ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 8 (423)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.546

Л.А. АКСЕНТЬЕВ, Г.Г. БИЛЬЧЕНКО

К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ КРИСТОФФЕЛЯ–ШВАРЦА

Данная статья является продолжением нашей совместной работы с Ф.Г. Авхадиевым [1]. В ней представлены новые подходы в построении многоугольных областей по данной совокупности внешних углов. Схематично доказаны теоремы о принадлежности или непринадлежности интеграла Кристоффеля–Шварца к классу почти–выпуклых функций и теорема о существовании звездообразного интеграла в подклассе строго почти–выпуклых интегралов Кристоффеля–Шварца $\Bigl(\sum\limits_{j=s}^{t}\beta_j > -1$ для любых $s<t$, $\beta_{j+n}=\beta_j$, $\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j=2$, $-1<\beta_j<1\Bigr)$ при допустимых перемещениях прообразов угловых точек без перемешивания. Получены условия однозначности представления в форме интеграла Кристоффеля–Шварца для отображения круга с движущимися полярными особенностями. Обсуждены моменты, которые объединяют внешний интеграл Кристоффеля–Шварца и внешнюю обратную краевую задачу (напр., [2]).

1. Пусть последовательность $(\beta_j)_{j=1}^n$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j=2,\quad -1<\beta_j<1\quad (j=1,\dots,n). \tag{1}$$

Тогда функция

$$f(z)=\int_0^z\prod_{j=1}^{n}(\zeta-a_j)^{-\beta_j}\,d\zeta, \tag{2}$$

$$a_j=e^{i\varphi_j}\quad (j=1,\dots,n),\quad \varphi_1<\dots<\varphi_n<\varphi_1+2\pi,$$

осуществляет отображение круга $E=\{z:|z|<1\}$ на многоугольную область с внутренними углами $\alpha_j\pi$, $\alpha_j=1-\beta_j$, $j=1,\dots,n$.

Несложное доказательство этого факта дается в монографии [3] (с. 167) в качестве решения обратной задачи для интеграла Кристоффеля–Шварца. Полученный многоугольник будет, вообще говоря, многолистным. Однако не всякий самопересекающийся замкнутый полигон (например, контур вырожденного флажка из [4], с. 395) может совпадать с $\partial f(E)$.

В статье [1] доказано, что либо многоугольник $f(E)$ однолистный, либо при его неоднолистности можно осуществить такое движение точек a_j по единичной окружности, чтобы эти точки, не перемешиваясь, пришли в положение (a_j^0), при котором интеграл

$$f_0(z)=\int_0^z\prod_{j=1}^{n}(\zeta-a_j^0)^{-\beta_j}\,d\zeta \tag{3}$$

будет однолистной функцией.

Рассмотрим возможности движения точек a_j, допуская их перемешивание. Класс областей $f(E)$ тогда расширится. При такой постановке задачи о характеристике областей $f(E)$ упростится обнаружение однолистных областей среди всего набора образов.

Напомним определение *почти-выпуклости* ([5]). Введем угол $\gamma_r(\theta)$, который образует касательная к образу окружности $z = re^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 < r \le 1$, в точке $re^{i\theta}$ при отображении регулярной функцией $f(z)$. Критерием почти-выпуклости является выполнение неравенства

$$\gamma_r(\theta_2) - \gamma_r(\theta_1) > -\pi \quad (r < 1) \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma_1(\theta_2) - \gamma_1(\theta_1) \ge -\pi \tag{4}$$

для всех пар θ_1, θ_2 с условием $\theta_1 < \theta_2$.

Теорема 1. A. *Почти-выпуклость образа $f(E)$ при отображении* (2) *и условиях* (1) *гарантируется, если*
A1. *выполняются неравенства*

$$\sum_{j=s}^{t} \beta_j \ge -1, \quad s = 1, \ldots, n, \quad s < t < s + n - 4 \quad (\beta_{j+n} = \beta_j) \tag{5}$$

с любыми $a_j = e^{i\varphi_j}$, $j = 1, \ldots, n$, $\varphi_1 < \cdots < \varphi_n < \varphi_1 + 2\pi$, в частности, если сумма всех отрицательных $\beta_j = \beta_j^-$ не меньше (-1), т. е. $\sum\limits_j \beta_j^- \ge -1$;

A2. $|\beta_j| \le \dfrac{1}{2}$ *при некотором порядке следования β_j, $j = 1, \ldots, n$.*
B. *Почти-выпуклость образа $f(E)$ невозможна ни при каком порядке следования β_j, если $|\beta_j| > \dfrac{1}{2}$ $(j = 1, \ldots, n)$ и количество отрицательных $\beta_j = \beta_j^- < 0$ больше количества положительных $\beta_j = \beta_j^+ > 0 : N(\beta_j^-) > N(\beta_j^+)$.*

Замечание 1. Пункт A1 обоснован Капланом [5].

Замечание 2. В силу (1) и оценок $\beta_j^- < -\dfrac{1}{2}$, $\beta_j^+ < 1$, при условии $N(\beta_j^+) = m$, $N(\beta_j^-) = m+1$ получим $2 = \sum\limits_j \beta_j^+ + \sum\limits_j \beta_j^- < m - \dfrac{m+1}{2} = \dfrac{m-1}{2} \Rightarrow m > 5 \Rightarrow m \ge 6$. Поэтому выполнить требования к последовательности $(\beta_j)_{j=1}^n$, указанные в п. B теоремы 1, можно только для $n = 2m + 1 \ge 13$; достижение знака равенства поясняет

Пример 1. $\beta_1^- = -\dfrac{3}{4}$, $\beta_{2k+1}^- = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{48}$, $\beta_{2k}^+ = 1 - \dfrac{1}{48}$, $k = 1, \ldots, 6$ $(n = 13)$.

2. Будем называть последовательность $(\beta_j)_{j=1}^n$ с условием (1) *приводимой*, если существует некоторая (возможно и тождественная) перестановка $(\beta_j^0)_{j=1}^n$ ее членов, обеспечивающая почти-выпуклость интеграла Кристоффеля–Шварца

$$f(z) = \int_0^z \prod_{j=1}^n (\zeta - a_j)^{-\beta_j^0} d\zeta. \tag{6}$$

Если же ни при какой перестановке последовательности $(\beta_j)_{j=1}^n$ функция (6) не является почти-выпуклой, то такую последовательность назовем *неприводимой*.

Лемма. A. *Если последовательность $(\beta_j)_{j=1}^n$ неприводима, то существуют неприводимые последовательности $(\widetilde{\beta_j})_{j=1}^{n+1}$, $(\widetilde{\widetilde{\beta_j}})_{j=1}^{n+1}$ такие, что $(N(\widetilde{\beta_j^-}) = N(\beta_j^-) + 1$, $N(\widetilde{\beta_j^+}) = N(\beta_j^+))$ и $(N(\widetilde{\widetilde{\beta_j^-}}) = N(\beta_j^-)$, $N(\widetilde{\widetilde{\beta_j^+}}) = N(\beta_j^+) + 1)$.*
B. *Последовательности с $N(\beta_j^-) \le 3$ или с $N(\beta_j^+) \le 5$ приводимы.*
C. *Последовательности с $(N(\beta_j^-) = 4, 5, 6$ и $N(\beta_j^+) = 6)$ приводимы.*
D. *Существуют неприводимые последовательности с $(N(\beta_j^-) \ge 4$, $N(\beta_j^+) \ge 7)$ и $(N(\beta_j^-) \ge 7$, $N(\beta_j^+) \ge 6)$.*

Доказательство пункта A основано на том, что достаточно малое число (положительное или отрицательное) не может “исправить” нарушенное неравенство (5).

Для пунктов B, C достаточно показать приводимость последовательностей с $(N({\beta_j}^-) = 3, \quad N({\beta_j}^+) = 9)$, $(N({\beta_j}^-) = 6, \quad N({\beta_j}^+) = 6)$. Это можно сделать, решая серии задач линейного программирования.

Пример 2. Для пункта D возьмем $\beta_j^- = -\dfrac{23}{24}$, $j = 1, \dots, 4$; $\beta_j^+ = \dfrac{5}{6}$, $j = 5, \dots, 11$. При любой перестановке в циклической последовательности $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_{n+1} = \beta_1, \beta_{n+2} = \beta_2)$ найдется подпоследовательность $(\beta_j^-, \beta_{j+1}^+, \beta_{j+2}^-)$, для которой $\beta_j^- + \beta_{j+1}^+ + \beta_{j+2}^- = -\dfrac{23}{24} + \dfrac{5}{6} - \dfrac{23}{24} = -\dfrac{13}{12}$.

Теорема 2. *Число $N_0 = 10$ отделяет приводимые последовательности от неприводимых в следующем смысле: при $n \le N_0$ все последовательности $(\beta_j)_{j=1}^n$ приводимы, при $n > N_0$ существует хотя бы одна неприводимая последовательность.*

3. Среди всех перестановок последовательности $(\beta_j)_{j=1}^n$ с условием (1) выделим ту, которая является упорядоченной по возрастанию

$$-1 < \beta_1 \le \dots \le \beta_m < 0 < \beta_{m+1} \le \dots \le \beta_n < 1. \tag{7}$$

По отрицательным углам $\beta_1\pi, \dots, \beta_m\pi$ построим незамкнутый простой полигон, который дополним до замкнутого контура с помощью второго полигона, построенного по положительным углам $\beta_{m+1}\pi, \dots, \beta_n\pi$. Каждый из этих полигонов имеет форму спирали и в целом область с границей, составленной из двух таких полигонов, окажется спиральной многоугольной областью. Чтобы эта область оказалась однолистной, нужно проводить ее построение, попеременно используя то отрицательные, то положительные углы. Способ такого построения является некоторым аналогом известного в вычислительной геометрии метода заворачивания подарка ([6], с. 161).

Простое построение однолистной области по последовательности (7) получается применением метода математической индукции. Для трех и четырех вершин построение очевидно. Пусть уже построены спиральные однолистные многоугольники с количеством вершин, меньшим или равным $n-1$. Для построения многоугольника с количеством вершин n от последовательности (7) перейдем к последовательности

$$-1 < \beta_1 \le \dots \le \beta_{m-1} < \widetilde{\beta}_m < \beta_{m+2} \le \dots \le \beta_n < 1, \tag{8}$$

в которой $\widetilde{\beta}_m = \beta_m + \beta_{m+1}$ и которая содержит $n-1$ членов при $\widetilde{\beta}_m \ne 0$ и $n-2$ членов при $\widetilde{\beta}_m = 0$. Строим однолистный многоугольник по набору (8), а потом перестраиваем его в однолистный n-угольник с помощью добавления узких четырехугольников, которое аналогично вырезанию в нашей совместной статье [1].

4. Для почти-выпуклых интегралов (2) верен следующий аналог теоремы 1 из [1] (“однолистность” нужно заменить на “звездообразность”).

Теорема 3. *При строгой почти-выпуклости многоугольника (т. е. в условии (4) неравенство $\gamma_1(\theta_2) - \gamma_1(\theta_1) > -\pi$ является строгим) существует такое движение прообразов a_j угловых точек по окружности $|z| = 1$ без перемешивания в положение (a_j^0), что образ $f_0(E)$ при отображении (3) оказывается звездообразным.*

Замечание 3. При нестрогой почти-выпуклости эффект из теоремы 3, вообще говоря, пропадает: П-образный 8-угольник с взаимно перпендикулярными сторонами не будет звездообразным относительно любой своей внутренней точки.

Идея доказательства теоремы 3 состоит в преобразовании пучка лучей, достигающих контур многоугольника извне, в пучок лучей, которые при продолжении имеют общую точку пересечения внутри многоугольника, например, начало координат O. При этом преобразовании стороны многоугольника перемещаются параллельно своим начальным направлениям, и совершаются подобия с различными коэффициентами (без вырождения в точки). В результате такого преобразования контур оказывается звездообразным относительно O. Следовательно, интеграл (3) будет звездообразной функцией.

5. Возьмем интеграл Кристоффеля–Шварца с движущимися полярными особенностями первого порядка в точках b_j и с возможными логарифмическими особенностями в тех же точках

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \prod_{j=1}^{s} \Phi(\zeta; c_j) \prod_{j=1}^{m} \Phi(\zeta; b_j)^{-2} f'(\zeta) d\zeta, \tag{9}$$

где

$$f'(\zeta) = \prod_{j=1}^{n} (e^{i\varphi_j} - \zeta)^{-\beta_j}, \quad \varphi_1 < \cdots < \varphi_n < \varphi_1 + 2\pi; \quad -1 < \beta_j < 1, \quad j = 1, \ldots, n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j = 2(1 + s - 2m); \quad \Phi(\zeta; c) = (\zeta - c)(1 - \bar{c} \cdot \zeta);$$

$$b_j \in E, \quad j = 1, \ldots, m \ (m > 0); \quad b_j \neq b_k \quad \forall j \neq k;$$

$$c_j \in E, \quad j = 1, \ldots, s; \quad c_j \neq b_k \quad \forall j, k.$$

Возникает набор условий однозначности: $\mathrm{res}_{z=b_j} F'(z) = 0$, $j = 1, \ldots, m$. Для (9) эти условия имеют вид

$$\frac{f''(b_k)}{f'(b_k)} = -\frac{2\overline{b_k}}{1 - |b_k|^2} + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} B(b_k; b_j) - \sum_{j=1}^{s} B(b_k; c_j), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{10}$$

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{e^{i\varphi_j} - z}, \quad B(b; c) = \frac{1 - 2b\bar{c} + |c|^2}{(b - c)(1 - \bar{c} \cdot b)}.$$

Даже если $m = 1$, при всех фиксированных параметрах, кроме b_1, уравнение (10), вообще говоря, неразрешимо относительно b_1. Этот факт получается аналогично утверждению Н.Н. Видякиной [2] о неразрешимости некоторых специальных уравнений Ф.Д. Гахова.

Если же фиксировать не все c_j, то при других заданных параметрах получим такую картину разрешимости уравнений (10).

Теорема 4. *Пусть $s, m \geq 1$; $(\beta_j)_{j=1}^{n}$, $(\varphi_j)_{j=1}^{n}$, $(c_j)_{j=1}^{s-1}$ фиксированы. Для $\zeta_1, \ldots, \zeta_m \in E$, $k = 1, \ldots, m$, положим*

$$S_k(\zeta_1, \ldots, \zeta_m) = \left(\frac{f''(\zeta_k)}{f'(\zeta_k)} - 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} B(\zeta_k; \zeta_j) + \sum_{j=1}^{s-1} B(\zeta_k; c_j) \right) \cdot (1 - |\zeta_k|^2).$$

Если точки $b_1, \ldots, b_m$ такие, что

$$|S_k(b_1, \ldots, b_m)| > 2 \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{11}$$

$$v_1 = \cdots = v_m, \tag{12}$$

где

$$v_k = \frac{U_k + b_k}{1 + \overline{b_k} \cdot U_k}, \quad U_k = \frac{\overline{S_k}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{|S_k|} \cdot (|S_k|^2 - 4)^{1/2}\right), \quad k = 1, \ldots, m,$$

то интеграл (9) не имеет логарифмических особенностей в точках $b_1, \ldots, b_m$ только при $c_s = v_m$. Если хотя бы одно условие в (11), (12) нарушено, то уравнения (10) неразрешимы относительно c_s.

6. Пусть $s, m = 1$ и дана последовательность таких величин $-1 < \beta_j < 1$, что $\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j = 0$. Обозначим

$$M_1 = \max_{s,t} \sum_{j=s}^{t} \beta_j, \quad M_2(b) = \max_{\varphi_1 \le \dots \le \varphi_n \le \varphi_1 + 2\pi} \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{e^{i\varphi_j} - b} \right| \cdot (1 - |b|^2).$$

Теорема 5. *При заданных* $(\beta_j)_{j=1}^n$ *и* b_1 *параметры* $(\varphi_j)_{j=1}^n$ *и* c_1*, для которых выполнено* (10)*, существуют тогда и только тогда, когда выполнено условие* $M_1 > 1$ *или эквивалентное ему неравенство* $M_2(b) > 2$*, где* b *— любая точка из* E*.*

Литература

1. Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А., Бильченко Г.Г. *Классы однолистных и многолистных интегралов Кристоффеля–Шварца и их приложения* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 3. – С. 64–67.
2. Видякина Н.Н. *О разрешимости одной обратной краевой задачи на римановой поверхности* // Тр. семин. по краевым задачам. – Казань, 1974. – вып. 11. – С. 32–42.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного.* – 5-е изд. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
4. Привалов И.И. *Введение в теорию функций комплексного переменного.* – 13-е изд. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
5. Kaplan W. *Convexity and the Schwarz–Christoffel mapping* // Michigan Math. J. – 1993. – V. 40. – № 2. – P. 217–227.
6. Препарата Ф., Шеймос М. *Вычислительная геометрия: Введение* – Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 478 с.

Казанский государственный университет

Поступила
13.09.1996