ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 6 (517)

УДК 514.763

А.В. АМИНОВА, Н.А.-М. АМИНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ 4-ГО ПОРЯДКА С 4-МЕРНОЙ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППОЙ СИММЕТРИЙ, НЕ СОДЕРЖАЩЕЙ АБЕЛЕВОЙ ПОДГРУППЫ G_3

1.

Стремясь распространить методы теории Галуа разрешения алгебраических уравнений в радикалах на проблему интегрирования дифференциальных уравнений, С. Ли заложил основы теории непрерывных групп преобразований. Развитию глубоких идей Ли, связанных с приложениями групп Ли к дифференциальным уравнениям, посвящены работы [1]–[9] и др.

Ли стремился придать симметриям дифференциальных уравнений отчетливый геометрический характер. Э. Картан искал такое обобщение метрического пространства, которое позволило бы рассматривать интегральные кривые системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка как геодезические линии обобщенного пространства. Создавая теорию пространств с проективной связностью, Картан подчеркивал ее значение для исследования дифференциальных уравнений. Методы дифференциальной геометрии, в частности, методы теории Картана, позволяют развить систематический геометрический подход к определению и изучению локальных и нелокальных симметрий больших классов обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными и нахождению их решений.

Основам такого подхода посвящены статьи [10], [11] и др., в которых развивается проективная геометрия систем дифференциальных уравнений. В [10] обсуждаются групповые свойства уравнений геодезических в пространствах с римановой и аффинной связностями. Любая точечная симметрия уравнений геодезических в таком пространстве является проективным преобразованием. С другой стороны, проективные преобразования римановых многообразий определяют симметрии гамильтоновых систем и преобразования Ли–Беклунда уравнений Гамильтона–Якоби с квадратичными гамильтонианами.

В предыдущих работах авторов изучаются групповые свойства систем (разрешенных относительно старших производных) дифференциальных уравнений второго порядка с правыми частями, кубическими относительно первых производных. Какого-либо предварительного предположения о наличии геометрической структуры (римановой, аффинной и т. п.) в пространстве зависимых и независимых переменных системы не делается. Установлен закон преобразования системы при общей замене переменных и показано, что определенные комбинации коэффициентов системы преобразуются при такой замене как компоненты проективной связности. Примечательно, что каждая проективная связность, записанная в координатах, может быть получена таким образом — любая проективная связность на n-мерном многообразии M определяется локально системой $\mathcal{S}$ из $n-1$ (разрешенных относительно вторых производных) обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, правые части которых являются полиномами

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00996).

третьей степени относительно производных неизвестных функций, и каждая дифференциальная система $\mathcal{S}$ задает (ассоциированную) проективную связность на M. Иными словами, теория систем $\mathcal{S}$ дифференциальных уравнений есть теория проективных связностей. Доказано, что группа симметрий дифференциальной системы $\mathcal{S}$ является группой проективных преобразований в n-мерном пространстве с ассоциированной проективной связностью, что позволяет использовать полученные в дифференциальной геометрии многочисленные результаты теории автоморфизмов геометрических структур при исследовании систем дифференциальных уравнений.

В данной статье исследуются групповые свойства систем двух (разрешенных относительно вторых производных) обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, правые части которых являются полиномами третьей степени относительно производных неизвестных функций. Дана классификация этих систем, допускающих четырехмерные разрешимые группы симметрий, не содержащие абелевой подгруппы G_3. Для каждой системы указаны необходимые и достаточные условия, при которых она заменой переменных может быть приведена к дифференциальной системе, интегральные кривые которой являются прямыми линиями и выражаются тремя линейными параметрическими уравнениями или двумя линейными уравнениями с постоянными коэффициентами. Данная классификация дифференциальных систем основана на классификации А.Я. Султанова трехмерных пространств проективной связности по группам автоморфизмов [12]–[14]. Султанов использовал, в частности, классификацию четырехмерных вещественных алгебр Ли, не содержащих трехмерной абелевой подалгебры, данную Г.И. Кручковичем [15], [16], исходившим из классификации Ли четырехмерных комплексных алгебр Ли (см. [17], а также [18], гл. 11). Классификация Кручковича содержит пять неизоморфных типов четырехмерных вещественных алгебр Ли, не содержащих трехмерной абелевой подалгебры, которые мы называем *типами Ли–Кручковича.*

2.

Пусть L — факторизованная по центру группа $SL(n+1,\mathbf{R})$ и L_0 — факторизованная по центру группа матриц из $SL(n+1,\mathbf{R})$ вида $\left\| \begin{smallmatrix} A & 0 \\ \xi & a \end{smallmatrix} \right\|$, где $A \in GL(n,\mathbf{R})$, а ξ — n-мерный вектор-строка. Пусть L/L_0 — вещественное проективное пространство размерности n. Будем рассматривать L_0 как подгруппу группы $G^2(n) = \{(a^i_j, a^i_{jk})\}$. Главное подрасслоение Π расслоения $P^2(M)$ со структурной группой $L_0 \subset G^2(n)$ называется проективной структурой на M. Сужение $(\omega^i, \omega^i{}_j)$ на Π канонической формы $(\theta^i, \theta^i{}_j)$ расслоения $P^2(M)$ называется канонической формой расслоения Π.

Имеется единственная нормальная связность Картана $(\omega^i, \omega^i{}_j, \omega_j)$, кривизна которой

$$\Omega = (0, \Omega^i{}_j, \Omega_j), \quad \Omega^i{}_j = \frac{1}{2}\sum_{k,l} K^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l,$$

удовлетворяет условию $K^i_{jil} = 0$. Эта связность называется нормальной проективной связностью [19]. В локальных координатах (x^i) нормальная проективная связность Картана задается параметрами Томаса $\Pi^i_{jk} = \Pi^i_{kj}$, $\Pi^i_{ik} = 0$, а ее кривизна — тензором Вейля проективной кривизны

$$W^i_{jkl} = \Pi^i_{jkl} + \frac{1}{n-1}(\delta^i_l \Pi_{jk} - \delta^i_k \Pi_{jl}), \tag{2.1}$$

где

$$\begin{gathered} \Pi^i_{jkl} = \partial_k \Pi^i_{jl} - \partial_l \Pi^i_{jk} + \Pi^h_{jl}\Pi^i_{hk} - \Pi^h_{jk}\Pi^i_{hl}, \\ \Pi_{jk} = \Pi^h_{jhk} = \partial_s \Pi^s_{jk} - \Pi^h_{js}\Pi^s_{hk} = \Pi_{kj} \quad \left(\partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}\right). \end{gathered} \tag{2.2}$$

Далее всюду под проективной связностью понимается нормальная проективная связность.

Из (2.1), (2.2) следуют тождества

$$
\begin{gathered}
W^i_{jkl} = -W^i_{jlk}, \qquad W^i_{jkl} + W^i_{klj} + W^i_{ljk} = 0, \\
\partial_m W^i_{jkl} + \partial_k W^i_{jlm} + \partial_l W^i_{jmk} + \Pi^i_{hm} W^h_{jkl} + \Pi^i_{hk} W^h_{jlm} + \Pi^i_{hl} W^h_{jmk} - \\
- \Pi^h_{jm} W^i_{hkl} - \Pi^h_{jk} W^i_{hlm} - \Pi^h_{jl} W^i_{hmk} = \frac{1}{1-n}(A_{jkl}\delta^i_m + A_{jlm}\delta^i_k + A_{jmk}\delta^i_l),
\end{gathered} \tag{2.3}
$$

где

$$
A_{jkl} \equiv \partial_l \Pi_{jk} - \partial_k \Pi_{jl} + \Pi^h_{jk}\Pi_{hl} - \Pi^h_{jl}\Pi_{hk} = -A_{jlk}. \tag{2.4}
$$

Гладкое многообразие M^n называется многообразием (или пространством) проективной связности, если в каждой карте (x, U) с локальными координатами $x^1, \ldots, x^n$ задан набор гладких функций (параметров Томаса)

$$
\Pi^i_{jk} = \Pi^i_{kj}, \quad \Pi^i_{ik} = 0,
$$

преобразующихся при переходе от одной карты к другой по закону

$$
\Pi^{i'}_{j'k'} = \Pi^h_{pq}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^h}\frac{\partial x^p}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial^2 x^h}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^h} - \frac{1}{n+1}\left(\delta^{i'}_{j'}\frac{\partial \ln|\Delta|}{\partial x^{k'}} + \delta^{i'}_{k'}\frac{\partial \ln|\Delta|}{\partial x^{j'}}\right), \tag{2.5}
$$

где

$$
\Delta = \det\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right). \tag{2.6}
$$

Параметры Томаса определяют геометрический объект Π^i_{jk}, называемый объектом проективной связности, функции Π^i_{jk} называются коэффициентами проективной связности.

Проективная связность на многообразии M^n называется плоской, если в окрестности каждой точки $x \in M^n$ существуют координаты, называемые проективными координатами, в которых все коэффициенты проективной связности обращаются в нуль: $\Pi^i_{jk} = 0$. Многообразие с плоской проективной связностью называется плоским.

Касательное пространство в каждой точке многообразия проективной связности есть обычное проективное пространство. Проективная связность задает точечное соответствие между касательными проективными пространствами, связанными с двумя бесконечно близкими точками. Если все компоненты тензора проективной кривизны (2.1) многообразия проективной связности размерности $n > 2$ равны нулю, то многообразие плоское.

Для того чтобы n-мерная проективная связность Π^i_{jk} была плоской, необходимо и достаточно, чтобы при $n > 2$ компоненты ее тензора Вейля проективной кривизны (2.1) были равны нулю, а при $n = 2$ компоненты тензора A_{jkl} (2.4) равнялись нулю. Кривизна пространства определяет отклонение проективной связности Π^i_{jk} от плоской. Если тензор проективной кривизны отличен от нуля, то не существует координат, в которых во всех точках $\Pi^i_{jk} = 0$.

Гладкая кривая γ на многообразии M^n с проективной связностью Π^i_{jk} называется геодезической, если "при установлении соответствия между проективными пространствами, связанными с различными точками этой кривой, она дает прямую" [19]. Дифференциальные уравнения геодезических линий имеют вид [19]

$$
\frac{d\omega^1 - \omega^1\omega^0_0 + \sum\limits_{i=0}^{n}\omega^i\omega^1_i}{\omega^1} = \cdots = \frac{d\omega^n - \omega^n\omega^0_0 + \sum\limits_{i=0}^{n}\omega^i\omega^n_i}{\omega^n}
$$

или

$$
\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Pi^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0 \tag{2.7}
$$

при условии, что t — канонический параметр.

Если проективная связность плоская, то в проективных координатах уравнения (2.7) принимают вид

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}=0.$$

Таким образом, в подходящих координатах геодезические линии n-мерного плоского пространства проективной связности выражаются n линейными параметрическими уравнениями (с каноническим параметром) или $n-1$ линейными уравнениями с постоянными коэффициентами.

3.

Пусть M — дифференцируемое многообразие, (x^i) — локальные координаты на M, $x\in M$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2x^\alpha}{dx^{n^2}}+a_{\beta\gamma}(x)\frac{dx^\alpha}{dx^n}\frac{dx^\beta}{dx^n}\frac{dx^\gamma}{dx^n}+b^\alpha_{\beta\gamma}(x)\frac{dx^\beta}{dx^n}\frac{dx^\gamma}{dx^n}+c^\alpha_\beta(x)\frac{dx^\beta}{dx^n}+d^\alpha(x)=0 \tag{3.1}$$

с $n-1$ неизвестными функциями $x^1,\dots,x^{n-1}$ независимой переменной x^n, где $a_{\beta\gamma}=a_{\gamma\beta}$, $b^\alpha_{\beta\gamma}=b^\alpha_{\gamma\beta}$, c^α_β и d^α — произвольные функции от $x^1,\dots,x^n$ (здесь и далее греческие индексы принимают значения от 1 до $n-1$). Определим величины Π^i_{jk}:

$$\begin{gathered}\Pi^\alpha_{\beta\gamma}=b^\alpha_{\beta\gamma}-\frac{1}{n+1}(b^\delta_{\delta\beta}\delta^\alpha_\gamma+b^\delta_{\delta\gamma}\delta^\alpha_\beta),\quad 2\Pi^\alpha_{n\beta}=c^\alpha_\beta-\frac{1}{n+1}c^\delta_\delta\delta^\beta_\alpha,\\ \Pi^n_{\beta\gamma}=-a_{\beta\gamma},\quad \Pi^\alpha_{nn}=d^\alpha,\\ \Pi^n_{n\gamma}=-\frac{1}{n+1}b^\delta_{\delta\gamma},\quad \Pi^n_{nn}=-\frac{1}{n+1}c^\delta_\delta.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Так как последние формулы можно однозначно разрешить относительно функций

$$\begin{gathered}a_{\beta\gamma}=-\Pi^n_{\beta\gamma},\quad b^\alpha_{\beta\gamma}=\Pi^\alpha_{\beta\gamma}-\Pi^n_{n\gamma}\delta^\alpha_\beta-\Pi^n_{n\beta}\delta^\alpha_\gamma,\\ c^\alpha_\beta=2\Pi^\alpha_{n\beta}-\Pi^n_{nn}\delta^\alpha_\beta,\quad d^\alpha=\Pi^\alpha_{nn},\end{gathered} \tag{3.3}$$

то между коэффициентами уравнения (3.1) и величинами Π^i_{jk} (3.2) существует взаимно однозначное соответствие.

При общей замене переменных $x^i=x^i(x^{1'}(x^{n'}),\dots,x^{(n-1)'}(x^{n'}),x^{n'})$, где $x^{n'}$ — новая независимая переменная, а $x^{1'},\dots,x^{(n-1)'}$ — новые неизвестные функции этой переменной, форма уравнения (3.1) не меняется, новые коэффициенты $a_{\beta'\gamma'}$, $b^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}$, $c^{\alpha'}_{\beta'}$, $d^{\alpha'}$ в преобразованном уравнении

$$\ddot x^{\alpha'}+a_{\beta'\gamma'}(x')\dot x^{\alpha'}\dot x^{\beta'}\dot x^{\gamma'}+b^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}(x')\dot x^{\beta'}\dot x^{\gamma'}+c^{\alpha'}_{\beta'}(x')\dot x^{\beta'}+d^{\alpha'}(x')=0 \tag{3.4}$$

выражаются через старые коэффициенты $a_{\beta\gamma}$, $b^\alpha_{\beta\gamma}$, c^α_β, d^α по формулам

$$\begin{aligned}a_{\beta'\gamma'}&=-\Pi^h_{pq}A^{n'}_hA^p_{\beta'}A^q_{\gamma'}-A^{n'}_h\partial_{\beta'}A^h_{\gamma'},\\ b^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}&=\Pi^h_{pq}A^{\alpha'}_hA^p_{\beta'}A^q_{\gamma'}+A^{\alpha'}_h\partial_{\beta'}A^h_{\gamma'}-\Pi^h_{pq}A^{n'}_hA^p_{n'}(\delta^{\alpha'}_{\beta'}A^q_{\gamma'}+\delta^{\alpha'}_{\gamma'}A^q_{\beta'})-\\ &\quad-\delta^{\alpha'}_{\beta'}A^{n'}_h\partial_{\gamma'}A^h_{n'}-\delta^{\alpha'}_{\gamma'}A^{n'}_h\partial_{\beta'}A^h_{n'},\\ c^{\alpha'}_{\beta'}&=2\Pi^h_{pq}A^{\alpha'}_hA^p_{n'}A^q_{\beta'}+2A^{\alpha'}_h\partial_{n'}A^h_{\beta'}-\delta^{\alpha'}_{\beta'}(\Pi^h_{pq}A^{n'}_hA^p_{n'}A^q_{n'}+A^{n'}_h\partial_{n'}A^h_{n'}),\\ d^{\alpha'}&=\Pi^h_{pq}A^{\alpha'}_hA^p_{n'}A^q_{n'}+A^{\alpha'}_h\partial_{n'}A^h_{n'}\quad\left(A^i_{k'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}},\quad A^{i'}_k=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\right),\end{aligned} \tag{3.5}$$

в которых следует заменить величины Π^h_{pq} выражениями (3.2). При этом величины Π^i_{jk} преобразуются по закону

$$\Pi^{i'}_{j'k'}=\Pi^h_{pq}A^{i'}_hA^p_{j'}A^q_{k'}+A^{i'}_h\partial_{k'}A^h_{j'}-\frac{1}{n+1}(\delta^{i'}_{j'}A^{l'}_h\partial_{k'}A^h_{l'}+\delta^{i'}_{k'}A^{l'}_h\partial_{j'}A^h_{l'}). \tag{3.6}$$

Сравнивая (2.5), (3.6) и учитывая равенства $A^{l'}_h \partial_{k'} A^h_{l'} = \partial_{k'} \ln|\Delta|$, видим, что величины Π^i_{jk} (3.2), составленные для уравнения (3.1), являются координатами объекта проективной связности, т. е. параметрами Томаса (п. 2). Поскольку коэффициенты уравнения (3.1) могут задаваться произвольно и, как показано выше, между этими коэффициентами и параметрами Томаса Π^i_{jk} существует взаимно однозначное соответствие, приходим к следующему заключению: любая проективная связность Π^i_{jk} на многообразии M определяется локально системой дифференциальных уравнений (3.1), и каждая дифференциальная система (3.1) задает проективную связность. Иными словами, *теория проективных связностей есть теория дифференциальных уравнений вида* (3.1). Для определенности будем далее называть проективную связность (3.2) ассоциированной с дифференциальной системой (3.1).

4.

Назовем две дифференциальные системы вида (3.1) *эквивалентными* [11], если существует замена переменных, при которой одна система переходит в другую. Если $a_{\beta\gamma}$, $b^\alpha_{\beta\gamma}$, c^α_β, d^α и $a_{\beta'\gamma'}$, $b^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}$, $c^{\alpha'}_{\beta'}$, $d^{\alpha'}$ — коэффициенты уравнения (3.1) в координатах (x^i) и $(x^{i'})$ соответственно, то выполняются условия (3.5), (3.2) или эквивалентное им уравнение (3.6), равносильное (2.5). Умножив последнее уравнение на $\frac{\partial x^r}{\partial x^{i'}}$ и суммируя по i', получим равенство

$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} = \Pi^{m'}_{j'k'} \frac{\partial x^r}{\partial x^{m'}} - \Pi^r_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^q}{\partial x^{k'}} + \frac{1}{n+1}\left(\frac{\partial x^r}{\partial x^{j'}}\tau_{k'} + \frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}}\tau_{j'}\right), \tag{4.1}$$

где

$$\tau_{k'} = \frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{m'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^s} = \frac{\partial \ln|\Delta|}{\partial x^{k'}}.$$

Если положить

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{l'}} = v^i_{l'}, \tag{4.2}$$

то равенства (4.1) примут вид

$$\frac{\partial v^r_{j'}}{\partial x^{k'}} = \Pi^{m'}_{j'k'} v^r_{m'} - \Pi^r_{pq} v^p_{j'} v^q_{k'} + \frac{1}{n+1}(v^r_{j'}\tau_{k'} + v^r_{k'}\tau_{j'}). \tag{4.3}$$

Отсюда, дифференцируя, выводим

$$\frac{\partial \tau_{j'}}{\partial x^{k'}} = \Pi^{m'}_{j'k'}\tau_{m'} + \frac{1}{n+1}\tau_{j'}\tau_{k'} - \frac{n+1}{n-1}(\Pi_{ps} v^p_{j'} v^s_{k'} - \Pi_{j'k'}). \tag{4.4}$$

Задача сводится таким образом к определению $n(n+2)$ функций x^r, $v^i_{l'}$, $\tau_{k'}$ от n переменных $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$, удовлетворяющих уравнениям (4.2)—(4.4). Условия интегрируемости уравнений (4.2) выполняются тождественно вследствие равенств (4.3), а условия интегрируемости уравнений (4.3) и (4.4) имеют соответственно вид

$$W^{i'}_{j'k'l'} v^p_{i'} - W^p_{qrs} v^q_{j'} v^r_{k'} v^s_{l'} = 0, \tag{4.5}$$

$$\tau_{s'} W^{s'}_{j'l'k'} + \frac{n+1}{n-1}(A_{j'k'l'} - A_{pqs} v^p_{j'} v^q_{k'} v^s_{l'}) = 0, \tag{4.6}$$

где A_{jkl} определено формулой (2.4). Если решение существует, то оно содержит не более $n(n+2)$ произвольных постоянных.

Таким образом, общее преобразование $(x^i) \to (x^{i'})$ дифференциальной системы (3.1) в другую дифференциальную систему (того же вида, см. выше) содержит не более $n(n+2)$ произвольных постоянных.

Число $n(n+2)$ достигается в том и только том случае, когда условия (4.5), (4.6) выполняются тождественно. В противном случае следует учитывать условия, которые получаются дифференцированием уравнений (4.5), (4.6) и заменой первых производных выражениями из (4.3), (4.4).

Рассмотрим, в частности, случай двух дифференциальных систем, для каждой из которых при $n > 2$ компоненты тензора Вейля ассоциированной проективной связности тождественно равны нулю: $W^i_{jkl} = W^{i'}_{j'k'l'} = 0$, и, следовательно, $A_{jkl} = A_{j'k'l'} = 0$. В этом случае условия (4.5), (4.6) выполняются тождественно, и системы переходят одна в другую с помощью преобразования, содержащего $n(n+2)$ произвольных постоянных.

Тензор Вейля W^i_{jkl} (соответственно тензор A_{jkl} при $n = 2$) тождественно равен нулю, если система уравнений (3.1) принимает вид

$$\frac{d^2x^\alpha}{dx^{n^2}} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, n-1),$$

при этом $\Pi^i_{jk} = 0$, и многообразие проективной связности является плоским (п. 2). Тогда и для преобразованной дифференциальной системы (3.4) тензор $W^{i'}_{j'k'l'}$ должен равняться нулю. Таким образом, для того чтобы дифференциальная система (3.1) была эквивалентна дифференциальной системе

$$\frac{d^2y^\alpha}{dt^2} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, n-1, \quad t \equiv y^n), \tag{4.7}$$

т. е. заменой переменных $(x^i) \to (y^i)$ приводилась к виду (4.7), необходимо и достаточно, чтобы при $n > 2$ компоненты тензора Вейля W^i_{jkl} (2.1) ассоциированной проективной связности Π^i_{jk} (3.2) были равны нулю:

$$W^i_{jkl} = 0, \tag{4.8}$$

соответствующее преобразование содержит $n(n+2)$ произвольных постоянных.

Из (2.1), (2.4) и (3.2) следует

Теорема 4.1. *Заменой переменных дифференциальная система* (3.1) *при* $n > 2$ *приводится к дифференциальной системе* (4.7), *интегральные кривые которой являются прямыми линиями и выражаются* n *линейными параметрическими уравнениями или* $n-1$ *линейными уравнениями с постоянными коэффициентами, тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\begin{gathered}
(2n-1)c_{,\delta} - 2(n-2)b_{\delta,n} + (n+1)(c^\sigma_\rho b^\rho_{\sigma\delta} - c^\alpha_{\delta,\alpha} - b_\sigma c^\sigma_\delta + 2(n-2)a_{\delta\sigma}d^\sigma) = 0,\\
(n+1)\{2b_\sigma b^\sigma_{\beta\gamma} - ca_{\beta\gamma} + (n-2)(2a_{\beta\gamma,n} - c^\sigma_\beta a_{\sigma\gamma}) + 2b^\sigma_{\beta\gamma,\sigma} - 2b^\sigma_{\beta\rho}b^\rho_{\sigma\gamma} + a_{\beta\sigma}c^\sigma_\gamma\} - 2(nb_{\beta,\gamma} + b_{\gamma,\beta}) = 0,\\
(n-1)(4d^\alpha{}_{,\gamma} - 2c^\alpha_{\gamma,n} + 4b^\alpha_{\gamma\sigma}d^\sigma - c^\alpha_\sigma c^\sigma_\gamma) + \delta^\alpha_\gamma(2c_{,n} + c^\sigma_\rho c^\rho_\sigma - 4b_\sigma d^\sigma - 4d^\sigma{}_{,\sigma}) = 0,\\
a_{\beta[\gamma,\delta]} + b^\sigma_{\beta[\gamma}a_{\delta]\sigma} = 0,\\
(n^2-1)(c^\alpha_{\beta,\gamma} - 2b^\alpha_{\beta\gamma,n} + b^\alpha_{\gamma\sigma}c^\sigma_\beta - b^\sigma_{\beta\gamma}c^\alpha_\sigma + 2d^\alpha a_{\beta\gamma}) +\\
+\delta^\alpha_\gamma\{(n+1)(b^\sigma_{\beta\rho}c^\rho_\sigma - c^\sigma_{\beta,\sigma} - b_\sigma c^\sigma_\beta - 2a_{\beta\sigma}d^\sigma) + 2nb_{\beta,n} + c_{,\beta}\} + (n-1)\delta^\alpha_\beta(2b_{\gamma,n} - c_{,\gamma}) = 0,\\
2(n^2-1)(2b^\alpha_{\beta[\delta,\gamma]} + 2b^\sigma_{\beta[\delta}b^\alpha_{\gamma]\sigma} - a_{\beta[\delta}c^\alpha_{\gamma]}) + \delta^\alpha_\gamma K_{\beta\delta} - \delta^\alpha_\delta K_{\beta\gamma} + 4(n-1)\delta^\alpha_\beta b_{[\gamma,\delta]} = 0,
\end{gathered} \tag{4.9}$$

где использованы обозначения

$$\begin{gathered}
c = c^\sigma_\sigma, \quad b_\beta = b^\sigma_{\sigma\beta},\\
K_{\beta\gamma} = (n+1)(2a_{\beta\gamma,n} + ca_{\beta\gamma}) + 2(n+1)(b^\sigma_{\beta\rho}b^\rho_{\sigma\gamma} - b^\sigma_{\beta\gamma,\sigma} - b^\sigma_{\beta\gamma}b_\sigma - a_{\sigma(\beta}c^\sigma_{\gamma)}) + 2(nb_{\beta,\gamma} + b_{\gamma,\beta})
\end{gathered}$$

(*греческие индексы принимают значения от* 1 *до* $n-1$, *запятая означает частное дифференцирование, круглые скобки здесь и далее означают симметрирование, а квадратные — альтернирование*: $2a_{(\beta\gamma)} = a_{\beta\gamma} + a_{\gamma\beta}$, $2a_{[\beta\gamma]} = a_{\beta\gamma} - a_{\gamma\beta}$).

5.

Пусть Π и Π' — проективные структуры на многообразиях M и M' соответственно. Диффеоморфизм f из M в M' индуцирует изоморфизм $f_* : P^2(M) \to P^2(M')$. Если f_* переводит Π в Π', то f называется проективным изоморфизмом из M в M'.

Если диффеоморфизм f задается в локальных координатах набором функций $x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n)$, а обратный диффеоморфизм f^{-1} — функциями $x^i = x^i(x^{1'}, \dots, x^{n'})$, то объект проективной связности $\widetilde{\Pi}^i_{jk}$ на M' выражается через объект проективной связности Π^i_{jk} на M по формуле

$$\widetilde{\Pi}^{i'}_{j'k'} = \Pi^p_{qr} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} - \frac{1}{n+1} \left(\delta^{i'}_{j'} \frac{\partial \ln |\Delta|}{\partial x^{k'}} + \delta^{i'}_{k'} \frac{\partial \ln |\Delta|}{\partial x^{j'}} \right), \tag{5.1}$$

где $\Delta = \det \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \right)$ — якобиан отображения f.

Если $M = M'$ и $\Pi = \Pi'$, то изоморфизм f называется проективным преобразованием в M или автоморфизмом проективной структуры Π. Проективное преобразование сохраняет объект проективной связности, т. е. коэффициенты увлеченной связности $\widetilde{\Pi}^i_{jk}$ в увлеченной изоморфизмом f системе координат совпадают с коэффициентами проективной связности Π^i_{jk}.

Векторное поле X на многообразии M с проективной структурой Π называется инфинитезимальным проективным преобразованием или проективным движением, если порождаемая этим полем в окрестности каждой точки $x \in M$ локальная 1-параметрическая группа преобразований состоит из (локальных) проективных преобразований, т. е. автоморфизмов проективной структуры Π. Инфинитезимальное проективное преобразование называется также проективным (киллинговым) векторным полем.

Векторное поле X на M является проективным движением, если и только если все преобразования φ_t из потока $F_X(t)$ сохраняют проективную связность, т. е. если поле объекта проективной связности инвариантно при действии (локальной) 1-параметрической группы (локальных) преобразований, порожденной векторным полем X: $\widetilde{\Pi}^i_{jk} = \Pi^i_{jk}$. Необходимое и достаточное условие этого состоит в обращении в нуль производной Ли объекта проективной связности:

$$L_X \Pi^i_{jk} \equiv \xi^l \partial_l \Pi^i_{jk} - \Pi^h_{jk} \partial_h \xi^i + \Pi^i_{pk} \partial_j \xi^p + \Pi^i_{jq} \partial_k \xi^q + \partial_{jk} \xi^i - \frac{1}{n-1} (\delta^i_j \partial_{hk} \xi^h + \delta^i_k \partial_{hj} \xi^h) = 0, \tag{5.2}$$

где $\partial_{jk} \xi^i \equiv \partial_k \partial_j \xi^i$ ([20], [21], т. 1, а также [18]).

Так как производная Ли вдоль коммутатора $[X, Y]$ векторных полей X, Y равна коммутатору $[L_X, L_Y]$ производных Ли вдоль этих полей, то для любых двух проективных движений X и Y в M их скобка Ли $[X, Y]$ также является проективным движением. Поэтому множество $P(M)$ всех проективных движений в M образует алгебру Ли, называемую проективной алгеброй Ли в M.

Если $X = \xi^i \partial_i$ – проективное движение в M, то в каждой карте на M выполняются уравнения (5.2). Введем новые функции $u^i_j = \partial_j \xi^i$, $\sigma_k = \partial_{hk} \xi^h$ и запишем эти уравнения в виде следующей системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \partial_j \xi^i = u^i_j, \\ &\text{(b)} \quad \partial_k u^i_j = \Pi^h_{jk} u^i_h - \Pi^i_{pk} u^p_j - \Pi^i_{jq} u^q_k - \xi^h \partial_h \Pi^i_{jk} + \frac{1}{n-1} (\delta^i_j \sigma_k + \delta^i_k \sigma_j), \end{aligned}$$

содержащей $n(n+2)$ неизвестных функций ξ^i, u^i_j и σ_k [22].

Для того чтобы условия интегрируемости системы уравнений (a), (b) относительно $n(n+2)$ неизвестных функций ξ^i, u^i_j и σ_k выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы при $n > 2$ выполнялось равенство

$$W^i_{jkl} = 0. \tag{5.3}$$

При условии (5.3) при $n > 2$ на многообразии M существуют координаты, в которых все коэффициенты проективной связности обращаются в нуль: $\Pi^i_{jk} = 0$, т. е. многообразие является плоским.

Таким образом, если M — связное многообразие с проективной связностью Π^i_{jk}, то алгебра Ли $P(M)$ инфинитезимальных проективных преобразований в M имеет размерность самое большее $n^2 + 2n$, где $n = \dim M$. Так как проективная алгебра Ли конечна, то по теореме Пале [23] группа $\widehat{P}(M)$ проективных преобразований в M есть группа Ли с алгеброй Ли $P(M)$.

Если $\dim P(M) = n^2+2n$, то M плоское, т. е. (проективная) кривизна многообразия M тождественно равна нулю и в подходящих локальных координатах все коэффициенты проективной связности обращаются в нуль.

В плоском пространстве группой проективных преобразований является $(n^2 + 2n)$-мерная группа дробно-линейных подстановок от n переменных.

6.

Группой (точечных) симметрий системы дифференциальных уравнений k-го порядка

$$\Delta^\nu(t, x^{(k)}) = 0 \quad (\nu = 1, \dots, s) \tag{6.1}$$

называется локальная группа Ли G преобразований ([24], § 60), действующая на открытом подмножестве N пространства $T \times \Xi$ независимых (t) и зависимых (x) переменных системы и обладающая следующим свойством. Пусть $x = f(t)$ — решение системы (6.1), определенное в области $\Omega \subset T$. Если для $h \in G$ определено $h \circ f$, то $x = h \circ f(t)$ есть также решение системы.

Алгебра Ли группы G состоит из инфинитезимальных симметрий — векторных полей на N, порождающих 1-параметрические группы симметрий системы.

Система (6.1) определяет подмногообразие F в пространстве k-струй $T \times \Xi^{(k)}$, координаты которого представляют независимые переменные, зависимые переменные и все производные от зависимых переменных вплоть до порядка k.

Связная локальная группа Ли G преобразований является группой симметрий невырожденной [9] системы (6.1), если и только если ее k-е продолжение $\operatorname{pr}^{(k)} G$ оставляет подмногообразие F инвариантным.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы k-е продолжение $\operatorname{pr}^{(k)} X$ любого векторного поля X из алгебры Ли группы G удовлетворяло условиям ([2], с. 65; [3], с. 29; [9])

$$\operatorname{pr}^{(k)} X[\Delta^\nu(t, x^{(k)})] = 0 \quad \text{при} \quad \Delta^\nu(t, x^{(k)}) = 0 \quad (\nu = 1, \dots, s).$$

Для системы

$$\Delta^\alpha \equiv \ddot{x}^\alpha + a_{\beta\gamma}(x)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma + b^\alpha_{\beta\gamma}(x)\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma + c^\alpha_\beta(x)\dot{x}^\beta + d^\alpha(x) = 0, \tag{6.2}$$

где $a_{\beta\gamma} = a_{\gamma\beta}$, $b^\alpha_{\beta\gamma} = b^\alpha_{\gamma\beta}$ — функции от $x^1, \dots, x^n$, α, β, $\gamma = 1, \dots, n-1$ и точка над x означает дифференцирование по x^n, так что $\ddot{x}^n = 0$, эти условия принимают вид

$$\operatorname{pr}^{(2)} X(\Delta^\alpha)\big|_{\Delta^\alpha=0} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, n-1), \tag{6.3}$$

где (напр., [2], с. 57)

$$\begin{gathered} X = \xi^i \partial_i, \\ \operatorname{pr}^{(1)} X = X + (\partial_n \xi^\alpha + \dot{x}^\beta \partial_\beta \xi^\alpha - \dot{x}^\alpha \partial_n \xi^n - \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \partial_\beta \xi^n) \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha}, \\ \operatorname{pr}^{(2)} X = \operatorname{pr}^{(1)} X + [\partial_{nn}\xi^\alpha + \dot{x}^\beta(2\partial_{\beta n}\xi^\alpha - \partial_{nn}\xi^n \delta^\alpha_\beta) + \\ + \dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma(\partial_{\beta\gamma}\xi^\alpha - \partial_{\beta n}\xi^n\delta^\alpha_\gamma - \partial_{\gamma n}\xi^n\delta^\alpha_\beta) + \ddot{x}^\beta(\partial_\beta\xi^\alpha - 2\partial_n\xi^n\delta^\alpha_\beta) - \\ - \dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma\partial_{\beta\gamma}\xi^n - 2\ddot{x}^\alpha\dot{x}^\beta\partial_\beta\xi^n - \dot{x}^\alpha\ddot{x}^\beta\partial_\beta\xi^n] \frac{\partial}{\partial \ddot{x}^\alpha}. \end{gathered} \tag{6.4}$$

Подставив (6.4) в (6.3) и используя (6.2), придем к системе уравнений, левые части которых являются полиномами третьей степени от $\dot{x}^\alpha$. Приравняв нулю коэффициенты этих полиномов, получим уравнения

$$\begin{gathered}
Xa_{\beta\gamma} - a_{\beta\gamma}\partial_n\xi^n + 2a_{\sigma(\beta}\partial_{\gamma)}\xi^\sigma + b^\sigma_{\beta\gamma}\partial_\sigma\xi^n - \partial_{\beta\gamma}\xi^n = 0,\\
Xb^\alpha_{\beta\gamma} + a_{\beta\gamma}\partial_n\xi^\alpha + 2\delta^\alpha_{(\beta}a_{\gamma)\sigma}\partial_n\xi^\sigma - b^\sigma_{\beta\gamma}\partial_\sigma\xi^\alpha +\\
+ 2b^\alpha_{\sigma(\beta}\partial_{\gamma)}\xi^\sigma + c^\alpha_{(\beta}\partial_{\gamma)}\xi^n + \delta^\alpha_{(\beta}c^\sigma_{\gamma)}\partial_\sigma\xi^n + \partial_{\beta\gamma}\xi^\alpha - 2\delta^\alpha_{(\beta}\partial_{\gamma)n}\xi^n = 0,\\
Xc^\alpha_\beta + 2b^\alpha_{\beta\sigma}\partial_n\xi^\sigma + c^\alpha_\sigma\partial_\beta\xi^\sigma + c^\alpha_\beta\partial_n\xi^n - c^\sigma_\beta\partial_\sigma\xi^\alpha + 2d^\alpha\partial_\beta\xi^n + \delta^\alpha_\beta d^\sigma\partial_\sigma\xi^n + 2\partial_{n\beta}\xi^\alpha - \delta^\alpha_\beta\partial_{nn}\xi^n = 0,\\
Xd^\alpha + c^\alpha_\sigma\partial_n\xi^\sigma - d^\sigma\partial_\sigma\xi^\alpha + 2d^\alpha\partial_n\xi^n + \partial_{nn}\xi^\alpha = 0.
\end{gathered}\tag{6.5}$$

Вычислив с помощью полученных равенств и формул (3.2) выражения $X\Pi^i_{jk}$, найдем

$$L_X\Pi^i_{jk} \equiv \xi^l\partial_l\Pi^i_{jk} - \Pi^h_{jk}\partial_h\xi^i + \Pi^i_{pk}\partial_j\xi^p + \Pi^i_{jq}\partial_k\xi^q + \partial_{jk}\xi^i - \frac{1}{n+1}(\delta^i_j\partial_{hk}\xi^h + \delta^i_k\partial_{hj}\xi^h) = 0. \tag{6.6}$$

Очевидно, что из (6.6) и (3.3) следует (6.5). Таким образом, векторное поле X порождает 1-параметрическую группу (точечных) симметрий дифференциальной системы (6.2) тогда и только тогда, когда выполнены условия (6.5) или равносильное им условие (6.6), где величины Π^i_{jk} определены формулами (3.2).

Так как из (5.2), (6.6) следует, что X есть инфинитезимальное проективное преобразование в пространстве с ассоциированной проективной связностью, задаваемой объектом Π^i_{jk} (п. 3), то справедлива

Теорема 6.1. *Группа симметрий дифференциальной системы* (6.2) *есть группа проективных преобразований в n-мерном пространстве с проективной связностью, задаваемой в локальных координатах (x^i) формулами* (3.2).

Если при $n > 2$ тензор Вейля W^i_{jkl} (2.1) ассоциированной проективной связности Π^i_{jk} (3.2) обращается в нуль, то ассоциированная проективная связность является плоской и допускает максимальную $(n^2 + 2n)$-мерную проективную алгебру Ли (п. 5). В этом случае дифференциальная система (6.2) заменой переменных приводится к системе (4.7), интегральные кривые которой являются прямыми линиями (п. 4). Отсюда, принимая во внимание теорему 6.1, заключаем, что максимальная группа Ли (точечных) симметрий дифференциальной системы (3.1) имеет размерность $n^2 + 2n$, и это число достигается, если и только если при $n > 2$ выполнены условия (4.9). В этом случае (3.1) приводится к системе

$$\frac{d^2y^\alpha}{dt^2} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, n-1),$$

алгебра Ли симметрий которой натянута на векторные поля

$$T_i = \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad E_{jk} = y^j\frac{\partial}{\partial y^k}, \quad E_i = y^iy^j\frac{\partial}{\partial y^j}$$

$(i, j, k, l = 1, \dots, n,\ y^n \equiv t)$, удовлетворяющие структурным уравнениям

$$\begin{gathered}
[T_i, E_{ij}] = T_j, \quad [T_i, E_j] = E_{ji} \quad (i \neq j),\\
[T_i, E_i] = E_{ii} + \sum_{l=1}^n E_{ll}, \quad [E_{ij}, E_{kl}] = \delta^j_k E_{il} - \delta^i_l E_{kj}, \quad [E_{ij}, E_j] = E_i,
\end{gathered}$$

остальные коммутаторы равны нулю.

7.

Рассмотрим системы двух уравнений второго порядка, допускающие четырехмерные разрешимые группы симметрий, не содержащие абелевой подгруппы G_3. Используя теоремы 4.1, 6.1 и классификацию А.Я. Султанова трехмерных пространств проективной связности по группам автоморфизмов [12]–[14], основанную на классификации Ли–Кручковича 4-мерных вещественных алгебр Ли, получим следующий результат.

Теорема 7.1. *Если система двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $x = x(t)$, $y = y(t)$ независимой переменной t*

$$\ddot{x} + \dot{x}P + Q_1 = 0,$$
$$\ddot{y} + \dot{y}P + Q_2 = 0,$$

где точка над x означает дифференцирование по t и

$$\begin{aligned} P &= a_{11}(t,x,y)\dot{x}^2 + 2a_{12}(t,x,y)\dot{x}\dot{y} + a_{22}(t,x,y)\dot{y}^2,\\ Q_\alpha &= b^\alpha_{11}(t,x,y)\dot{x}^2 + 2b^\alpha_{12}(t,x,y)\dot{x}\dot{y} + b^\alpha_{22}(t,x,y)\dot{y}^2 + \\ &+c^\alpha_1(t,x,y)\dot{x} + c^\alpha_2(t,x,y)\dot{y} + d^\alpha(t,x,y) \quad (\alpha = 1,2) \end{aligned} \tag{7.1}$$

— полиномы второго порядка от $\dot{x}$, $\dot{y}$ с коэффициентами, зависящими от x, y и t, допускает четырехмерную разрешимую группу симметрий, не содержащую абелевой подгруппы G_3, со структурными уравнениями[1] *$e_ie_j = C^k_{ij}$ и базисными векторными полями $E_1, \dots, E_4$ соответствующей алгебры Ли, то эта система и алгебра Ли принадлежат одному из перечисленных ниже типов. Система* (7.1) *заменой переменных $(t,x,y) \to (\widetilde{t},\widetilde{x},\widetilde{y})$ приводится к виду*

$$\frac{d^2\widetilde{x}}{d\widetilde{t}^2} = 0, \quad \frac{d^2\widetilde{y}}{d\widetilde{t}^2} = 0 \tag{7.2}$$

тогда и только тогда, когда выполнены условия (4.9)*, в которых следует положить $n = 3$.*

I. *Системы с алгеброй Ли симметрий типа Ли–Кручковича* I

$$e_1e_4 = ce_1, \quad e_2e_3 = e_1, \quad e_2e_4 = e_2, \quad e_3e_4 = (c-1)e_3 \quad (c \in \mathbf{R}).$$

Тип $\mathrm{A}^{(4)}_1$:

$$P = Q_1 = 0, \quad Q_2 = \rho(y)\dot{x}^2 + 2\sigma(y)\dot{x}\dot{y} + \tau(y)\dot{y}^2,$$
$$E_1 = \partial_t, \quad E_2 = x\partial_t, \quad E_3 = -\partial_x, \quad E_4 = t\partial_t \quad (c = 1);$$

необходимые и достаточные (*н. и д.*) *условия приводимости к виду* (7.2)

$$\sigma = \mathrm{const}, \quad \rho = \exp\Big(-\int\tau(y)dy\Big)\Big(k_0 + \sigma^2\int\exp\Big(\int\tau(y)dy\Big)dy\Big).$$

Тип $\mathrm{A}^{(4)}_2$:

$$P = 0, \quad Q_1 = \lambda(x)\dot{x}^2, \quad Q_2 = \psi(x),$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = t\partial_y, \quad E_3 = -\partial_t, \quad E_4 = t\partial_t + 2y\partial_y \quad (c = 2);$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2) $\psi = \mathrm{const}$.

Тип $\mathrm{A}^{(4)}_3$:

$$P = 0, \quad Q_1 = \lambda(x)\dot{x}^2, \quad Q_2 = \mu(x)\dot{x},$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = \partial_t, \quad E_3 = t\partial_y, \quad E_4 = t\partial_t + y\partial_y \quad (c = 1);$$

[1] Здесь и далее e_ie_j означает лиево произведение базисных элементов e_i, e_j, C^k_{ij} — структурные константы. Нулевые лиевы произведения в уравнениях структуры не выписываются.

н. и д. условия приводимости к виду (7.2) $\mu = k_1 \exp\Big(\int \lambda(x)dx\Big)$.

Тип $\mathrm{A}_4^{(4)}$:

$$P = Q_1 = 0, \quad Q_2 = \psi(x)(2\dot x\dot y - 1),$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = \partial_t, \quad E_3 = x\partial_t + t\partial_y, \quad E_4 = t\partial_t + 2y\partial_y \quad (c = 2);$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2) $\psi = (x + k_1)^{-1}$.

Тип $\mathrm{A}_5^{(4)}$:

$$P = 0, \quad Q_1 = k_1\dot x^2 + k_2 e^{(1-c)x}\dot x + k_3 e^{2(1-c)x}, \quad Q_2 = k_4 e^{cx}\dot x^2 + k_5 e^x \dot x + k_6 e^{(2-c)x},$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = t\partial_y, \quad E_3 = -\partial_t, \quad E_4 = (c-1)t\partial_t + \partial_x + cy\partial_y;$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2)

$$(c-1)k_2 = 0, \quad k_5(k_1 - 1) - k_2k_4 = 0,$$
$$4k_6(c-2) + k_2k_5 - 4k_3k_4 = 0, \quad k_2^2 + 4k_3(2c - k_1 - 2) = 0.$$

Тип $\mathrm{A}_6^{(4)}$:

$$P = 0, \quad Q_1 = k_1(\dot y^2 - 2x\dot y + x^2), \quad Q_2 = k_2\dot x,$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = \partial_t, \quad E_3 = \partial_x + t\partial_y, \quad E_4 = t\partial_t - 2x\partial_x - y\partial_y \qquad (c = -1);$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2) $k_1 = 0$.

Тип $\mathrm{A}_7^{(4)}$:

$$P = 0, \quad Q_1 = 2k_1\dot x(\dot y - x), \quad Q_2 = k_2(\dot y^2 - 2x\dot y + x^2) + k_3\dot x,$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = \partial_t, \quad E_3 = \partial_x + t\partial_y, \quad E_4 = t\partial_t - x\partial_x \quad (c = 0);$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2) $k_1 = k_2 = 0$.

Тип $\mathrm{A}_8^{(4)}$:

$$P = 0, \quad Q_1 = k_1 t(\dot x^2 - 2t\dot x\dot y + t^2\dot y^2) + k_2\dot y, \quad Q_2 = k_1(\dot x^2 - 2t\dot x\dot y + t^2\dot y^2),$$
$$E_1 = \partial_x, \quad E_2 = \partial_y, \quad E_3 = \partial_t + y\partial_x, \quad E_4 = \frac{1}{2}(x\partial_x - t\partial_t) + y\partial_y \quad (c = 1/2);$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2) $k_1 = 0$.

Тип $\mathrm{A}_9^{(4)}$:

$$P = 0, \quad Q_1 = k_1\dot x^2, \quad Q_2 = k_2\dot x,$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = \partial_t, \quad E_3 = \partial_x + t\partial_y, \quad E_4 = t\partial_t + q\partial_x + y\partial_y \quad (c = 1, \quad q \neq 0);$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2) $k_1k_2 = 0$.

Тип $\mathrm{A}_{10}^{(4)}$:

$$P = (k_2y^2 + k_1y + k_0)\dot x\dot y, \quad Q_1 = -(2k_2y + k_1)\dot x\dot y + k_2\dot y, \quad Q_2 = (k_3 - k_2y)\dot y^2,$$
$$E_1 = \partial_t, \quad E_2 = \partial_x, \quad E_3 = x\partial_t + \partial_y, \quad E_4 = t\partial_t + x\partial_x \quad (c = 1);$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2) (1) $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ *или* (2) $k_1 = k_2 = k_0 = 0$.

Тип $\mathrm{A}_{11}^{(4)}$:

$$P = 0, \quad Q_1 = r_0\dot x^2 + r_1e^{-x}\dot x + r_2e^{-2x}, \quad Q_2 = s_0e^{cx}\dot x^2 + s_1e^{(c-1)x}\dot x + s_2e^{(c-2)x},$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = \partial_t, \quad E_3 = t\partial_y, \quad E_4 = t\partial_t + \partial_x + cy\partial_y;$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2)

$$r_1 = 0, \quad r_2(r_0 - 2) = 0, \quad s_1(q_0 - c + 1) = 0, \quad (c-2)s_2 + r_2s_0 = 0.$$

Тип $\mathrm{A}_{12}^{(4)}$:

$$P = qx^{\alpha}\dot{x}^2, \quad Q_1 = 0, \quad Q_2 = rx^{2\alpha+1}\dot{x}^2 - 2\frac{s}{x}\dot{x}\dot{y} - qx^{\alpha}\dot{x} + \frac{s}{x} \quad \left(\alpha = \frac{2c-3}{2-c}\right),$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = \partial_t, \quad E_3 = x\partial_t + t\partial_y, \quad E_4 = t\partial_t + (2-c)x\partial_x + cy\partial_y;$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2) (1) $s = 0$, $(2c-3)q = 0$ *или* (2) $s = -1$, $(c-3)q = 0$.

Если система (7.1) *допускает алгебру симметрий типа Ли–Кручковича* I *с базисными векторными полями*

$$E_1 = \partial_t, \quad E_2 = x\partial_t, \quad E_3 = -\partial_x, \quad E_4 = ct\partial_t + (c-1)x\partial_x$$

или

$$E_1 = \partial_t, \quad E_2 = \partial_x, \quad E_3 = x\partial_t, \quad E_4 = ct\partial_t + x\partial_x$$

при $c \neq 1, 2$, *а также*

$$E_1 = \partial_t, \quad E_2 = x\partial_t, \quad E_3 = -\partial_x, \quad E_4 = y\partial_t - x\partial_x \quad (c = 0)$$

или

$$E_1 = \partial_t, \quad E_2 = \partial_x, \quad E_3 = x\partial_t + \partial_y, \quad E_4 = ct\partial_t + x\partial_x + (c-1)y\partial_y$$

при $c \neq -1,\ 0,\ 1/2,\ 1$, *то она приводится к виду* (7.2).

II. *Системы с алгеброй Ли симметрий типа Ли–Кручковича* II

$$e_1e_4 = 2e_1, \quad e_2e_3 = e_1, \quad e_2e_4 = e_2, \quad e_3e_4 = e_2 + e_3.$$

Тип $\mathrm{A}_{13}^{(4)}$:

$$P = 0, \quad Q_1 = r_0\dot{x}^2 + r_1e^{-x}\dot{x} + r_2e^{-2x}, \quad Q_2 = s_0e^{2x}\dot{x}^2 + s_1e^{x}\dot{x} + x + s_2,$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = t\partial_y, \quad E_3 = -\partial_t, \quad E_4 = t\partial_t + \partial_x + \left(2y - \frac{1}{2}t^2\right)\partial_y;$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2) $r_0 = 2$, $r_1 = s_1 = r_2s_0 + 1 = 0$.

Тип $\mathrm{A}_{14}^{(4)}$:

$$P = pe^{-x}\dot{x}^2, \quad Q_1 = 0, \quad Q_2 = re^{-2x}\dot{x}^2 - 2q\dot{x}\dot{y} - pe^{-x}\dot{x} + q,$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = \partial_t, \quad E_3 = x\partial_t + t\partial_y, \quad E_4 = t\partial_t - \partial_x + 2y\partial_y;$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2) $p = q = 0$.

Если система (7.1) *допускает алгебру симметрий типа Ли–Кручковича* II *с базисными векторными полями*

$$E_1 = \partial_t, \quad E_2 = \partial_x, \quad E_3 = x\partial_t + \partial_y, \quad E_4 = \left(2t + \frac{1}{2}y^2\right)\partial_t + (x+y)\partial_x + y\partial_y,$$

то она приводится к виду (7.2).

III. *Системы с алгеброй Ли симметрий типа Ли–Кручковича* III

$$e_1e_4 = qe_1, \quad e_2e_3 = e_1, \quad e_2e_4 = e_3, \quad e_3e_4 = -e_2 + qe_3 \quad (q \in \mathbf{R}, \quad q^2 < 4).$$

Тип $\mathrm{A}_{15}^{(4)}$:

$$P = quv^3\dot{x}^2, \quad Q_1 = 0, \quad Q_2 = ru^2v^4\dot{x}^2 + 2v^2(x-s)\dot{x}\dot{y} - quv^3\dot{x} + v^2(s-x),$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = \partial_t, \quad E_3 = x\partial_t + t\partial_y, \quad E_4 = tx\partial_t + (x^2 - qx + 1)\partial_x + \left(qy + \frac{1}{2}t^2\right)\partial_y,$$

где

$$u = \exp\left(\frac{q}{\sqrt{4-q^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x-q}{\sqrt{4-q^2}}\right), \quad v = \frac{1}{\sqrt{x^2-qx+1}},$$

к виду (7.2) *не приводится.*

Тип $\mathrm{A}_{16}^{(4)}$:

$$P = p\dot{x}\dot{y}, \quad Q_1 = -p(x\dot{x}^2 - \dot{y} + x),$$
$$Q_2 = r\dot{x}^2 - 2px\dot{x}\dot{y} + s\dot{y}^2 + (px^2 - 1)\dot{x} + sx(x - 2\dot{y}) + r,$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = \partial_t, \quad E_3 = \partial_x + t\partial_y, \quad E_4 = -x\partial_t + t\partial_x + \frac{1}{2}(t^2 - x^2)\partial_y \quad (q = 0);$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2) $p = s = 0$.

Если система (7.1) *допускает алгебру симметрий типа Ли–Кручковича* III *с базисными векторными полями*

$$E_1 = \partial_t, \quad E_2 = \partial_x, \quad E_3 = x\partial_t + \partial_y, \quad E_4 = \Big(qt + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\Big)\partial_t - y\partial_x + (qy + x)\partial_y,$$

то она приводится к виду (7.2).

IV. *Системы с алгеброй Ли симметрий типа Ли–Кручковича* IV

$$e_1e_4 = e_1, \quad e_2e_3 = e_2.$$

Тип $\mathrm{A}_{17}^{(4)}$:

$$P = Q_2 = 0, \quad Q_1 = \lambda(x)\dot{x}^2 + t^{-1}\zeta(x)\dot{x} + t^{-2}\theta(x),$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = t\partial_y, \quad E_3 = -t\partial_t, \quad E_4 = t\partial_t + y\partial_y;$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2)

$$\zeta = \mathrm{const}, \quad \theta = \frac{1}{4}\exp\Big(-\int\lambda(x)dx\Big)\Big(k_0 + \zeta(\zeta - 2)\int\exp\Big(\int\lambda(x)dx\Big)dx\Big).$$

Тип $\mathrm{A}_{18}^{(4)}$:

$$P = 0, \quad Q_1 = p_0\dot{x}^2 + p_1t^{-1}\dot{x} + p_2t^{-2}, \quad Q_2 = (q_0\dot{x}^2 + q_1t^{-1}\dot{x} + q_2t^{-2})e^x,$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = t\partial_y, \quad E_3 = -t\partial_t, \quad E_4 = t\partial_t + \partial_x + y\partial_y;$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2)

$$p_1q_0 + (1 - p_0)q_1 = 0, \quad p_1(2 - p_1) + 4p_0p_2 = 0, \quad (2 - p_1)q_1 + 4(p_2q_0 + q_2) = 0.$$

Тип $\mathrm{A}_{19}^{(4)}$:

$$P = 0, \quad Q_1 = 2\mu(y)\dot{x}\dot{y}, \quad Q_2 = \tau(y)\dot{y}^2,$$
$$E_1 = \partial_t, \quad E_2 = \partial_x, \quad E_3 = x\partial_x, \quad E_4 = t\partial_t;$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2)

$$\mu = \exp\Big(\int\tau(y)dy\Big)\Big(\int\exp\Big(\int\tau(y)dy\Big)dy + k_0\Big)^{-1}.$$

Тип $\mathrm{A}_{20}^{(4)}$:

$$P = 0, \quad Q_1 = p_0\dot{x}^2 + p_1e^{-x}\dot{x}\dot{y} + p_2e^{-2x}\dot{y}^2, \quad Q_2 = q_0e^x\dot{x}^2 + q_1\dot{x}\dot{y} + q_2e^{-x}\dot{y}^2,$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = \partial_t, \quad E_3 = t\partial_t, \quad E_4 = \partial_x + y\partial_y;$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2)

$$2q_2 = -p_1, \quad p_2(2p_0 - q_1 - 4) - {p_1}^2 = 0,$$
$$q_1(q_1 - 2p_0) + 4p_1q_0 = 0, \quad p_1(2 - q_1) + 4p_2q_0 = 0.$$

Тип $\mathrm{A}_{21}^{(4)}$:

$$P = 0, \quad Q_1 = q\dot{x}^2, \quad Q_2 = s\dot{x}\dot{y},$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = \partial_t, \quad E_3 = t\partial_t + \partial_x, \quad E_4 = y\partial_y + b\partial_x \quad (b = \mathrm{const} \neq 0);$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2) $s(s-2q) = 0$.

Тип $\mathrm{A}_{22}^{(4)}$:

$$P = 0, \quad Q_1 = p\dot{x} + qe^{-t}\dot{y}, \quad Q_2 = re^t\dot{x} + s\dot{y},$$
$$E_1 = \partial_x, \quad E_2 = \partial_y, \quad E_3 = \partial_t + y\partial_y, \quad E_4 = -\partial_t + x\partial_x;$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2) (1) $p + s = r = q = 0$ *или* (2) $s = p = 1$, $r = 0$, *или* (3) $s = p = -1$, $q = 0$.

Тип $\mathrm{A}_{23}^{(4)}$:

$$P = 0, \quad Q_1 = q\dot{x}^2, \quad Q_2 = r\dot{x}\dot{y} + se^{-2x},$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = \partial_t, \quad E_3 = t\partial_t + \partial_x, \quad E_4 = -\frac{1}{2}\partial_x + y\partial_y;$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2) (1) $r = s = 0$ *или* (2) $r = 2q$, $s = 0$, *или* (3) $q = 2$, $r = 4$.

Тип $\mathrm{A}_{24}^{(4)}$:

$$P = 0, \quad Q_1 = q\dot{x}^2 + re^{-x}\dot{y}, \quad Q_2 = s\dot{x}\dot{y},$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = \partial_t, \quad E_3 = t\partial_t + \partial_x, \quad E_4 = \partial_x + y\partial_y;$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2) (1) $r = s = 0$ *или* (2) $r = 0$, $s = 2q$, *или* (3) $q = 1$, $s = 0$.

Тип $\mathrm{A}_{25}^{(4)}$:

$$P = pe^x\dot{y}^2, \quad Q_1 = q\dot{x}^2, \quad Q_2 = r\dot{x}\dot{y},$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = \partial_t, \quad E_3 = t\partial_t + \partial_x, \quad E_4 = -2\partial_x + y\partial_y;$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2) (1) $p = r = 0$ *или* (2) $p = 0$, $r = 2q$, *или* (3) $q = 1$, $r = 2$.

Тип $\mathrm{A}_{26}^{(4)}$:

$$P = 0, \quad Q_1 = \frac{p}{x}\dot{x}^2, \quad Q_2 = \frac{1}{x}\dot{x}(q\dot{x} + p\dot{y}),$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = \partial_t, \quad E_3 = t\partial_t + x\partial_y, \quad E_4 = x\partial_x + y\partial_y;$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2) (1) $p = 0$ *или* (2) $p = -2$.

V. *Системы с алгеброй Ли симметрий типа Ли–Кручковича* V

$$e_1e_3 = e_1, \quad e_2e_3 = e_2, \quad e_1e_4 = e_2, \quad e_2e_4 = -e_1.$$

Тип $\mathrm{A}_{27}^{(4)}$:

$$P = Q_2 = 0, \quad Q_1 = \lambda(x)\dot{x}^2 + (2t + \phi(x))(1+t^2)^{-1}\dot{x} + \psi(x)(1+t^2)^{-2},$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = t\partial_y, \quad E_3 = y\partial_y, \quad E_4 = (1+t^2)\partial_t + ty\partial_y;$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2)

$$\phi = \mathrm{const}, \quad \psi = \exp\Big(-\int\lambda(x)dx\Big)\Big(k_0 + \Big(1 + \frac{1}{4}\phi^2\Big)\int\exp\Big(\int\lambda(x)dx\Big)dx\Big).$$

Тип $\mathrm{A}_{28}^{(4)}$:

$$P = 0, \quad Q_1 = p_2\dot{x}^2 + (2t + p_1)(1 + t^2)^{-1}\dot{x} + p_0(1 + t^2)^{-2},$$
$$Q_2 = (1 + t^2)^{-1/2}(q_2(1 + t^2)\dot{x}^2 + q_1\dot{x} + q_0(1 + t^2)^{-1})e^x,$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = t\partial_y, \quad E_3 = \partial_x + y\partial_y, \quad E_4 = (1 + t^2)\partial_t + ty\partial_y;$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2) $p_1^2 + 4(1 - p_0p_2) = 0$, $p_1q_2 + (1 - p_2)q_1 = 0$, $4(p_0q_2 + q_0) - q_1p_1 = 0$.

Тип $\mathrm{A}_{29}^{(4)}$:

$$P = 0, \quad Q_1 = \zeta(t)\dot{x} + \eta(t)\dot{y}, \quad Q_2 = -\eta(t)\dot{x} + \zeta(t)\dot{y},$$
$$E_1 = \partial_x, \quad E_2 = \partial_y, \quad E_3 = x\partial_x + y\partial_y, \quad E_4 = x\partial_y - y\partial_x;$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2) $\eta(t) = k_0 \exp\Big(-\displaystyle\int \zeta(t)dt\Big)$.

Тип $\mathrm{A}_{30}^{(4)}$:

$$P = 0, \quad Q_1 = \zeta(t)\dot{x} + \eta(t)\dot{y}, \quad Q_2 = \chi(t)\dot{x} + (2q - \zeta(t))\dot{y},$$
$$E_1 = \partial_x, \quad E_2 = \partial_y, \quad E_3 = x\partial_x + y\partial_y, \quad E_4 = \partial_t - y\partial_x + x\partial_y,$$

где

$$\eta = p_0 + p_1\cos 2t + p_2\sin 2t, \quad \zeta = q + p_2\cos 2t - p_1\sin 2t, \quad \chi = \eta - 2p_0;$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2) $p_0 = p_1 = p_2 = 0$ *при* $q \neq 0$ *и* $p_1 = p_2 = 0$ *при* $q = 0$.

Тип $\mathrm{A}_{31}^{(4)}$:

$$P = p\dot{x}\dot{y}, \quad Q_1 = q\dot{x}^2 + re^{-2x}(\dot{y}^2 + 1), \quad Q_2 = p\dot{x},$$
$$E_1 = \partial_y, \quad E_2 = \partial_t, \quad E_3 = t\partial_t + \partial_x + y\partial_y, \quad E_4 = y\partial_t + b\partial_x - t\partial_y \quad (b = \mathrm{const}, \quad br = 0);$$

н. и д. условия приводимости к виду (7.2) (1) $p = r = 0$ *или* (2) $q = r = 0$, *или* (3) $p = 0$, $q = 2$.

В приведенных выше формулах $k_{..}$, $p_{..}$, $q_{..}$, $r_{..}$, $s_{..}$ — *постоянные.*

Литература

1. Биркгоф Г. *Гидродинамика. Постановка задач, результаты и подобие.* – М.: Ин. лит., 1954.
2. Овсянников М.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1978. – 400 с.
3. Ибрагимов Н.Х. *Группы преобразований в математической физике.* – М.: Наука, 1983. – 280 с.
4. Anderson R.L., Ibragimov N.H. *Lie–Backlund transformations in applications* // SIAM Studies in Appl. Math. – Philadelphia, 1979. – № 1.
5. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. *Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1986. – 335 с.
6. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Обобщенный метод интегрирования гамильтоновых систем* // Функц. анализ и его прилож. – 1978. – Т. 12. – № 2. – С. 46–56.
7. Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Новиков С.П. *Интегрируемые системы.* I // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. – М.: ВИНИТИ, 1985. – Т. 4. – С. 179–284.
8. Дрюма В.С. *Геометрическая теория нелинейных динамических систем* // Препринт ИМ с ВЦ АН МССР. – Кишинев, 1986. – 54 с.
9. Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.* – М.: Мир, 1989. – 639 с.
10. Аминова А.В. *Проективные преобразования и симметрии дифференциальных уравнений* // Матем. сб. – 1995. – Т. 186. – № 12. – С. 21–37.
11. Аминова А.В., Аминов Н.А.-М. *Проективная геометрия обыкновенных дифференциальных систем* // Юбилейная научн. конф. физическ. факультета Казанского ун-та. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2004. – С. 106.

12. Султанов А.Я. *Трехмерные пространства проективной связности малой подвижности* // Учен. зап. Рязанск. гос. пед. ин-та. – 1974. – С. 27–32.
13. Султанов А.Я. *О некоторых трехмерных пространствах проективной связности, допускающих прямые произведения групп движений* // Пенз. гос. пед. ин-т. Пенза, 1980. Деп. в ВИНИТИ, № 288-81. – 20 с.
14. Султанов А.Я. *Об автоморфизмах в пространствах проективной связности*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Пенза: Пензенск. гос. пед. ин-т, 1981. – 234 с.
15. Кручкович Г.И. *Классификация трехмерных римановых пространств по группам движений* // УМН. – 1954. – № 9. – Вып. 1. – С. 3–40.
16. Кручкович Г.И. *О движениях в римановых пространствах* // Матем. сб. – 1957. – Т. 41. – № 2. – С. 195–220.
17. Петров А.З. *Новые методы в общей теории относительности.* – М.: Наука, 1966. – 495 с.
18. Аминова А.В. *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий.* – М.: Янус-К, 2003. – 619 с.
19. Картан Э. *Пространства аффинной, проективной и конформной связности.* – Казань, 1962. – С. 119–152.
20. Yano K. *The theory of Lie derivatives and its applications.* – Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1957. – 299 p.
21. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 1. – М.: Наука, 1981.
22. Егоров И.П. *Движения в пространствах аффинной связности* // Движения в простр. аффин. связ. – Казань, 1965. – С. 5–179.
23. Palais R.S. *A global formulation of the Lie theory of transformation groups* // Mem. Amer. Math. Soc. – 1957. – № 22. – 123 p.
24. Понтрягин Л.С. *Непрерывные группы.* – М.: Наука, 1973. – 519 с.

Казанский государственный университет

Казанский государственный технический университет

Поступила
24.02.2005