ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 6 (457)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.544

И.Т. ДЕНИСЮК

ОДНА ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В АФФИННО ПРЕОБРАЗОВАННЫХ ОБЛАСТЯХ С КУСОЧНО-ГЛАДКИМИ ГРАНИЦАМИ

Рассматривается задача сопряжения аналитических функций, удовлетворяющих заданным условиям на кусочно-гладкой границе раздела аффинно преобразованной составной области. Задача сопряжения функций, аналитических непосредственно в составной области, изучалась в [1].

Пусть в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ содержится N областей $\mathcal{D}_j$ ($j=\overline{1,N}$), очерченных контурами $L_j=\bigcup\limits_{k=1}^{n_j} L_{jk}$, где $L_{jk}=\breve{d_{jk}d_{jk+1}}$ — гладкие дуги, d_{jk} — угловые точки. Области $\mathcal{D}_{jjs}$ ($s=1,2$) являются аффинными образами областей $\mathcal{D}_j$ при преобразованиях $z_{js}=x+\mu_{js}y$, а $\mathcal{D}_{0s}$ — образами $\mathcal{D}_0=\mathbb{C}\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{N}\mathcal{D}_j$ при преобразованиях $z_{0s}=x+\mu_{0s}y$ ($\operatorname{Im}\mu_{js}\neq 0$, $\mu_{j1}\neq\mu_{j2}$, $j=\overline{0,N}$). Построим функции $\Phi_{0s}(z_{0s})$, аналитические в областях определения $\mathcal{D}_{0s}$, имеющие полюсы или логарифмические особенности с известными главными частями, и функции $\Phi_{js}(z_{js})$, аналитические в соответствующих областях $\mathcal{D}_{jjs}$, при таких условиях сопряжения на L_j:
в точках гладкости

$$M_{jm}[\Phi^+_{j1}(t_{j1}),\Phi^+_{j2}(t_{j2})]-M_{0m}[\Phi^-_{01}(t_{01}),\Phi^-_{02}(t_{02})]=0 \quad (m=\overline{1,4}), \tag{1}$$

в угловых точках

$$\lim_{t\to d_{jk}\pm 0}\left\{M_{jm}\left[\varphi^+_{j1}(t_{j1})\left(\frac{\partial t_{j1}}{\partial|t|}\right)^{-1},\varphi^+_{j2}(t_{j2})\left(\frac{\partial t_{j2}}{\partial|t|}\right)^{-1}\right]-\right.$$
$$\left.-M_{0m}\left[\varphi^-_{01}(t_{01})\left(\frac{\partial t_{01}}{\partial|t|}\right)^{-1},\varphi^-_{02}(t_{02})\left(\frac{\partial t_{02}}{\partial|t|}\right)^{-1}\right]\right\}=0, \tag{2}$$

$$\lim_{t\to d_{jk}\pm 0}\{M_{jm}[\Phi^+_{j1}(t_{j1}),\Phi^+_{j2}(t_{j2})]-M_{0m}[\Phi^-_{01}(t_{01}),\Phi^-_{02}(t_{02})]\}=0, \tag{3}$$

где операторы действуют по правилам

$$M_{jm}[\Phi_{j1}(t_{j1}),\Phi_{j2}(t_{j2})]=2\operatorname{Re}\left\{a^{(j)}_{m1}\Phi_{j1}(t_{j1})\frac{\partial t_{j1}}{\partial|t|}+a^{(j)}_{m2}\Phi_{j2}(t_{j2})\frac{\partial t_{j2}}{\partial|t|}\right\}\quad (j=\overline{0,N}),$$

$\frac{d\varphi_{js}(t_{js})}{dt_{js}}=\Phi_{js}(t_{js})$, $d_{jk}\pm 0$ означает стремление точки t контура L_j к угловой точке d_{jk} согласно ориентации ($-$) или против ориентации ($+$) дуги, $\Phi^{\pm}_{js}(t_{js})$ — граничные значения функций $\Phi_{js}(z_{js})$ при подходе к контуру со стороны области $\mathcal{D}_j$ (знак "+") или $\mathcal{D}_0$ (знак "$-$"), $a^{(j)}_{m1}$, $a^{(j)}_{m2}$ — дробно-рациональные функции величин μ_{js}, $|t|=\sqrt{x^2+y^2}$, $t_{js}\in L_{jjs}$, L_{jjs} — аффинный образ контура L_j при преобразовании $z_{js}=x+\mu_{js}y$, $t_{js}=t_{js}(|t|,\arg t)$ являются функциями переменных $|t|$ и $\arg t$.

К такой задаче приводится ряд задач механики анизотропной сплошной среды, например, плоская и антиплоская теории упругости [2], термоупругости [3], гидромеханики [4] и др. Условия (2) и (3) не являются тривиальным следствием условий (1), они определяют класс решения аналогично тому, как это имеет место в задаче Римана ([5], с. 444).

Рассмотрим сначала задачу с граничными условиями (2) и (3) для окрестности одной угловой точки, например, для просторы положим $d_{jk} = 0$.

Лемма. *Если характеристическое уравнение*

$$\det C = 0, \tag{4}$$

где

$$C = (c_{rq}) \;\; (r, q = \overline{1,8}), \;\; (c_{rq})_r = (a_{r1}^{(j)}\omega_{j1s}^{\lambda}, \overline{a}_{r1}^{(j)}\,\overline{\omega}_{j1s}^{\lambda}, a_{r2}^{(j)}\omega_{j2s}^{\lambda}, \overline{a}_{r2}^{(j)}\overline{\omega}_{j2s}^{\lambda}, a_{r1}^{(0)}\omega_{01s}^{\lambda}, \overline{a}_{r1}^{(0)}\overline{\omega}_{01s}^{\lambda}, a_{r2}^{(0)}\omega_{02s}^{\lambda}, \overline{a}_{r2}^{(0)}\overline{\omega}_{02s}^{\lambda}),$$

$$a_{rp}^{(j)} = \begin{cases} a_{rp}^{(j)}, & r = \overline{1,4}; \\ a_{r-4,p}^{(j)}, & r = \overline{5,8}, \end{cases} \quad s = \begin{cases} 1, & r = \overline{1,4}; \\ 2, & r = \overline{5,8}, \end{cases} \quad \omega_{jps} = \cos\varphi_{jk}^{(s)} + \mu_{jp}\sin\varphi_{jk}^{(s)} \;\; (p = \overline{1,2}),$$

$$\varphi_{jk}^{(1)} = \lim_{t \to d_{jk}+0} \arg(t - d_{jk}), \quad \varphi_{jk}^{(2)} = \lim_{t \to d_{jk}-0} \arg(t - d_{jk}),$$

имеет корни $\lambda = \lambda_{jkn} \in (0,1)$, то функции $\Phi_{js}(z_{js})$, удовлетворяющие условиям (2), (3), имеют асимптотику

$$\Phi_{js}(z_{js}) = \sum_{n=1}^{l} O(|z_{js} - d_{jks}|^{\lambda_{jkn}-1}), \tag{5}$$

где l — число корней $\lambda = \lambda_{jkn}$ уравнения (4).

Граничные условия (2), (3) допускают преобразование подобия

$$\varphi_{js}(t_{js}) = A\varphi_{js}(Bt_{js}), \tag{6}$$

где $B, A(B) \in \mathbb{R}$. Дифференцируя соотношения (6) по B, получим дифференциальные уравнения $\frac{d\varphi_{js}(Bt_{js})}{\varphi_{js}(Bt_{js})} = \frac{d(Bt_{js})}{At_{js}}\frac{dA}{dB}$, которые определяют функции $\varphi_{js}(t_{js})$ как степенные. Представим аналитические функции $\varphi_{js}(z_{js})$ в виде

$$\varphi_{js}(z_{js}) = A_{js}(z_{js})z_{js}^{\lambda}, \tag{7}$$

где $A_{js}(z_{js})$ — аналитические функции, ограниченные и отличные от нуля при $z_{js} = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, а однозначность фиксируется разрезом по отрицательной части вещественной оси.

Подставляя (7) в условия (2), записанные в локальных полярных координатах r, β с полюсом в угловой точке и полярной осью Ox, и приравнивая выражения при одинаковых степенях r, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно величин $A_{js}(0)$. Она допускает нетривиальное решение, поскольку ее определителем является величина $\det C$, равная нулю согласно (4). Условия (3) будут реализованы на основе (7), если учесть уравнения однородной системы и раскрыть неопределенности при $r \to 0$ и $\lambda \in (0,1)$. Из представления $\frac{d\varphi_{js}(z_{js})}{dz_{js}} = \Phi_{js}(z_{js})$ и (7) следуют асимптотические формулы (5).

Отметим некоторые частные случаи корней характеристического уравнения (4). Если задача ставится для плоскости с разомкнутыми линиями или областями с точками возврата на контуре, то полагая в (4) $\varphi_{jk}^{(1)} = \pi$, $\varphi_{jk}^{(2)} = -\pi$ и решая получающееся вырожденное уравнение (тождество) путем перехода согласно [6] к уравнению $\frac{d}{d\varphi_{jk}^{(2)}}\det C = 0$ при $\varphi_{jk}^{(1)} = \pi$, $\varphi_{jk}^{(2)} = -\pi$, найдем четырехкратный корень $\lambda = 0,5$. При $a_{m1}^{(j)} = a_{m2}^{(j)} = 0$ ($m = \overline{1,4}$; $j \neq 0$) уравнение (4) переходит в уравнение, встречающееся в теории анизотропной упругости [7],

$$\operatorname{ch}(\lambda_{jkn}\ln u) - \cos[\lambda_{jkn}(\delta_2 - \delta_1)] = |\mu_0|^2\{\operatorname{ch}(\lambda_{jkn}\ln u) - \cos[\lambda_{jkn}(\delta_2 + \delta_1)]\}, \tag{8}$$

где u, δ_1, δ_2 — величины, зависящие от $\varphi_{jk}^{(1)}$ и $\varphi_{jk}^{(2)}$, $\mu_0 = \mathrm{const}$, и имеет два корня $\lambda_{jk1}, \lambda_{jk2} \in (0,1)$. Если положить $a_{m1}^{(j)} = \begin{cases} a_{m10}^{(j)} i, & m = \overline{1,2}; \\ 0, & m = \overline{3,4}, \end{cases}$ $a_{m2}^{(j)} = 0$ $(m = \overline{1,4})$; $a_{m10}^{(j)} \in \mathbb{R}$, то оно трансформируется в аналогичное (8), имеет два корня $\lambda_{jkn} \in (0,1)$ и известно в механике сплошной среды [8]. Осуществляя в (4) предельные переходы при $\mu_{j1} \to i$, $\mu_{j2} \to i$, получим $\sin[\lambda(\varphi_{jk}^{(1)} - \varphi_{jk}^{(2)})] = \pm\lambda \sin(\varphi_{jk}^{(1)} - \varphi_{jk}^{(2)})$, $\nu_j \sin[\lambda(\varphi_{jk}^{(1)} - \varphi_{jk}^{(2)})] = \pm\lambda \sin(\varphi_{jk}^{(1)} - \varphi_{jk}^{(2)})$, которые определяют четыре корня $\lambda \in (0,1)$ (теория изотропной упругости [9], [10]). Перейдем к общему случаю задачи.

Теорема. *Если характеристическое уравнение* (4) *имеет в каждой угловой точке корни* $\lambda = \lambda_{jkn}$, *принадлежащие интервалу* $(0,1)$, *то задача с условиями* (1)–(3) *разрешима.*

Согласно лемме представим аналитические функции $\Phi_{js}(z_{js})$ суммой сингулярных составляющих $\Phi_{js1}(z_{js})$ и ограниченных аналитических функций $\Phi_{js2}(z_{js})$ в областях их определения

$$\Phi_{js}(z_{js}) = \Phi_{js1}(z_{js}) + \Phi_{js2}(z_{js}) \quad (j = \overline{0,N}; \quad s = 1,2). \tag{9}$$

Сингулярные слагаемые записываем на основе установленного асимптотического представления (5) в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{0s1}(z_{0s}) &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{n=1}^{l} [A_{0jkn}^{(s)} \theta_{jkn}(z_{0s}) + B_{0jkn}^{(s)} \zeta_{jkn}(z_{0s})], \\ \Phi_{js1}(z_{js}) &= \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{n=1}^{l} [A_{jkn}^{(s)} \theta_{jkn}(z_{js}) + B_{jkn}^{(s)} \zeta_{jkn}(z_{js})], \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\theta_{jkn}(z_{js}) = \theta_{jkn}^0(z_{js}) - 1, \quad \zeta_{jkn}(z_{js}) = \zeta_{jkn}^0(z_{js}) - 1,$$

$$\theta_{jkn}^0(z_{gs}) = \left(\frac{z_{gs} - d_{jk+1gs}}{z_{gs} - d_{jkgs}}\right)^{1-\lambda_{jkn}}, \quad \zeta_{jkn}^0(z_{gs}) = \left(\frac{z_{gs} - d_{jkgs}}{z_{gs} - d_{jk-1gs}}\right)^{1-\lambda_{jkn}} \quad (g = \overline{0,N}),$$

$A_{0jkn}^{(s)}$, $B_{0jkn}^{(s)}$, $A_{jkn}^{(s)}$, $B_{jkn}^{(s)}$ — коэффициенты, d_{jkgs} — аффинный образ d_{jk} при преобразовании $z_{gs} = x + \mu_{gs} y$. Функции $\theta_{jkn}^0(z_{gs})$ $(\zeta_{jkn}^0(z_{gs}))$ определены в комплексной плоскости с разрезом по $\smile{d_{jkgs} d_{jk+1gs}}$ $(\smile{d_{jk-1gs} d_{jkgs}})$, на берегах которого выполняются соотношения $[\theta_{jkn}^0(t_{gs})]^- = [\theta_{jkn}^0(t_{gs})]^+ \exp[2\pi i(\lambda_{jkn} - 1)]$ $([\zeta_{jkn}^0(t_{gs})]^- = [\zeta_{jkn}^0(t_{gs})]^+ \exp[2\pi i(1 - \lambda_{jkn})])$. Ветви степеней числителя и знаменателя выбираются из условия $\lim\limits_{z_{gs} \to \infty} \theta_{jkn}^0(z_{gs}) = 1$ $(\lim\limits_{z_{gs} \to \infty} \zeta_{jkn}^0(z_{gs}) = 1)$. Подставляя представления (9), (10) в условия (2), (3), записанные в локальных полярных координатах, убеждаемся, что они реализуются с точностью до величин порядка $O(1)$.

Построим ограниченные слагаемые аналитических функций (9) сначала для случая плоскости с одной областью $\mathcal{D}_1$. Представим их с помощью интеграла Коши

$$\Phi_{0s2}(z_{0s}) = G_s(z_{0s}) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{10s}} \frac{u_{0s}(\tau_{0s}) d\tau_{0s}}{\tau_{0s} - z_{0s}}, \tag{11}$$

$$\Phi_{1s2}(z_{1s}) = a_s(z_{1s}) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{11s}} \frac{u_{1s}(\tau_{1s}) d\tau_{1s}}{\tau_{1s} - z_{1s}}, \tag{12}$$

где $G_s(z_{0s})$ $(s = \overline{1,2})$ — известные главные части полюсов или логарифмические особенности, обусловленные физической сущностью задачи [2]–[5]; L_{10s} и L_{11s} — образы контура L_1 при преобразованиях $t_{0s} = x + \mu_{0s} y$ и $t_{1s} = x + \mu_{1s} y$ соответственно. Подставляя представления (9)–(12) в граничные условия (1) и полагая

$$\mathrm{Im}\left[a_{m1}^{(0)} u_{01}(t_{01}) \frac{\partial t_{01}}{\partial |t|} + a_{m2}^{(0)} u_{02}(t_{02}) \frac{\partial t_{02}}{\partial |t|} - a_{m1}^{(1)} u_{11}(t_{11}) \frac{\partial t_{11}}{\partial |t|} - a_{m2}^{(0)} u_{12}(t_{12}) \frac{\partial t_{12}}{\partial |t|}\right] = 0 \quad (m = \overline{1,4}), \tag{13}$$

получим систему интегральных уравнений

$$g_{1m}u_{01}(t_{01})+g_{2m}\overline{u_{01}(t_{01})}\frac{d\overline{t}_{01}}{dt_{01}}+g_{3m}u_{02}(t_{02})\frac{dt_{02}}{dt_{01}}+g_{4m}\overline{u_{02}(t_{02})}\frac{d\overline{t}_{02}}{dt_{01}}+$$
$$+\int_{L_{101}}u_{01}(\tau_{01})K_{1m}d\tau_{01}+\int_{L_{101}}\overline{u_{01}(\tau_{01})}K_{2m}d\overline{\tau}_{01}+\int_{L_{102}}u_{02}(\tau_{02})K_{3m}d\tau_{02}+$$
$$+\int_{L_{102}}\overline{u_{02}(\tau_{02})}K_{4m}d\overline{\tau}_{02}=2\pi i p_m(t,\overline{t})\quad (m=\overline{1,4}),\qquad (14)$$

где

$$p_m(t,\overline{t})=M_{0m}[G_1^-(t_{01})+\Phi_{011}^-(t_{01}),G_2^-(t_{02})+\Phi_{021}^-(t_{02})]-$$
$$-M_{1m}[a_1^+(t_{11})+\Phi_{111}^+(t_{11}),a_2^+(t_{12})+\Phi_{121}^+(t_{12})],$$
$$K_{pm}=\sum_{s=1}^{2}[g_{pms}k(\tau_{1s},t_{1s},\tau_{01},t_{01})+r_{pms}k(\overline{\tau}_{1s},\overline{t}_{1s},\tau_{01},t_{01})+$$
$$+g_{pm0s}k(\tau_{0s},t_{0s},\tau_{01},t_{01})+r_{pm0s}k(\overline{\tau}_{0s},\overline{t}_{0s},\tau_{01},t_{01})],$$
$$k(\tau_{js},t_{js},\tau_{01},t_{01})=\frac{d}{dt_{01}}\ln[(\tau_{01}-t_{01})/(\tau_{js}-t_{js})]\quad (j=0,1;\;\; p=\overline{1,4}),$$

g_{pms}, r_{pms}, g_{pm0s}, r_{pm0s}, g_{pm} постоянные. Поскольку реализуются условия (2), (3), то функции $p_m(t,\overline{t})$ ограничены в угловых точках. Ядра интегральных уравнений K_{pm} определяются аналогично ([11], с. 55) как непрерывные функции на образах контуров, поэтому система (14) является фредгольмовой.

Для доказательства разрешимости системы положим, что функции $\widetilde{u}_{01}(t_{01})$ и $\widetilde{u}_{02}(t_{02})$ являются решением однородной системы, соответствующей (14). Такой системе отвечают соотношения типа (1) для граничных значений $\widetilde{\Phi}_{0s2}^-(t_{0s})$ и $\widetilde{\Phi}_{1s2}^+(t_{1s})$ аналитических функций (11) при $G_s(z_{0s})=0$ и (12) при $a_s(z_{1s})=0$. Учитывая автомодельность решений типа (6) для таких условий на образах линии раздела, находим, что граничные значения $\widetilde{\Phi}_{0s2}^-(t_{0s})$ и $\widetilde{\Phi}_{1s2}^+(t_{1s})$ являются степенными функциями, а т. к. они удовлетворяют равенствам (1), то $\widetilde{\Phi}_{0s2}^-(t_{0s})=0$, $\widetilde{\Phi}_{1s2}^+(t_{1s})=0$. Из формул Сохоцкого с учетом этих значений следует, что плотности соответствующих интегралов Коши являются граничными значениями аналитических функций $\widetilde{u}_{0s}(t_{0s})=\widetilde{\Phi}_{0s2}^+(t_{0s})$, $\widetilde{u}_{1s}(t_{1s})=\widetilde{\Phi}_{1s2}^-(t_{1s})$. Удовлетворяя теперь равенствам (13) при учете свойства автомодельности (6), находим, что $\widetilde{u}_{0s}(t_{0s})=0$ и, таким образом, система (14) разрешима ([11], с. 415). Утверждение теоремы остается в силе и для плоскости с областями $\mathcal{D}_j$ $(j=\overline{1,N})$. В этом случае функции $\Phi_{0s2}(z_{0s})$ берем в виде

$$\Phi_{0s2}(z_{0s})=G_s(z_{0s})+\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{N}\int_{L_{j0s}}\frac{u_{j0s}(\tau_{0s})d\tau_{0s}}{\tau_{0s}-z_{0s}},$$

а $\Phi_{js2}(z_{js})$ записываются аналогично (12) для каждой области.

Для конкретных физических задач такая задача сопряжения дополняется физическими условиями [2]–[4], обеспечивающими нахождение всех постоянных в сингулярных составляющих аналитических функций аналогично [12].

Литература

1. Денисюк И.Т. *Решение одной задачи сопряжения для составной области с угловыми точками на линиях раздела* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 6. – С. 17–24.
2. Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
3. Прусов И.А. *Термоупругие анизотропные пластинки.* – Минск: Изд-во ун-та, 1978. – 200 с.
4. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа.* – 4-е изд. – М.: Наука, 1973. – 848 с.
5. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

6. Денисюк И.Т., Шеремет В.М. *Вырожденные уравнения.* – Киев, 1990. – 11 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 6.08.90, № 1258Ук90.
7. Денисюк И.Т. *Особенность напряжений анизотропной пластинки с угловым вырезом* // Прикл. механика. – 1996. – № 1. – С. 48–52.
8. Барабаш С.С., Денисюк І.Т. *Поздовжній зсув анізотропного тіла з кутовими вкрапленнями* // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1996. – № 4. – С. 86–90.
9. Денисюк И.Т. *Напряженное состояние вблизи особой линии поверхности раздела сред* // Изв. РАН. Механ. тверд. тела. – 1995. – № 5. – С. 64–70.
10. Денисюк І.Т. *Термонапружений стан пластинки з кутовими включеннями* // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1998. – № 3. – С. 67–72.
11. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1962. – 600 с.
12. Денисюк І.Т. *Поздовжній зсув анізотропного тіла з пружними смугами* // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1997. – № 1. – С. 51–56.

Луцкий государственный
технический университет
(*Украина*)

Поступили
полный текст 27.10.1998
краткое сообщение 31.05.1999