ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 6 (517)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 514.144

Ю.Л. ГИЛУЧ

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ АНАЛОГ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БРАЙАНТА И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ ЗАДАННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В $\mathbb{P}^3$

1. Введение. Особенностью проведенного в данной работе исследования контактного распределения на $\mathbb{P}^3$ является сопоставление геометрии этого распределения с геометрией вложенного в $\mathbb{P}^3$ интегрального многообразия.

Наиболее интересными однородными трехмерными вещественными контактными многообразиями являются 1) $(\mathbb{P}(T^*\mathbb{P}^2), \theta)$, где $\theta = x^0dy_0 + x^1dy_1 + x^2dy_2$; 2) $(\mathbb{P}^3, \omega)$, где $\omega = x^3dx^0 - 3x^2dx^1 + 3x^1dx^2 - x^0dx^3$.

По теореме Дарбу ([1], с. 328) трехмерные контактные многообразия локально изоморфны. Поскольку $(\mathbb{P}^3, \omega)$ и $(\mathbb{P}(T^*\mathbb{P}^2), \theta)$ являются примерами алгебраических многообразий, естественно поставить вопрос о существовании бирационального изоморфизма между ними, т. е. такого не всюду определенного изоморфизма, который сохраняет контактные структуры и задается рациональными функциями. Простой бирациональный изоморфизм, сохраняющий контактные структуры, был предложен Робертом Брайантом в [2], где решался вопрос о конформном представлении двумерных минимальных поверхностей и доказано, что все они получаются из римановых поверхностей. Важным техническим приемом был построенный там же бирациональный изоморфизм f из $\mathbb{P}(T^*\mathbb{CP}^2)$ в $\mathbb{CP}^3$ со стандартными контактными формами и доказанная им

Теорема 1 ([2]). *Пусть C — контактная кривая в $\mathbb{CP}^3$. Тогда C является прямой или имеет вид $f(\widetilde{D})$, где $\widetilde{D} \subset \mathbb{P}(T^*\mathbb{CP}^2)$ — горизонтальное поднятие приведенной и неприводимой плоской кривой $D \subset \mathbb{CP}^2$ степени, по крайней мере, 2.*

С помощью изоморфизма f каждая комплексная рациональная интегральная кривая получалась из рациональной алгебраической кривой на комплексной проективной плоскости с помощью двух операций: 1) поднятие кривой в $\mathbb{P}(T^*\mathbb{P}^2)$; 2) бирациональное отображение этого многообразия в $\mathbb{P}^3$.

Метод Брайанта позволяет решать различные вопросы. Так, проблемой является построение явных примеров однородных гладких лежандровых многообразий, которая легко разрешима [3] с применением конструкции Брайанта.

Основной целью данной работы является перенесение конструкции Брайанта в вещественную область и ее геометрическая интерпретация. В п. 2 найден вещественный аналог преобразования Брайанта.

Начиная с работ А. Фосса, Д.Н. Синцова [4], исследование контактных структур на трехмерных многообразиях проводилось с помощью изучения интегральных кривых заданного распределения. Поскольку контактная структура в $\mathbb{P}^3$ определяется нормкривой, показалось естественным охарактеризовать интегральные кривые и их частные классы, используя непосредственно нормкривую. Эта задача решается в п. 3.

Бирациональное преобразование, предложенное Брайантом, связывает геометрию обоих многообразий и сводит в ряде случаев вопросы, касающиеся интегральных кривых, к вопросам о кривых на проективной плоскости. Этот факт позволяет решать задачу о соединимости двух точек трехмерного проективного пространства рациональной интегральной кривой. Вопрос о соединимости двух точек кусочно интегральной кривой поставлен и решен Чжоу (1939) и Рашевским (1938). В 1963 году Смэйл (Smale) поставил вопрос о возможности соединить две точки C^∞-гладкой кривой. Эта задача была решена В.Н. Черненко [5]. В этой задаче идет речь о произвольной контактной структуре на произвольном гладком многообразии. Если в $\mathbb{P}^3$ задана контактная структура, то естественно поставить вопрос о соединимости двух точек рациональной интегральной кривой и определить наименьшую степень кривой, достаточной для решения задачи. Эта задача решается в п. 4.

2. Вещественный аналог преобразования Брайанта. Пусть $\mathbb{CP}^3$ — трехмерное комплексное проективное пространство. На нем задана стандартная структура, которая в аффинной карте $(1 : z_1 : z_2 : z_3)$ имеет вид $\theta = dz_1 - z_3 dz_2 + z_2 dz_3$. Пусть $D \subset \mathbb{CP}^2$ — приведенная и неприводимая над $\mathbb{C}$ кривая, и D_{reg} — гладкая часть D. Тогда точки D_{reg} вместе с касательными направлениями формируют кривую в $\mathbb{P}(T^*\mathbb{P}^2)$. Это дает поднятие D_{reg} в $\mathbb{P}(T^*\mathbb{P}^2)$. Замыкание Зариского этого поднятия в $\mathbb{P}(T^*\mathbb{P}^2)$ есть поднятие D в $\mathbb{P}(T^*\mathbb{P}^2)$. Оно называется [6] горизонтальным поднятием D и обозначается $\widetilde{D}$. Кривая $\widetilde{D}$ гладкая, если кривая D имеет только неразветвленные или простые особенности типа клюва.

Брайант определил [2] бирациональное контактное отображение $f : \mathbb{P}(T^*\mathbb{P}^2) \to \mathbb{CP}^3$, полагая $(x : y, [\lambda_1 : \lambda_2])$ как $(\lambda_1 : x\lambda_1 - \frac{1}{2}y\lambda_2 : y\lambda_1 : \frac{1}{2}\lambda_2)$, где (x, y) — координаты на $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}^2$, а (λ_1, λ_2) — однородные координаты слоя.

Существует естественная контактная структура на $\mathbb{P}(T^*\mathbb{P}^2)$ [6]. Бирациональное отображение f контактно в том смысле, что оно отображает контактные кривые в контактные кривые. Пусть $U_2 = \{x_2 = 0\} \subset \mathbb{CP}^2$ — аффинное открытое множество с аффинными координатами $(x, y) = (x_0/x_2, x_1/x_2)$. На U_2 мы можем отождествить слоевые координаты $[\lambda_1, \lambda_2]$ с $[-y_0, y_1]$. Таким образом, преобразование Брайанта может быть переопределено в виде [6]

$$f([x_0 : x_1 : x_2], [y_0 : y_1 : y_2]) = [2x_2y_0 : 2x_0y_0 + x_1y_1 : 2x_1y_0 : -x_2y_1].$$

Теорема 2 ([6]). *Пусть C — контактная кривая в $\mathbb{CP}^3$. Тогда C является прямой или имеет вид $f(\widetilde{D})$, где $\widetilde{D} \subset \mathbb{CP}^2$ — горизонтальное поднятие приведенной и неприводимой плоской кривой D степени, по крайней мере, 2.*

Теорема Брайанта сводит исследование контактных кривых в $\mathbb{CP}^3$ к исследованию алгебраических кривых в $\mathbb{CP}^2$ и их поднятий в $\mathbb{P}(T^*\mathbb{P}^2)$. Важным свойством отображения f является то, что оно является отображением, сохраняющим контактные формы, и это соответствие является рациональным.

Перенесем преобразование Брайанта в вещественную область и дадим его геометрическую характеристику.

Пусть $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ — трехмерное вещественное проективное пространство, порожденное векторным пространством $\mathbb{R}^4$.

Кокасательное пространство $T_A^*\mathbb{RP}^3$ к проективному пространству $\mathbb{RP}^3$ в точке $A = p(a)$ будем отождествлять с подпространством $\mathrm{Ann}\langle a\rangle \subset (\mathbb{R}^4)^*$, т. е. $T_A^*\mathbb{RP}^3$ будем рассматривать как совокупность линейных форм на $\mathbb{R}^4$, равных нулю на векторе a.

Проективизация кокасательного расслоения

$$\mathbb{P}(T^*\mathbb{P}^2) = \bigcup_{A \in \mathbb{P}^2} \mathbb{P}(T_A^*\mathbb{P}^2)$$

— многообразие всех проективных пространств $\mathbb{P}(T_A^*\mathbb{P}^2)$, порожденных кокасательными пространствами $T_A^*\mathbb{P}^2$ к $\mathbb{P}^2$ во всех его точках $A \in \mathbb{P}^2$.

Определение 1 ([7], с. 289). *Нуль-парой* в $\mathbb{P}^2$ называется пара (A, Ξ), где $A \in \mathbb{P}^2$ и $\Xi \in \check{\mathbb{P}}^2$. Нуль-пара называется *вырожденной*, если точка $A = p(a)$ и прямая $\Xi = p(\xi)$ инцидентны, т. е. $A \in \Xi$ (или, что эквивалентно, $\xi(a) = 0$).

Известно [8], что *многообразие вырожденных нуль-пар диффеоморфно проективизации* $\mathbb{P}(T^*\mathbb{P}^2)$ *кокасательного расслоения пространства* $\mathbb{P}^2$.

На многообразии $\mathbb{P}(T^*\mathbb{P}^2)$ каноническая структура задается уравнением

$$\theta = x^0 dy_0 + x^1 dy_1 + x^2 dy_2.$$

Многообразие $X_3 = \mathbb{P}(T^*\mathbb{P}^2)$ можно задать в произведении $\mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2$ биоднородным уравнением $x^i y_i = 0$, где $M = (x^0 : x^1 : x^2) \in \mathbb{P}^2$, $l = (y_0 : y_1 : y_2) \in \check{\mathbb{P}}^2$, а $\check{\mathbb{P}}^2$ — проективизация $(\mathbb{R}^3)^*$.

Для того чтобы представить произведение проективных алгебраических многообразий в виде проективного пространства, используем вложение Сегре ([9], с. 74) в инвариантной форме $s : \mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2 \to \mathbb{P}(\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R}))$. Если $(M,l) \in \mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2$, полагаем

$$s(M,l) = [x^i y_j e_i \otimes e^j] \in \mathbb{P}^8,$$

где e_0, e_1, e_2 и e^0, e^1, e^2 — двойственные базисы $\mathbb{R}^3$ и $(\mathbb{R}^3)^*$, а $\mathbb{P}^8$ — проективизация алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ вещественных (3×3)-матриц.

Уравнение $\operatorname{tr} M = 0$, $M \in \mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, задает в $\mathbb{P}^8$ гиперплоскость $\mathbb{P}^7$, и ограничение s на X_3 определяет вложение X_3 в проективизацию алгебры Ли $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ $\ s : X_3 \to \mathbb{P}^7 = \mathbb{P}(\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}))$. Это вложение не зависит от выбора проективного репера в $\mathbb{P}^2$.

Теорема 3. *Образ s в $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ состоит из классов эквивалентности матриц A таких, что* $\overset{2}{\bigwedge} A = 0$, $\operatorname{tr} A = 0$, $A \neq 0$.

Теорема 4. *Проективное касательное пространство* $\mathbb{P}(T_M X_3)$ *в точке* $M \in s(X_3)$ *изоморфно проективизации пространства всех квадратных* (3×3)*-матриц* A *с нулевым следом, удовлетворяющих условию* $AM + MA = 0$.

Будем называть векторное пространство $T = \{A \mid AM + MA = 0,\ \operatorname{tr} A = 0\}$ *аналитическим касательным пространством* к многообразию X_3 в точке M, поскольку по теореме 4 его проективизация совпадает с проективизацией касательного пространства.

Пусть $\mathbb{P}(T^*\mathbb{P}^2) \xrightarrow{s} \mathbb{P}^7$ — вложение Сегре и

$$s(x^0 : x^1 : x^2; y_0 : y_1 : y_2) = \begin{pmatrix} -x^1 y_1 - x^2 y_2 & x^0 y_1 & x^0 y_2 \\ x^1 y_0 & x^1 y_1 & x^1 y_2 \\ x^2 y_0 & x^2 y_1 & x^2 y_2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку на $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ имеется каноническая квадратичная форма (форма Киллинга), можно с ее помощью задать кососимметрическую билинейную форму (форму Кириллова–Сурио) [1]: если $A \in X_3$, то кососимметрическая форма задается из условия

$$\Omega(U,V) = B(A,[U,V]) = 6\operatorname{tr}(A\cdot[U,V]), \quad U,V \in X_3.$$

Ограничение этой кососимметрической формы на касательное пространство $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(T_M Y)$, $M \in s(X_3) = Y$, позволяет задать в проективизации касательного пространства $\mathbb{P}(T_M Y)$ структуру контактного многообразия.

Сформулируем основной результат.

Теорема 5. *Существуют точка* $M \in s(X_3) = Y$ *и проекция* τ *на касательное пространство* $\mathbb{P}(\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})) \to \mathbb{P}(T_M Y) = \mathbb{P}^3$ *такие, что преобразование* $s \circ \tau$ *переводит всякую алгебраическую кривую на* $\mathbb{P}^2$ *в интегральную кривую в пространстве* $\mathbb{P}^3$*, снабженном канонической контактной структурой* Ω.

3. О рациональных интегральных кривых уравнения Пфаффа в $\mathbb{P}^3$. Исследуются рациональные интегральные кривые уравнения $\omega = x^3 dx^0 - 3x^2 dx^1 + 3x^1 dx^2 - x^0 dx^3$, заданного на вещественном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$.

Определение 2. *Нормкривой* C^3 будем называть рациональную алгебраическую кривую третьей степени, которая в некотором проективном репере представима в виде $x^0 : x^1 : x^2 : x^3 = 1 : t : t^2 : t^3$.

Известно ([10], с. 193), что нормкривая в проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ определяет корреляцию, при которой произвольной точке $X = (x^0 : x^1 : x^2 : x^3) \in \mathbb{P}^3$ отвечает гиперплоскость с уравнением

$$\sum_{i=0}^{3} a_i y^i = 0, \quad \text{где} \quad a_i = (-1)^i \binom{3}{i} x^{3-i}, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

т. е. уравнение имеет вид

$$\Pi(X) : x^3 y^0 - 3x^2 y^1 + 3x^1 y^2 - x^0 y^3 = 0.$$

Теорема 6. *Проективизация контактной плоскости уравнения $\omega = 0$ совпадает в каждой точке $X \in \mathbb{P}^3$ с плоскостью корреляции $\Pi(X)$, задаваемой нормкривой C^3.*

Эта теорема позволяет следующим образом охарактеризовать интегральные кривые в $\mathbb{P}^3$.

Теорема 7. *Пусть задана некоторая кривая $\gamma(t)$, $l(t)$ — касательная в точке $M \in \gamma(t)$ и пучок плоскостей $\pi(t, \lambda)$, осью которого является прямая $l(t)$. Если для произвольного t найдется такое $\lambda = \lambda(t)$, что соприкасающиеся плоскости к нормкривой в точках пересечения $\pi(t, \lambda(t))$ с $C^3(t)$ пересекаются в точке M, то $\gamma(t)$ является интегральной кривой уравнения $\omega = 0$. Верно и обратное.*

Утверждение. *Для того чтобы точки пересечения плоскости корреляции с нормкривой $C^3(t)$ являлись вещественными, необходимо и достаточно, чтобы интегральная кривая располагалась в области*

$$3(x^1)^2(x^2)^2 - 4x^0(x^2)^3 + 6x^0x^1x^2x^3 - 4(x^1)^3x^3 - (x^0)^2(x^3)^2 \le 0.$$

Рациональная интегральная кривая (здесь и далее, если не отмечено специально, кривая является интегральной для уравнения $\omega = 0$) не является произвольной и в топологическом смысле.

Рассмотрим три точки, принадлежащие нормкривой $C^3(t)$,

$$M_1 = (1 : t_1 : t_1^2 : t_1^3), M_2 = (1 : t_2 : t_2^2 : t_2^3), M_3 = (1 : t_3 : t_3^2 : t_3^3).$$

Теорема 8. *Три рациональные функции $t_1(t), t_2(t), t_3(t)$ определяют интегральную кривую тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$t_1'(t_3 - t_2)^2 + t_2'(t_1 - t_3)^2 + t_3'(t_2 - t_1)^2 = 0.$$

Здесь $t_i' = dt_i/dt$.

Заметим, что, задав t_2, t_3, получим дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной, и, следовательно, имеющее локальное решение. Для того чтобы решение было глобальным, должны быть сделаны некоторые ограничения.

Сформулируем способ построения интегральной кривой.

Теорема 9. *Если v, w — рациональные функции и выражение*

$$V = \frac{v'w^2 - w'v^2}{v^2 + w^2 + (v + w)^2}$$

не имеет простых полюсов, то формулами

$$t_1 \ \text{— первообразная от } V, \quad t_2 = t_1 + w, \quad t_3 = t_1 - v$$

задается рациональная интегральная кривая следующего вида:

$$x^0 : x^1 : x^2 : x^3 = 3 : t_1 + t_2 + t_3 : t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 : 3t_1t_2t_3.$$

Замечание. Заметим, что, полагая в уравнении $2t_1'(v^2 + w^2 + vw) = v'w^2 - w'v^2$, $\tau = \frac{vw}{v-w}$, $t_1(t) = t$, приходим к уравнению $d\tau/dt = -2 - 6v\tau - 6v^2\tau^2$, которое является уравнением Риккати $dx/dt = P(t) + Q(t)x + R(t)x^2$, где $x = \tau$, $P(t) = -2$, $Q(t) = -6v(t)$, $R(t) = -6v^2(t)$.

Уравнение Риккати — это своеобразная реализация группы проективных преобразований. Отражением этого факта является теорема о постоянстве ангармонического отношения четырех решений уравнения Риккати [11]. С помощью этой теоремы можно утверждать следующее.

Теорема 10. *Если три интегральные кривые формы ω в проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ определяются тремя решениями уравнения Риккати*

$$\frac{d\tau}{dt} = -2 - 6v(t)\tau - 6v^2(t)\tau^2,$$

то можно построить четвертую интегральную кривую.

Нормкривая C^3 позволяет связать с интегральной кривой проективный инвариант в "первой дифференциальной окрестности".

Рассмотрим произвольную интегральную кривую $\gamma(t)$. Тогда в каждой плоскости корреляции, связанной с текущей точкой $M(t)$ кривой, определены четыре прямые. Первые три прямые MM_1, MM_2, MM_3 соответствуют M_1, M_2, M_3 — точкам пересечения плоскости корреляции с нормкривой C_3, а четвертая прямая MM_4 является касательной к $\gamma(t)$ в $M(t)$ (M_4 — произвольная точка касательной).

Пусть $M = (m^0 : m^1 : m^2 : m^3)$, $M_i = (m_i^0 : m_i^1 : m_i^2 : m_i^3)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Точке M соответствует плоскость корреляции $\Pi(M)$. Пусть координаты плоскости $\Pi(M)$ есть $a = (a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$.

Теорема 11. *Сложное отношение четырех инвариантных прямых в плоскости корреляции, связанных с текущей точкой кривой, вычисляется по формуле*

$$D = (MM_1, MM_2; MM_3, MM_4) = \frac{\det(M, a, M_1, M_3)}{\det(M, a, M_1, M_4)} \cdot \frac{\det(M, a, M_2, M_3)}{\det(M, a, M_2, M_4)},$$

где $\det(M, a, M_i, M_j)$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, *есть определитель, в строках которого стоят координаты точек* M, a, M_i, M_j.

4. Соединимость точек проективного пространства рациональной интегральной кривой. В классе рациональных кривых можно решать задачу о соединимости двух точек трехмерного проективного пространства $\mathbb{P}^3$ рациональной интегральной кривой заданного распределения.

Задача. Пусть в $\mathbb{P}^3$ заданы две точки M_1, M_2. Найти кривую γ, удовлетворяющую следующим условиям:

(1) $M_1, M_2 \in \gamma$;
(2) γ яляется интегральной кривой заданного распределения;
(3) γ касается в точках M_1 и M_2 прямых L_1 и L_2, лежащих в плоскостях корреляции точек M_1, M_2 соответственно.

Если опустить условие (3), тогда через две любые точки в $\mathbb{P}^3$ проходит рациональная алгебраическая кривая степени 4, удовлетворяющая условию (2), — нормкривая C^3. Такие кривые образуют однопараметрическое семейство. Степень рациональной кривой, решающей общую задачу, равна 9.

Прямая в $\mathbb{P}^3$ с заданной на ней точкой преобразуется в кривую на X_3, являющуюся поднятием некоторой кривой из $\mathbb{P}^2$. Касание первого порядка в $\mathbb{P}^3$ с прямой интерпретируется на $\mathbb{P}^2$ как касание второго порядка с кривой на плоскости в заданной точке.

Теорема 12. *Всякие две точки проективного пространства $\mathbb{P}^3$ можно соединить рациональной интегральной кривой, удовлетворяющей условию* (3), *степени меньше либо равной* 9.

Результаты статьи были доложены автором на трех математических конференциях [12]–[14].

Литература

1. Арнольд В.И. *Математические методы классической механики.* – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 432 с.
2. Bryant R. *Conformal and minimal immersions of compact surfaces into the four sphere* // J. Different. Geom. – 1982. – V. 17. – P. 455–473.
3. Landsberg J.M., Manivel L. *Legendrian varieties.* http://ru.arxiv.org/alg-geom/0407279.pdf.
4. Синцов Д.М. *Работы по неголономной геометрии.* – Киев: Вища школа, 1972. – 391 с.
5. Черненко В.Н. *О соединимости двух точек трехмерного C^∞-многообразия интегральной кривой не вполне интегрируемой дифференциальной системы* // Геометрич. сб. – Томск: Изд-во Томск. ун-та. – 1978. – Т. 19. – С. 3–11.
6. Yun-Gang Ye. *Complex contact threefolds and their contact curves.* http://ru.arxiv.org/alg-geom/9202003.pdf.
7. Розенфельд Б.А. *Многомерные пространства.* – М.: Наука, 1966. – 530 с.
8. Коннов В.В. *Касательное расслоение проективного пространства и многообразие невырожденных нуль-пар* // Матем. заметки. – 2001. – Т. 70. – № 5. – С. 718–735.
9. Шафаревич И.Р. *Основы алгебраической геометрии.* Т. 1. – М.: Наука, 1988. – 352 с.
10. Burau W. *Mehrdimensionale projektive und höhere Geometrie.* – Berlin, 1961. – 436 S.
11. Ибрагимов Н.Х. *Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике* // УМН. – 1992. – Т. 47. – Вып. 4. – С. 83–144.
12. Гилуч Ю.Л. *Вещественный аналог преобразования Брайанта* // Материалы международн. молодежной научной школы-конф. "Лобачевские чтения-2002" – Казань, 2002. – С. 20–21.
13. Гилуч Ю.Л. *Неголономная вещественная алгебраическая поверхность в $\mathbb{RP}^3$* // Тез. докл. 5-й международной конф. по геометрии и топологии. – Черкассы (Украина), 2003. – С. 26–28.
14. Гилуч Ю.Л. *О рациональных интегральных кривых уравнения Пфаффа в трехмерном проективном пространстве* // Материалы третьей всероссийск. молодежной научн. школы-конф. "Лобачевские чтения-2003" – Казань, 2003. – С. 96–98.

Томский государственный университет

Поступила 05.10.2004