ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 11 (498)

УДК 514.764

В.А. КИОСАК, Й. МИКЕШ

О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВ ЭЙНШТЕЙНА

1. Введение

Диффеоморфизм f риманова пространства V_n на риманово пространство $\overline{V}_n$ называют *геодезическим отображением*, если f отображает любую геодезическую линию V_n в геодезическую линию $\overline{V}_n$. Этими отображениями занималось много авторов, см. например, [1]–[3]. Исследования по геодезическим отображениям последних лет отражены в обзорной статье [4].

Отметим, что на сигнатуру метрик римановых пространств V_n не налагаем ограничения, как принято, например, в [2], [3]. Исследования ведутся локально в классе достаточно гладких функций.

Пространства Эйнштейна, которые характеризуются условиями на тензор Риччи

$$R_{ij} = \frac{R}{n} g_{ij},$$

где R — скалярная кривизна, g_{ij} – метрический тензор, имеют большое значение как в римановой геометрии, так и в ее приложениях [1], [2],... Вопросами о геодезическом отображении пространств Эйнштейна занималось много геометров (см., напр., [2], [4]–[13]).

Напомним итоговый результат А.З. Петрова и В.И. Голикова [2] о геодезических отображениях четырехмерных пространств Эйнштейна: *четырехмерные пространства Эйнштейна V_4 непостоянной кривизны с сигнатурой Минковского не допускают нетривиальные геодезические отображения на римановы пространства $\overline{V}_4$ с сигнатурой Минковского.* Нами доказана теорема, которая обобщает этот результат.

Распространяя методы исследований геодезических отображений четырехмерных пространств Эйнштейна сигнатуры Минковского на эйнштейновы пространства более высоких размерностей $n > 4$, А.З. Петров ([2], сс. 355, 461) высказал гипотезу: *пространства Эйнштейна V_n $(n > 4)$ сигнатуры Минковского, отличные от пространств постоянной кривизны, не допускают нетривиальных геодезических отображений на пространства Эйнштейна той же сигнатуры.* Приводим пример, который эту гипотезу опровергает.

Как оказалось, пространства Эйнштейна, допускающие геодезические отображения, являются по необходимости пространствами $V_n(B)$ [4], [11]–[13]. Указанные пространства обобщают введенные в [14] пространства $V(K)$. Поэтому предварительно приводим новые результаты в теории геодезических отображений пространств $V_n(B)$, которые затем применяем для изучения геодезических отображений пространств Эйнштейна.

2. О римановых пространствах $V_n(B)$

Риманово пространство V_n, допускающее нетривиальное геодезическое отображение, будем обозначать через $V_n(B)$ [4], [11], [13], [15], если в нем выполняются уравнения

$$\begin{aligned} &\text{(а)}\ a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}, \\ &\text{(б)}\ \ \lambda_{i,j} = \mu g_{ij} + B a_{ij}, \end{aligned} \qquad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Чешской республики № 201/02/0616.

где “,” обозначает ковариантную производную в V_n относительно невырожденного симметрического тензора a_{ij}, ковектора λ_i и инвариантов μ и B.

В [11], [15] доказано, что если $V_n(B)$ допускает любое другое геодезическое отображение на некоторое $\overline{V}_n$, то при этом отображении также будут выполняться уравнения (1) при одинаковом инварианте B. Там же была установлена замкнутость пространств $V_n(B)$ относительно геодезических отображений, т. е. доказано, что если $V_n(B)$ допускает геодезическое отображение на некоторое $\overline{V}_n$, то $\overline{V}_n$ является пространством $\overline{V}_n(\overline{B})$.

Установлено [4], что эйнштейновы, обобщенно полусимметрические и обобщенно Риччи полусимметрические V_n, допускающие нетривиальные геодезические отображения, являются пространствами $V_n(B)$. Пространствами $V_n(B)$ будут также пространства $V(K)$ А.С. Солодовникова [14] и Г.И. Кручковича [16].

В [3] введено понятие *степени подвижности* относительно геодезических отображений. Доказано [17], что римановы пространства V_n, имеющие степень подвижности относительно геодезических отображений больше двух, являются пространствами $V_n(B)$, B — const.

Отметим несколько свойств пространств $V_n(B)$.

Теорема 1. *Любое геодезическое отображение риманова пространства $V_n(B)$, $B \neq 0$, является либо нетривиальным, либо гомотетическим.*

Доказательство. Предположим, что пространство $V_n(B)$, $B \neq 0$, допускает аффинное (т. е. тривиальное геодезическое) отображение. Тогда существует решение уравнений (1) при $\lambda_i = 0$. Из (1(б)) следует $\mu g_{ij} + B a_{ij} = 0$. При $B \neq 0$ вытекает, что $a_{ij} = -\frac{\mu}{B} g_{ij}$. Отсюда согласно ([3], сс. 75, 121) следует, что геодезическое отображение является гомотетическим. □

Теорема 2. *Если в римановом пространстве $V_n(B)$ среди векторов λ_i, удовлетворяющих* (1)*, есть ненулевой изотропный вектор, то $B = 0$.*

Доказательство. Пусть в $V_n(B)$, $B \neq 0$, тензор a_{ij}, ковектор λ_i ($\neq 0$) и инвариант μ являются решением системы уравнений геодезических отображений, которые в $V_n(B)$ имеют вид (1).

Далее предполагаем, что λ_i — изотропный вектор, т. е. выполняются условия

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta g^{\alpha\beta} = 0. \tag{2}$$

Здесь и дальше g^{ij} являются компонентами обратной матрицы к $\|g_{ij}\|$.

а) Сначала рассмотрим случай, когда $B \neq \mathrm{const}$. Из [18] вытекает, что тензор a_{ij} и вектор λ_i удовлетворяют условиям

$$\text{(а)}\ a_{ij} = \alpha g_{ij} + \beta \lambda_i \lambda_j, \quad \text{(б)}\ \lambda_{i,j} = \gamma g_{ij} + \delta \lambda_i \lambda_j, \tag{3}$$

где α, β, γ, δ — некоторые функции инварианта λ.

Дифференцируя (2), подставляя (3(б)), убедимся, что $\gamma = 0$. Тогда, дифференцируя (3(а)), после подстановки (1) и (3) имеем $\lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik} = \lambda_k(\alpha' g_{ij} + (\beta' + 2\delta)\lambda_i \lambda_j)$. Отсюда вытекает, что $\lambda_i = 0$. В противном случае $\mathrm{rang}\,\|g_{ij}\| \leq 2$. Следовательно, случай а) доказан.

б) Осталось рассмотреть случай, когда $B \equiv \mathrm{const} \neq 0$. Тогда имеют место уравнения (1) и для инварианта μ выполняется условие

$$\mu_{,i} = 2B\lambda_i. \tag{4}$$

Дифференцируем (2). После подстановки (1(б)) получаем

$$\mu\lambda_i + B a_{i\alpha} \lambda^\alpha = 0. \tag{5}$$

Затем дифференцируем (5) и, учитывая (1), (2) и (4), имеем

$$3B\lambda_i \lambda_j + \mu^2 g_{ij} + 2\mu B a_{ij} + B^2 a_{i\alpha} a^\alpha_j = 0. \tag{6}$$

Продифференцируем (6) по x^k, на основании (1) и (4) будем иметь

$$4\lambda_k(B\mu\, g_{ij} + B^2 a_{ij}) + \lambda_i c_{jk} + \lambda_j c_{ik} = 0, \tag{7}$$

где c_{ij} — некоторый симметрический тензор. Так как $\lambda_i \neq 0$, то существует ε^i такой, что $\varepsilon^i\lambda_i = 1$. Свертывая (7) с $\varepsilon^i\varepsilon^j$, убедимся, что $c_{\alpha k}\varepsilon^\alpha = c\lambda_k$, где c — некоторый инвариант. Тогда после свертывания (7) с ε^i получим $c_{jk} = c_j\lambda_k$, где c_j — некоторый вектор. Тензор c_{jk} является симметричным тензором, поэтому имеем $c_{jk} = \alpha\lambda_j\lambda_k$, где α — некоторый инвариант. Но при этом из (7) вытекает справедливость формулы

$$\mu B\, g_{ij} + B^2 a_{ij} + \beta\lambda_i\lambda_j = 0, \tag{8}$$

где β — некоторый инвариант.

После дифференцирования (8) по x^k убедимся, что справедлива формула

$$2B^2\lambda_k g_{ij} + \lambda_i d_{jk} + \lambda_j d_{ik} = 0,$$

где d_{ij} — некоторый тензор.

Из последнего равенства в случае, когда $B \neq 0$, вытекает, что $\operatorname{rang}\|g_{ij}\| \leq 2$. Следовательно, $B = 0$. $\square$

Аналогичным образом можно убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема 3. *Если в римановом пространстве $V_n(B)$ среди ненулевых векторов λ_i, удовлетворяющих уравнению* (1), *есть взаимоортогональные, то $B = 0$.*

3. Геодезические отображения четырехмерных пространств Эйнштейна

Докажем теорему, которая обобщает результат А.З. Петрова и Г.И. Голикова, сформулированный во введении.

Теорема 4. *Четырехмерные пространства Эйнштейна V_4, отличные от пространств постоянной кривизны, не допускают нетривиальные геодезические отображения на римановы пространства $\overline{V}_4$.*

Доказательство проведем методом от противного. Допустим, что четырехмерное пространство Эйнштейна V_4 с непостоянной кривизной допускает нетривиальное геодезическое отображение на риманово пространство $\overline{V}_4$.

Тогда согласно известным результатам [4], [12] $\overline{V}_4$ является, по необходимости, также пространством Эйнштейна, а само V_4 — пространством $V_4(B)$, где $B = \frac{R}{12}$. В этом случае основные уравнения геодезических отображений запишутся в виде

$$\text{(а) } a_{ij,k} = \lambda_i\, g_{jk} + \lambda_j\, g_{ik}, \quad \text{(б) } \lambda_{i,j} = \mu g_{ij} + \frac{R}{12}a_{ij}, \quad \text{(в) } \mu_{,i} = \frac{R}{6}\lambda_i. \tag{9}$$

Условия интегрируемости уравнений (9(б)) имеют вид

$$\lambda_\alpha Y^\alpha_{ijk} = 0, \tag{10}$$

где $Y^h_{ijk} \equiv R^h_{ijk} - \frac{R}{n(n-1)}(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik})$. Здесь R^h_{ijk} — тензор Римана, δ^h_i — символы Кронекера.

Тензор Y^h_{ijk} называется тензором *концикулярной кривизны Яно* риманова пространства V_n [19]. Так как пространство V_4 имеет непостоянную кривизну, то его тензор концикулярной кривизны не равен нулю.

На основании [20] из условий (10) при $n = 4$ следует изотропность вектора λ^h. Тогда из теоремы 2 вытекает $B = 0$. В итоге скалярная кривизна R равна нулю, а значит, исследуемое пространство V_4 является Риччи плоским, т. е. имеет место

$$R_{ij} = 0. \tag{11}$$

Поскольку изотропность вектора λ_i влечет равенство нулю инварианта μ, то вектор λ_i ковариантно постоянен. В результате условия (10) принимают вид

$$\lambda_\alpha R^\alpha_{ijk} = 0. \tag{12}$$

Известно [1], [2], что в V_4, в котором существует изотропный ковариантно постоянный вектор λ^h, можно выбрать специальную систему координат, в которой

$$\lambda^h = \delta^h_1, \quad g_{ij}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ 0 & g_{23} & g_{33} & g_{34} \\ 1 & g_{24} & g_{34} & g_{44} \end{pmatrix}, \quad g^{ij}(x) = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} & 1 \\ g^{12} & g^{22} & g^{23} & 0 \\ g^{13} & g^{23} & g^{33} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дальнейшие рассуждения будем вести в этой системе координат. Тогда условия (12) принимают вид $R_{1ijk} = 0$. Затем из (11) при $i = 2$, $j = 4$ и $i = 3$, $j = 4$ имеем

$$g^{32}R_{3242} + g^{33}R_{3243} = 0,$$
$$g^{22}R_{2342} + g^{23}R_{2343} = 0.$$

Так как $\begin{vmatrix} g^{22} & g^{23} \\ g^{23} & g^{33} \end{vmatrix} \neq 0$, то из последнего следует $R_{3242} = R_{3243} = 0$. Кроме того, из (11) при $i = j = 2$, $i = j = 3$ и $i = 2$, $j = 3$ будем иметь

$$g^{33}R_{3223} = g^{22}R_{2332} = g^{23}R_{3232} = 0.$$

Из последнего вытекает $R_{2332} = 0$.

В итоге отличными от нуля компонентами тензора Римана (с точностью до известных тождеств тензора Римана) могут быть только R_{2442}, R_{2443}, R_{3443}.

Таким образом, тензор Римана четырехмерного пространства Эйнштейна может быть представлен в виде

$$R_{hijk} = \varepsilon(\xi_h\lambda_i - \xi_i\lambda_h)(\xi_j\lambda_k - \xi_k\lambda_j). \tag{13}$$

Здесь $\lambda_i \equiv \lambda^\alpha g_{\alpha i} = g_{1i} = \delta^4_i$, ξ_i — некоторый неколлинеарный к λ_i вектор, $\varepsilon = \pm 1$.

Учитывая (13), из (11) получим

$$\xi^\alpha\xi_\alpha = 0 \quad \text{и} \quad \xi_\alpha\lambda^\alpha = 0. \tag{14}$$

Ковариантно продифференцируем (13) в направлении x^l. В силу ковариантного постоянства вектора λ_i имеем

$$R_{hijk,l} = \varepsilon(\xi_{h,l}\lambda_i - \xi_{i,l}\lambda_h)(\xi_j\lambda_k - \xi_k\lambda_j) + \varepsilon(\xi_h\lambda_i - \xi_i\lambda_h)(\xi_{j,l}\lambda_k - \xi_{k,l}\lambda_j). \tag{15}$$

Учитывая тождества Бианки, проциклируем (15) по индексам j, k, l:

$$\begin{aligned}(\lambda_i\xi_{h,l} - \xi_{i,l}\lambda_h)(\xi_j\lambda_k - \xi_k\lambda_j) + (\lambda_i\xi_{h,j} - \xi_{i,j}\lambda_h)(\xi_k\lambda_l - \xi_l\lambda_k) + {}\\ + (\lambda_i\xi_{h,k} - \xi_{i,k}\lambda_h)(\xi_l\lambda_j - \xi_j\lambda_l) + (\xi_h\lambda_i - \xi_i\lambda_h) \times {}\\ \times (\xi_{j,l}\lambda_k - \xi_{k,l}\lambda_j + \xi_{k,j}\lambda_l - \xi_{l,j}\lambda_k + \xi_{l,k}\lambda_j - \xi_{j,k}\lambda_l) = 0.\end{aligned}$$

Из этого соотношения видно

$$\xi_{h,l} = \xi_h c_l + \lambda_h d_l + l_h\xi_l + f_h\lambda_l, \tag{16}$$

где c_i, d_i, l_i, f_i — некоторые векторы.

Продифференцировав (14), учитывая (16), легко получить

$$\lambda^\alpha l_\alpha = 0, \quad \xi^\alpha l_\alpha = 0, \quad \lambda^\alpha f_\alpha = 0, \quad \xi^\alpha f_\alpha = 0. \tag{17}$$

Допустим, что вектор l_i линейно не выражается через векторы λ_i и ξ_i, тогда в некоторой точке x_0 можно выбрать систему координат так, чтобы

$$\lambda^i = \delta^i_1, \quad \xi^i = \delta^i_2, \quad l^i = \delta^i_3.$$

Но в этом случае в силу (14), (17) и изотропности вектора λ_i метрика вырождается. Полученное противоречие означает, что вектор l_i можно линейно выразить через векторы λ_i и ξ_i. Аналогично установим, что и вектор f_i можно линейно выразить через векторы λ_i и ξ_i. В таком случае (16) примет более простой вид $\xi_{h,l} = \xi_h c_l + \lambda_h d_l$. Подставив последнее в (15) и учитывая (13), получим

$$R_{hijk,l} = \varphi_l R_{hijk},$$

здесь $\varphi_l = 2c_l$.

Последним условием характеризуются рекуррентные или симметрические римановы пространства, которые, как доказно в [3], допускают нетривиальные геодезические отображения только в том случае, когда являются пространствами постоянной кривизны. А это противоречит сделанному предположению. $\square$

В результате выделен еще один класс римановых пространств, однозначно определенных относительно нетривиальных геодезических отображений, какими являются, например, симметрические, рекуррентные, обобщенно симметрические и рекуррентные и другие пространства (см. [4], [3], [11], [13]–[22]).

4. Об одной гипотезе А.З. Петрова о геодезических отображениях пространств Эйнштейна

Приведем контрпример к гипотезе А.З. Петрова (см. введение) ([2], сс. 355, 461).

Пусть V_n $(n > 4)$ — эквидистантное пространство Эйнштейна непостоянной кривизны с метрикой А. Фиалкова [4]

$$ds^2 = e\,dx^{1^2} + f(x^1)\,d\widetilde{s}^2, \tag{18}$$

где $e = \pm 1$, $f \neq 0$, $d\widetilde{s}^2 = \widetilde{g}_{\alpha\beta}(x^2, \dots, x^n)dx^\alpha dx^\beta$ $(\alpha, \beta > 1)$ — метрика некоторого пространства $\widetilde{V}_{n-1}$, которое по необходимости является пространством Эйнштейна, отличного от пространства постоянной кривизны, и функция $f(x^1)$ удовлетворяет условию

$$f = \begin{cases} \widetilde{B}/B\cos^2(\sqrt{-eB}x^1 + b), & eB < 0, \quad \widetilde{B} \neq 0; \\ \widetilde{B}/B(a + \operatorname{sh}^2(\sqrt{eB}x^1 + b)), & eB > 0, \quad \widetilde{B} \neq 0; \\ b\exp^2(\sqrt{eB}x^1), & eB \geq 0, \quad \widetilde{B} = 0; \\ -e\widetilde{B}(x^1 + b)^2, & B = 0, \quad \widetilde{B} \neq 0, \end{cases}$$

где $a = 0, 1$, b — const, $B = \frac{R}{n(n-1)}$, $\widetilde{B} = \frac{\widetilde{R}}{(n-1)(n-2)}$, R $(\widetilde{R})$ — скалярные кривизны пространств V_n $(\widetilde{V}_{n-1})$.

Доказано [4], [13], что пространство V_n, отнесенное к системе координат (18), допускает геодезическое отображение на риманово пространство $\overline{V}_n$, метрическая форма которого имеет вид

$$d\overline{s}^2 = \frac{ep}{(1 + qf)^2}(dy^1)^2 + \frac{fp}{1 + qf}d\widetilde{s}^2,$$

где p, q — некоторые постоянные такие, что $p \neq 0$, $1 + qf \neq 0$. При $qf' \not\equiv 0$ отображение является нетривиальным. Координаты x являются общими по этому отображению.

Сигнатуры метрик V_n и $\overline{V}_n$ различны, когда $1 + qf < 0$, в противном случае совпадают.

Легко видеть, что при подходящем подборе постоянных e, q можно построить пример нетривиального геодезического отображения между эйнштейновыми пространствами непостоянной кривизны с сигнатурой Минковского и размерности выше четырех. Это и есть контрпример к приведенной гипотезе А.З. Петрова.

Литература

1. Эйзенхарт Л.П. *Риманова геометрия.* – М.: Ин. лит., 1948. – 315 с.
2. Петров А.З. *Новые методы в общей теории относительности.* – М.: Наука, 1966. – 495 с.
3. Синюков Н.С. *Геодезические отображения римановых пространств.* – М.: Наука, 1979. – 256 с.
4. Mikeš J. *Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces* // J. Math. Sci. New York. – 1996. – V. 78. – № 2. – P. 311–333.
5. Петров А.З. *О геодезических отображениях римановых пространств неопределенной метрики.* – Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1949. – Т. 109. – С. 4–36.
6. Петров А.З. *О геодезическом отображении пространств Эйнштейна* // Изв. вузов. Математика. – 1961. – № 2. – С. 130–136.
7. Голиков В.И. *Поля тяготения с общими геодезическими*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Казанск. ун-т, Казань, 1963.
8. Голиков В.И. *Поля тяготения с общими геодезическими.* I // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1963. – Т. 2. – С. 72–95.
9. Голиков В.И. *Поля тяготения с общими геодезическими.* II // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1963. – Т. 12. – С. 59–67.
10. Venzi P. *On geodesic mappings in Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds* // Tensor. – 1979. – V. 33. – P. 23–28.
11. Микеш Й. *Геодезические и голоморфно-проективные отображения специальных римановых пространств*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Одесск. ун-т, 1979. – 107 с.
12. Микеш Й. *О геодезических отображениях пространств Эйнштейна* // Матем. заметки. – 1980. – Т. 28. – № 6. – С. 935–938.
13. Mikeš J. *Geodetická, F-planární a holomorfně projektivní zobrazení Riemannových variet a variet s afinní konexí*: Dokt. disert., Olomouc, 1995. – 181 p.
14. Солодовников А.С. *Геодезические классы пространств $V(K)$* // ДАН СССР. – 1956. – Т. 111, – № 1. – С. 33–36.
15. Микеш Й., Киосак В.А. *О геодезических отображениях специальных пространств.* – Киев, 1985. – 24 с. – Деп. в УкрНИИТИ 05.05.1985, № 904-24Ук.
16. Кручкович Г.И. *О пространствах $V(K)$ и их геодезических отображениях* // Тр. Всесоюзн. заочн. энерг. ин-та. – М., 1967. – Т. 33. – С. 3–18.
17. Микеш Й., Киосак В.А. *О степени подвижности римановых пространств относительно геодезических отображений* // Геометрия погружен. многообразий. – М.: МГПИ, 1986. – С. 35–39.
18. Горбатый Е.З. *О геодезическом отображении эквидистантных римановых пространств и пространств первого класса* // Укр. геометрич. сб. – 1972. – Т. 12. – С. 45–53.
19. Yano K. *The theory of Lie derivatives and its applications.* – Amsterdam: North Holland Publ. Gröningen, Nordhoff, 1957. – 293 с.
20. Схоутен И.А., Стройк Д.Дж. *Введение в новые методы дифференциальной геометрии.* I. – М.–Л.: Гостехиздат, 1939. – 181 с.
21. Схоутен И.А., Стройк Д.Дж. *Введение в новые методы дифференциальной геометрии.* II. – М.: Ин. лит., 1948. – 348 с.
22. Радулович Ж., Микеш Й., Гаврильченко М.Л. *Геодезические отображения и деформации римановых пространств.* – Podgorica, Одесса: Изд. Одесск. ун-та, 1997. – 127 с.

Одесский государственный университет
Оломоуцкий университет
(*Чешская республика*)

Поступила
07.12.2002