Известия вузов. Математика
2013, №2, с. 49–55

http://old.kpfu.ru/journals/izv_ vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Н.О. КОТЕЛИНА, А.Б. ПЕВНЫЙ

ВЗВЕШЕННЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ПОЛУДИЗАЙНЫ И КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ПО СФЕРЕ

Аннотация. Рассматриваются взвешенные сферические полудизайны — системы точек на сфере специального вида, приводится новое доказательство необходимого и достаточного условия для того, чтобы система точек на сфере была взвешенным сферическим полудизайном. С помощью данного критерия открываются новые пути для построения кубатурных формул для вычисления интегралов по сфере. Приводятся примеры построения кубатурных формул со степенью точности 5 и 9.

Ключевые слова: взвешенный сферический полудизайн, кубатурная формула.

УДК: 519.615

1. Введение. Зафиксируем натуральные числа $n \geq 2$ и четное t. Используем скалярное произведение $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x,\, x\rangle}$. Введем обозначение для единичной сферы $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.

Определение 1. Пара (Φ, W), где $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$, $W = (W_1, \ldots, W_m) \in \mathbb{R}^m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} W_i = 1$, называется взвешенным сферическим t-полудизайном, если

$$\sum_{i=1}^{m} W_i[\langle\varphi_i, x\rangle]^t = c_t\|x\|^t \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где

$$c_t = \frac{(t-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+t-2)}. \tag{2}$$

Числа W_i называются весами.

Тождество (1) будем называть тождеством Варинга в честь английского математика Э. Варинга (1736–1798), который интересовался представлением формы $(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{t}{2}}$ в виде суммы t-х степеней линейных форм [1].

Предложение. *Пусть (Φ, W) — взвешенный сферический t-полудизайн. Тогда (Φ, W) — взвешенный сферический p-полудизайн для $p = 2, 4, \ldots, t$.*

Доказательство. Введем обозначения

$$S_p(x) = \sum_{i=1}^{m} W_i[\langle\varphi_i,\, x\rangle]^p, \quad \omega_p(x) = \|x\|^p, \quad p = 2, 4, \ldots, t.$$

Поступила 16.01.2012

Применим к обеим частям тождества (1) оператор Лапласа Δ. После первого применения оператора Лапласа получим равенство

$$t(t-1)S_{t-2}(x) = c_t t(t+n-2)\omega_{t-2}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда следует, что $(\Phi,\, W)$ является взвешенным сферическим полудизайном порядка $(t-2)$ с константой

$$c_{t-2} = c_t \frac{t+n-2}{t-1} = \frac{(t-3)!!}{n(n+2)\cdots(n+t-4)}.$$

Применяя далее оператор Лапласа, получаем, что $(\Phi,\, W)$ является взвешенным сферическим полудизайном порядков $t-4, t-6, \ldots, 2$. $\square$

В работе [2] приведено определение сферического t-дизайна с помощью системы тождеств. Дадим аналогичное определение взвешенного сферического t-дизайна. Пусть теперь t — натуральное число, условие четности не требуется.

Определение 2. Пара $(\Phi,\, W)$, где $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$, $W \in \mathbb{R}^m$, $\sum\limits_{i=1}^m W_i = 1$, называется взвешенным сферическим t-дизайном, если для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняются тождества

$$\sum_{i=1}^m W_i[\langle \varphi_i, x\rangle]^p = \begin{cases} 0, & p \text{ нечетное, } p \le t; \\ c_p\|x\|^p, & p \text{ четное, } \ p \le t. \end{cases} \tag{3}$$

2. Взвешенный сферический 4-полудизайн. Приведем пример взвешенного сферического полудизайна. В [1] упоминается тождество Лукаса (1877)

$$8\sum_{i=1}^3 x_i^4 + \sum_4 (x_1 \pm x_2 \pm x_3)^4 = 12\|x\|^4, \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{4}$$

Здесь запись $\sum\limits_4 (x_1 \pm x_2 \pm x_3)^4$ означает, что суммирование ведется по всевозможным комбинациям знаков $+$, $-$. Всего таких комбинаций будет четыре. Из (4) получим тождество Варинга и взвешенный сферический 4-полудизайн. Для этого в правой части нужно получить $c_4\|x\|^4$. Заметим, что при $n=3$ константа c_4 равна $\frac{1}{5}$, и тогда тождество Варинга будет иметь вид

$$\frac{2}{15}\sum_{i=1}^3 x_i^4 + \frac{1}{60}\sum^4 (x_1 \pm x_2 \pm x_3)^4 = \frac{1}{5}\|x\|^4.$$

Рассмотрим орты e_i, $i \in \overline{1,3}$, и векторы $\left\{\varphi_i\right\}_{i=1}^4 = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1, \pm 1, \pm 1)\right\}$. Перепишем последнее тождество с учетом введенных обозначений

$$\frac{2}{15}\sum_{i=1}^3 [\langle e_i, x\rangle]^4 + \frac{3}{20}\sum_{i=1}^4 [\langle \varphi_i, x\rangle]^4 = \frac{1}{5}\|x\|^4. \tag{5}$$

Отсюда следует, что $(\Phi,\, W)$, где

$$\Phi = \{e_i,\ i \in \overline{1,3};\ \varphi_i,\ i \in \overline{1,4}\}, \quad W = \left(\tfrac{2}{15}, \tfrac{2}{15}, \tfrac{2}{15}, \tfrac{3}{20}, \tfrac{3}{20}, \tfrac{3}{20}, \tfrac{3}{20}\right),$$

является взвешенным сферическим 4-полудизайном. Рассмотрим пару (Φ_0, W_0), где

$$\Phi_0 = \{\pm e_i,\ i \in \overline{1,3};\ \pm\varphi_i,\ i \in \overline{1,4}\}, \quad W_0 = \left(\tfrac{1}{15}, \ldots, \tfrac{1}{15}, \tfrac{3}{40}, \ldots, \tfrac{3}{40}\right)$$

(в W_0 $\frac{1}{15}$ входит шесть раз, $\frac{3}{40}$ — восемь раз). Тогда (Φ_0, W_0) будет взвешенным сферическим 5-дизайном. В системе (3) тождества для четных $p \le 5$ выполняются в силу (5) и предложения, сформулированного выше, а тождества для нечетных $p \leq 5$ выполняются в силу симметричности (Φ_0, W_0).

Существует простая геометрическая интерпретация векторов из системы Φ_0: $\pm e_i$ — вершины октаэдра, $\pm\varphi_i$ — проекции середин граней октаэдра на сферу S^2 [3].

3. Необходимое и достаточное условие для взвешенного сферического полудизайна. Пусть t четное, $t \geq 2$. Справедлива

Теорема. *Для того чтобы пара (Φ, W), где $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$, $W \in \mathbb{R}^m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} W_i{=}1$, была взвешенным сферическим t-полудизайном, необходимо и достаточно выполнения равенства*

$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} Q(x)\,dS = \sum_{i=1}^{m} W_i Q(\varphi_i) \tag{6}$$

для любого однородного полинома $Q(x)$ степени t. Здесь σ_n — площадь сферы S^{n-1}, $\sigma_n = 2\pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma(\frac{n}{2})$.

Напомним, что однородный полином степени t представляется формулой

$$Q(x) = \sum_{|k|=t} a(k)x^k, \tag{7}$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$ — вектор с целыми неотрицательными компонентами (мультииндекс), $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $x^k = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$.

Замечание. Для сферических дизайнов с равными весами эту теорему доказал В.А. Юдин [2]. Ниже приводится доказательство, основанное на другой идее. Рассматриваемая теорема открывает новые пути построения кубатурных формул для вычисления интегралов по сфере S^{n-1}.

Доказательство. Необходимость. Пусть (Φ, W) — взвешенный сферический t-полудизайн. Тогда выполняется тождество (1)

$$S(x) := \sum_{i=1}^{m} W_i[\langle\varphi_i, x\rangle]^t = c_t\|x\|^t \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

К вектору $\varphi_i = (\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{in})$ применим мультииндексную технику

$$[\langle\varphi_i, x\rangle]^t = \sum_{|k|=t} \frac{t!}{k!}(\varphi_{i1}x_1)^{k_1} \dots (\varphi_{in}x_n)^{k_n} = \sum_{|k|=t} \frac{t!}{k!}\varphi_i^k x^k.$$

Здесь $k = (k_1, \dots, k_n)$ — мультииндекс, $k! = k_1! \cdots k_n!$. Для $S(x)$ получим выражение

$$S(x) = \sum_{|k|=t} \frac{t!}{k!}\left(\sum_{i=1}^{m} W_i\varphi_i^k\right)x^k.$$

Значит, $S(x)$ — это однородный полином степени t. Введем обозначения $s = \frac{t}{2}$ и $y_i = x_i^2$ для $i = 1, \dots, n$. Тогда правая часть в (1) запишется в виде

$$R(x) := c_t\|x\|^t = c_t(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{t}{2}} = c_t(y_1 + \dots + y_n)^s = c_t\sum_{|l|=s}\frac{s!}{l!}y^l = c_t\sum_{|l|=s}\frac{s!}{l!}x^{2l}.$$

Функция $R(x)$ также является однородным полиномом степени t. Так как $S(x) \equiv R(x)$, то их коэффициенты при одинаковых степенях x равны. Рассмотрим два случая.

Пусть $k = (k_1, \dots, k_n)$ и хоть одно k_j нечетно. Тогда

$$\frac{t!}{k!} \sum_{i=1}^{m} W_i \varphi_i^k = 0. \tag{8}$$

Пусть в $k = (k_1, \dots, k_n)$ все k_j четные, $k_j = 2l_j$, $l_j \in \mathbb{Z}$, $l_j \geq 0$. Тогда $k = 2l$ и

$$\frac{t!}{k!} \sum_{i=1}^{m} W_i \varphi_i^k = c_t \frac{s!}{l!}. \tag{9}$$

Так как любой однородный полином степени t представляется в виде (7), то достаточно доказать, что равенство (6) выполняется для $Q(x) = x^k$, $|k| = t$. Здесь $x^k = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$, где $|k| = t$. Если хоть одно k_j нечетно, то в силу (8) имеем

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} x^k \, dS = 0 = \sum_{i=1}^{m} W_i \varphi_i^k,$$

т. е. для $Q(x) = x^k$ выполняется равенство (6).

Пусть теперь k представляется в виде $k = 2l$, где $l = (l_1, \dots, l_n)$, $|l| = s$. В левой части (6) получим интеграл ([3], формула (7.21)). Считаем, что $(-1)!! = 1$,

$$I(k) := \frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} x^k \, dS = \frac{(k_1 - 1)!! \cdots (k_n - 1)!!}{n(n+2) \cdots (n + |k| - 2)}. \tag{10}$$

В правой части (6) стоит сумма, которая в силу (9) представляется в виде

$$T(k) := \sum_{i=1}^{m} W_i \varphi_i^k = \frac{k!}{t!} c_t \cdot \frac{s!}{l!} = \frac{k_1! \cdots k_n!}{t!} \cdot \frac{(t-1)!!}{n(n+2) \cdots (n+t-2)} \cdot \frac{s!}{l_1! \cdots l_n!}.$$

Имеем

$$\frac{(t-1)!!}{t!} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots t} = \frac{1}{2^s s!}.$$

Далее, при четных $k_1, \dots, k_n$ справедливы равенства

$$k_j! = (k_j - 1)!! 2^{l_j} l_j!,$$
$$k_1! \cdots k_n! = (k_1 - 1)!! \cdots (k_n - 1)!! 2^s l_1! \cdots l_n!.$$

Значит,

$$T(k) = \frac{(k_1 - 1)!! \cdots (k_n - 1)!! 2^s l_1! \cdots l_n!}{2^s s!} \cdot \frac{s!}{l_1! \cdots l_n!} \cdot \frac{1}{n(n+2) \cdots (n+t-2)} =$$
$$= \frac{(k_1 - 1)!! \cdots (k_n - 1)!!}{n(n+2) \cdots (n+t-2)}.$$

Приходим к равенству $I(k) = T(k)$. Значит, для $Q(x) = x^k$ выполняется равенство (6).

Необходимость доказана.

Достаточность доказывается так же, как и необходимость, но рассуждениями “в обратном порядке”. □

4. Использование теоремы в части необходимости. Покажем, как можно использовать теорему в части необходимости. Пусть (Φ, W) — взвешенный сферический t-полудизайн. Тогда для любого однородного полинома $Q(x)$ степени t справедливо равенство

$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} Q(x)\,dS = \sum_{i=1}^{m} W_i Q(\varphi_i). \tag{11}$$

Так как $(\Phi,\, W)$ является также p-полудизайном для $p = 2, 4, \ldots, t$, то равенство (11) выполняется также для любого полинома вида $Q(x) = \sum\limits_{|i|=p} a(i)x^i$, $p = 2, 4, \ldots, t$. Равенство (11) выполняется и для $p = 0$. В этом случае имеем $Q(x) \equiv C$ и $\frac{1}{\sigma_n} C\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{m} W_i C = C$. Чтобы кубатурная формула (11) точно интегрировала полиномы нечетной степени, добавляют узлы $-\varphi_1, -\varphi_2, \ldots, -\varphi_m$. Получаем кубатурную формулу

$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} Q(x)\,dS \approx \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} W_i (Q(\varphi_i) + Q(-\varphi_i)). \tag{12}$$

Такая формула будет точной для любого полинома $Q(x)$ степени $\le t+1$. Действительно, любой полином степени не выше $t+1$ представляется в виде $Q(x) = \sum\limits_{p=0}^{t+1} Q_p(x)$, где $Q_p(x)$ — однородный полином степени p.

5. Кубатурная формула со степенью точности 5. Вернемся к системе (Φ_0, W_0) из примера в п. 3. Система Φ_0 порождает кубатурную формулу со степенью точности $d = 5$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} f(x)\,dS \approx \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{3}\big(f(e_i) + f(-e_i)\big) + \frac{3}{40}\sum_{i=1}^{4}\big(f(\varphi_i) + f(-\varphi_i)\big). \tag{13}$$

Действительно, формула (13) будет точна для любого полинома $f(x)$ степени не выше 5. Легко проверяется, что она не точна для $f(x) = x_1^6$. В этом случае $\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} x_1^6\,dS = \frac{1}{7}$, а правая часть равна $\frac{7}{45}$. Формулу (13) будем называть октаэдрической.

6. Кубатурная формула со степенью точности 9. Приведем еще один пример построения кубатурной формулы. Данная кубатурная формула встречается у В.И. Лебедева [4]. Наш способ построения отличается от способа В.И. Лебедева. В $\mathbb{R}^3$ рассмотрим множества векторов $\{x_i^{(0)}\}_{i=1}^{6} = \{\pm e_i\}_{i=1}^{3}$ — вершины октаэдра, $\{x_i^{(1)}\}_{i=1}^{8} = \big\{\frac{1}{\sqrt{3}}(\pm1, \pm1, \pm1)\big\}$ — проекции центров граней на сферу. Последняя запись подразумевает, что используются все восемь возможных комбинаций знаков $\pm$. Получившиеся восемь векторов обозначены $x_i^{(1)}$, $i \in \overline{1,8}$. На каждом ребре октаэдра с вершинами $\{\pm e_i\}_{i=1}^{3}$ возьмем по две симметрично расположенные точки a и b. Пусть, например, это ребро соединяет вершины $V_1 = (\pm1, 0, 0)$ и $V_2 = (0, \pm1, 0)$. Тогда $a = (\pm(1-\lambda), \pm\lambda, 0)$, $b = (\pm\lambda, \pm(1-\lambda), 0)$, где $\lambda \in (0, 1)$.

Проектируем все получившиеся точки на S^2 и получаем двадцать четыре узла следующего вида:

$$\{x_i^{(2)}\}_{i=1}^{24} = \{(\pm p, \pm q, 0), (\pm q, \pm p, 0), (\pm p, 0, \pm q), (\pm q, 0, \pm p), (0, \pm p, \pm q), (0, \pm q, \pm p)\},$$

где $p^2 + q^2 = 1$. Найдем p из интервала $(0, 1)$, при котором система

$$\Phi = \{x_i^{(0)}\}_{i=1}^{6} \cup \{x_i^{(1)}\}_{i=1}^{8} \cup \{x_i^{(2)}\}_{i=1}^{24}$$

будет сферическим взвешенным 9-дизайном. Для этого при некоторых A, B, C, p должно выполняться тождество Варинга

$$A\sum_{i=1}^{6}[\langle x_i^{(0)},x\rangle]^8+B\sum_{i=1}^{8}[\langle x_i^{(1)},x\rangle]^8+C\sum_{i=1}^{24}[\langle x_i^{(2)},x\rangle]^8=c_8\|x\|^8$$

для всех $x\in\mathbb{R}^3$. Введем обозначения

$$S(x):=A\sum_{i=1}^{3}2x_i^8+B\sum_{8}\frac{1}{81}(\pm x_1\pm x_2\pm x_3)^8+C\sum_{24}\big[(\pm px_1\pm qx_2)^8+$$
$$+(\pm qx_1\pm px_2)^8+(\pm px_1\pm qx_3)^8+(\pm qx_1\pm px_3)^8+(\pm px_2\pm qx_3)^8+$$
$$+(\pm qx_2\pm px_3)^8\big]=\frac{1}{9}\|x\|^8=:R(x).$$

Так как $S(x)$ и $R(x)$ — симметрические полиномы от x_1^2, x_2^2, x_3^2, то, чтобы это тождество было верным, достаточно приравнять коэффициенты при x_1^8, $x_1^6x_2^2$, $x_1^4x_2^4$, $x_1^4x_2^2x_3^2$. Получим систему

$$\begin{aligned}2A+\frac{8}{81}B+4C(2p^8+2q^8)&=\frac{1}{9},\\ \frac{224}{81}B+4C(28p^6q^2+28q^6p^2)&=\frac{4}{9},\\ \frac{560}{81}B+4C(70p^4q^4+70q^4p^4)&=\frac{6}{9},\\ \frac{3360}{81}B&=\frac{12}{9},\end{aligned}$$

откуда следует $A=\frac{1}{105}$, $B=\frac{9}{280}$, $C=\frac{1}{35}$, $p=\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}=0.8880\ldots$, $q=\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}}=0.4597\ldots$. При этом $6A+8B+24C=1$. Таким образом, (Φ,W) является взвешенным сферическим 9-дизайном с вектором весов $W=(A,\ldots,A,B,\ldots,B,C,\ldots,C)$, где A встречается шесть раз, B — восемь раз, C — двадцать четыре раза. Можно записать кубатурную формулу

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S^2}f(x)\,dS\approx\frac{1}{105}\sum_{i=1}^{6}f\big(x_i^{(0)}\big)+\frac{9}{280}\sum_{i=1}^{8}f\big(x_i^{(1)}\big)+\frac{1}{35}\sum_{i=1}^{24}f\big(x_i^{(2)}\big),$$

причем степень точности данной формулы равна 9. Действительно, при подстановке $f(x)=x_1^{10}$ получим по формуле (10) $\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S^2}x_1^{10}\,dS=\frac{1}{11}$. С другой стороны, правая часть равна $\frac{17}{189}$.

Замечание. В статье В.И. Лебедева [4] используется другой способ определения неизвестных A, B, C, p. С помощью теоремы С.Л. Соболева [5] в [4] показывается, что для точности кубатурной формулы на полиномах степени не выше 9 достаточно, чтобы эта формула была точна для четырех полиномов 1, σ_2, σ_3, σ_2^2, где $\sigma_2=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2$, $\sigma_3=x_1^2x_2^2x_3^2$. Эти полиномы подставляются в формулу с неопределенными параметрами A, B, C, p и получаются четыре уравнения для их определения. При этом приходится вычислять интегралы по сфере от этих полиномов.

Литература

[1] Reznick B. *Sums of even powers of real linear forms*, Mem. Amer. Math. Soc. **96** (463), 1–155 (1992).

[2] Юдин В.А. *Вращения сферических дизайнов*, Проблемы передачи информации **36** (3), 39–45 (2000).

[3] Мысовских И.П. *Интерполяционные кубатурные формулы* (Наука, М., 1981).

[4] Лебедев В.И. *Значения узлов и весов квадратурных формул типа Гаусса–Маркова для сферы от 9-го до 17-го порядка точности, инвариантных относительно группы октаэдра с инверсией*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **15** (1), 48–54 (1975).

[5] Соболев С.Л. *О формулах механических квадратур на поверхности сферы*, Сиб. матем. журн. **3** (5), 769–796 (1962).

Н.О. Котелина

аспирант, кафедра прикладной математики,
Сыктывкарский государственный университет,
Октябрьский пр., д. 55, г. Сыктывкар, 167001, Россия,

`e-mail:` nkotelina@gmail.com

А.Б. Певный

профессор, кафедра прикладной математики,
Сыктывкарский государственный университет,
Октябрьский пр., д. 55, г. Сыктывкар, 167001, Россия,

`e-mail:` pevnyi@syktsu.ru

N.O. Kotelina and A.B. Pevnyi

Weighted spherical semidesigns and cubature formulae for calculating integrals on a sphere

Abstract. In this paper we study weighted spherical semidesigns, i.e., systems of points on a sphere of a specific type. We propose a new proof of the necessary and sufficient condition for a system of points on a sphere to be a weighted spherical semidesign. This criterion gives new approaches to the construction of cubature formulae for calculating integrals over a sphere with the degree of accuracy of 5 and 9.

Keywords: weighed spherical semidesign, cubature formula.

N.O. Kotelina

Postgraduate, Chair of Applied Mathematics,
Syktyvkar State University,
55 Oktyabr'skii Ave., Syktyvkar, 167001 Russia,

`e-mail:` nkotelina@gmail.com

A.B. Pevnyi

Professor, Chair of Applied Mathematics,
Syktyvkar State University,
55 Oktyabr'skii Ave., Syktyvkar, 167001 Russia,

`e-mail:` pevnyi@syktsu.ru