как и в [1], и в ряде мест мы почти дословно повторяем ход рассуждений в [1] с учетом условий теоремы 2. Однако техническое осуществление доказательства необходимости условий теоремы 2 гораздо сложнее соответствующего доказательства в [1].

Пусть $\mathfrak{M}^s$ обозначает многообразие всех наборов $(x, T, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_s)$ в E_n, где x — произвольная точка, T — m-мерная плоскость, проходящая через x, а γ_r ($r = 2, \ldots, s$) — r-линейное отображение из $T \times \cdots \times T$ (r раз) в $T^\perp$ (ортогональное дополнение к T в E_n), причем γ_2 и γ_3 являются симметрическими. Число s ($s \geq 2$) будем называть длиной набора. Если дополним такой набор адаптированным ортонормированным репером $(x, e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n)$, где $e_i \in T$, $e_\alpha \in T^\perp$, $i = 1, \ldots, m$, $\alpha = m+1, \ldots, n$, то получим реперированный набор. Многообразие всех реперированных наборов длины s в E_n обозначим через $\mathfrak{M}^s_{\mathrm{fr}}$. Локальными координатами в $\mathfrak{M}^s_{\mathrm{fr}}$ являются: x^a ($a = 1, \ldots, n$) — координаты точки x; параметры φ^p ($p = 1, \ldots, n(n-1)/2$) таких ортогональных матриц A в $O(n, R)$, которые преобразуют базис $\{\partial/\partial x^a\}$ в базис $\{e_a\}$ после стандартной ортогонализации; компоненты $h^\alpha_{ij}, h^\alpha_{ijk}, \ldots, h^\alpha_{ijk\cdots l}$ форм $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_s$ (соответственно) в последнем базисе.

На многообразии $\mathfrak{M}^s_{\mathrm{fr}}$ рассмотрим дифференциальную систему

$$\begin{cases} \omega^\alpha = 0, \\ \omega^\alpha_i - h^\alpha_{ij}\omega^j = 0, \\ dh^\alpha_{ij} + h^\beta_{ij}\omega^\alpha_\beta - h^\alpha_{kj}\omega^k_i - h^\alpha_{ik}\omega^k_j - h^\alpha_{ijk}\omega^k = 0, \\ \ldots \\ \ldots \\ dh^\alpha_{i_1\cdots i_{s-3}} + h^\beta_{i_1\cdots i_{s-3}}\omega^\alpha_\beta - h^\alpha_{k\cdots i_{s-3}}\omega^k_{i_1} - \cdots - h^\alpha_{i_1\cdots k}\omega^k_{i_{s-3}} - h^\alpha_{i_1\cdots i_{s-3}i_{s-2}}\omega^{i_{s-2}} = 0, \\ dh^\alpha_{i_1\cdots i_{s-2}} + h^\beta_{i_1\cdots i_{s-2}}\omega^\alpha_\beta - h^\alpha_{k\cdots i_{s-2}}\omega^k_{i_1} - \cdots - h^\alpha_{i_1\cdots k}\omega^k_{i_{s-2}} = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

в предположении, что функции $h^\alpha_{ij}, h^\alpha_{ijk}, \ldots, h^\alpha_{i_1\cdots i_{s-2}}$ удовлетворяют условиям (2.10), где Ω^j_i, Ω^β_α определяются через h^α_{ij} по формулам (2.7) и (2.8). Тогда путем прямого вычисления можно убедиться, что внешние дифференциалы левых частей уравнений системы (3.1) равны нулю в силу уравнений самой системы. Это значит, что система (3.1) вполне интегрируема.

Два реперированных набора длины s будем называть эквивалентными, если $e'_i = A^j_i e_j$, $e'_\alpha = A^\beta_\alpha e_\beta$, где $\|A^j_i\| \in O(m, R)$, $\|A^\beta_\alpha\| \in O(n-m, R)$. Тогда

$$'h^\alpha_{i_1\cdots i_r} = h^\beta_{j_1\cdots j_r} A^\alpha_\beta A^{j_1}_{i_1} \cdots A^{j_r}_{i_r}$$

для любого $r = 2, 3, \ldots, s$. Эта эквивалентность определяет отображение $\mathfrak{M}^s_{\mathrm{fr}} \to \mathfrak{M}^s$, которое проецирует систему (3.1) в корректно определенную, вполне интегрируемую дифференциальную систему на $\mathfrak{M}^s$. Отсюда следует, что для каждого фиксированного набора из $\mathfrak{M}^s$ локально существует единственное интегральное подмногообразие этой дифференциальной системы, которое имеет максимально возможную размерность, равную размерности инволютивного распределения на $\mathfrak{M}^s$, соответствующего этой системе. Уравнения системы (3.1) показывают, что фундаментальными формами этого подмногообразия будут $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_{s-2}$. В силу условий (2.10) все эти формы являются симметрическими. Последнее уравнение системы (3.1) показывает, что форма γ_{s-2} параллельна.

Пусть m-мерное подмногообразие M в E_n имеет симметрические ф. ф. до s-го порядка включительно, где $s \geq 4$. Тогда каждый фиксированный набор $(x, T_x(M), \alpha_{2x}, \ldots, \alpha_{sx})$ подмногообразия M определяет, как было доказано выше, некоторое m-мерное подмногообразие $\widetilde{M}$ (проходящее через точку x), порожденное соответствующим интегральным подмногообразием системы (3.1). Так как в точке $x \in M \cap \widetilde{M}$ наборы $(x, T_x(M), \alpha_{2x}, \ldots, \alpha_{(s-2)x})$ и $(x, T_x(M), \tilde{\alpha}_{2x}, \ldots, \tilde{\alpha}_{(s-2)x})$ совпадают, то M является огибающим $(s-2)$-го порядка всех таких $\widetilde{M}$. Необходимость условий теоремы 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Достаточность

Пусть подмногообразие M в E_n имеет симметрические ф. ф. $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_{s-1}$ $(s \geq 4)$ и пусть M является огибающим $(s-2)$-го порядка семейства подмногообразий $\{G\}$, каждое из которых обладает следующими свойствами: все его ф. ф. до $(s-2)$-го порядка включительно являются симметрическими, а ф. ф. порядка $s-2$ является, кроме того, параллельной. Докажем, что ф. ф. α_s подмногообразия M симметрическая.

Действительно, пусть x_0 — произвольная точка подмногообразия M, а $\widetilde{M}$ — подмногообразие семейства $\{G\}$, которое в точке x_0 имеет с M касание $(s-2)$-го порядка. Тогда в точке x_0 выполняются равенства

$$\alpha_{2x_0} = \tilde{\alpha}_{2x_0},\ \alpha_{3x_0} = \tilde{\alpha}_{3x_0},\ \ldots,\ \alpha_{(s-2)x_0} = \tilde{\alpha}_{(s-2)x_0}, \tag{4.1}$$

где $\tilde{\alpha}_r$ $(r = 2, 3, \ldots, s-2)$ — ф. ф. подмногообразия $\widetilde{M}$. Так как $\overline{\nabla}\tilde{\alpha}_{s-2} = 0$, то $\tilde{h}^{\alpha}_{i_1\cdots i_s} = 0$ и на основании последнего расписанного уравнения системы (2.6) будем иметь

$$\tilde{h}^{\alpha}_{k\cdots i_{s-2}}\widetilde{\Omega}^k_{i_1} + \cdots + \tilde{h}^{\alpha}_{i_1\cdots k}\widetilde{\Omega}^k_{i_{s-2}} - \tilde{h}^{\beta}_{i_1\cdots i_{s-2}}\Omega^{\alpha}_{\beta} = 0,$$

где $\widetilde{\ }$ обозначает, что объект относится к $\widetilde{M}$. Учитывая (2.7), (2.8), легко показать, что последнее условие равносильно следующему:

$$\widetilde{R}_{i_s i_{s-1}}{}^{k}_{i_1}\tilde{h}^{\alpha}_{k\cdots i_{s-2}} + \cdots + \widetilde{R}_{i_s i_{s-1}}{}^{k}_{i_{s-2}}\tilde{h}^{\alpha}_{i_1\cdots k} - \widetilde{R}^{\alpha}_{\beta i_s i_{s-1}}\tilde{h}^{\beta}_{i_1\cdots i_{s-2}} = 0, \tag{4.2}$$

которое является алгебраическим (!) условием на формы $\tilde{\alpha}_2$ и $\tilde{\alpha}_{s-2}$. Равенство (4.2) выполняется, в частности, и в точке x_0. В силу первого и последнего равенств в (4.1) заключаем, что в точке x_0 компоненты $h^{\alpha}_{i_1\cdots i_{s-2}}$ ф. ф. α_{s-2} удовлетворяют такому же уравнению, что и (4.2). Это равносильно симметричности $h^{\alpha}_{i_1\cdots i_s}$ по двум последним нижним индексам. Так как $\overline{\nabla}h^{\alpha}_{i_1\cdots i_{s-1}} = h^{\alpha}_{i_1\cdots i_{s-1}i_s}\omega^{i_s}$ и $h^{\alpha}_{i_1\cdots i_{s-1}}$ симметричны по нижним индексам по условию теоремы, то $h^{\alpha}_{i_1\cdots i_s}$ будут симметричными в точке x_0 по всем нижним индексам. Следовательно, в силу произвольности x_0 ф. ф. α_s является симметрической. Теорема 2 доказана.

Литература

1. Lumiste Ü. *Semi-symmetric submanifold as the second-order envelope of symmetric submanifolds* // Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. – 1990. – V. 39. – № 1. – P. 1–8.
2. Ferus D. *Symmetric submanifolds of Euclidean space* // Math. Ann. – 1980. – Bd. 247. – № 1. – P. 81–93.
3. Лумисте Ю.Г. *Полусимметрические подмногообразия* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1991. – Т. 23. – С. 3–28.
4. Мирзоян В.А. Ric-*полусимметрические подмногообразия* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1991. – Т. 23. – С. 29–66.

5. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 2. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
6. Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В. *Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современ. пробл. матем. – 1988. – Т. 28. – С. 5–289.
7. Залгаллер В.А. *Теория огибающих.* – М.: Наука, 1975. – 104 с.

Государственный инженерный
университет Армении

Поступила
10.07.1995