ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 10 (461)

УДК 517.925

*А.Ю. АЛЕКСАНДРОВ*

# К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО НЕАВТОНОМНОМУ ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

В данной работе с использованием метода функций Ляпунова исследуются условия асимптотической устойчивости решений неавтономных систем по линейному и нелинейному приближениям.

**1.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} \tag{1}$$

и соответствующую возмущенную систему

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{R}(t, \mathbf{X}). \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^*$ — $n$-мерный вектор неизвестных функций, матрица $\mathbf{A}(t)$ задана и непрерывна при $t \geq 0$, векторная функция $\mathbf{R}(t, \mathbf{X})$ непрерывна при $t \geq 0$, $\|\mathbf{X}\| < H$ ($H$ — положительная постоянная, $\|\mathbf{X}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$), и удовлетворяет в данной области неравенству

$$\|\mathbf{R}(t, \mathbf{X})\| \leq c\, \|\mathbf{X}\|^\sigma, \tag{3}$$

где $c > 0$, $\sigma > 1$. Таким образом, (1) является системой первого приближения для системы (2).

Пусть система (1) асимптотически устойчива. Исследуем условия, при выполнении которых нулевое решение возмущенной системы также является асимптотически устойчивым.

А.М. Ляпуновым было доказано [1], что если уравнения первого приближения автономны, то возмущения рассматриваемого вида не нарушают асимптотической устойчивости нулевого решения. В случае, когда матрица $\mathbf{A}$ зависит от $t$, известны критерии А.М. Ляпунова, К.П. Персидского, И.Г. Малкина, О. Перрона и Х. Массера устойчивости по неавтономному линейному приближению ([2], с. 360–369; [3], с. 266–274). Однако указанные критерии являются достаточными, причем в них предполагается, что решения невозмущенной системы убывают по экспоненциальному закону. В общем случае условие асимптотической устойчивости системы первого приближения не является ни необходимым, ни достаточным для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2) ([2], с. 357–360).

Предположим, что для системы (1) существует такая квадратичная форма $V(t, \mathbf{X}) = \mathbf{X}^*\mathbf{D}(t)\mathbf{X}$ с непрерывно дифференцируемой и ограниченной при $t \geq 0$ симметричной матрицей $\mathbf{D}(t)$, что при всех $t \geq 0$ и $\mathbf{X} \in \mathbf{E}^n$ справедливы неравенства

$$a_1\|\mathbf{X}\|^2 \leq V(t, \mathbf{X}) \leq a_2\|\mathbf{X}\|^2, \tag{4}$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)} \leq -\lambda(t)\|\mathbf{X}\|^2. \tag{5}$$

Здесь $a_1$, $a_2$ — положительные постоянные, а функция $\lambda(t)$ непрерывна и неотрицательна на промежутке $[0, +\infty)$. Например, если при всех $t \geq 0$ имеем $\lambda_j(t) \leq 0$, $j = 1, \dots, n$, где $\lambda_j(t)$ — собственные числа матрицы $\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^*(t)$, то можно считать ([3], с. 149–150), что $V(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X}\|^2$, $\lambda(t) = -\max\limits_{j=1,\dots,n} \lambda_j(t)$.

Будем также предполагать, что выполняется условие

$$\varphi(t) = \int_0^t \lambda(\tau)d\tau \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{6}$$

Тогда, используя неравенства (4), (5), убеждаемся ([4], с. 70–75), что система (1) асимптотически устойчива, причем для всех $t_0 \geq 0$, $t \geq t_0$, $\mathbf{X}_0 \in \mathbf{E}^n$ имеет место оценка

$$\|\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0, t_0)\| \leq \sqrt{a_2/a_1}\|\mathbf{X}_0\|\Phi(t)/\Phi(t_0).$$

Здесь $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0, t_0)$ — решение системы (1), проходящее при $t = t_0$ через точку $\mathbf{X}_0$; $\Phi(t) = \exp(-\varphi(t)/(2a_2))$.

**Теорема 1.** *Если интеграл*

$$\int_0^{+\infty} \Phi^{\sigma-1}(t)dt$$

*сходится, то нулевое решение системы* (2) *асимптотически устойчиво.*

**Доказательство.** Пусть $L = \sup\limits_{t\geq 0}\|\mathbf{D}(t)\|$. Выберем положительное число $T$ так, чтобы при $t \geq T$ выполнялись неравенства

$$\begin{gathered} 2\sqrt{a_2/a_1}\,\Phi(t) < H, \\ \frac{cL}{a_1}\left(\frac{4\,a_2}{a_1}\right)^{\frac{\sigma-1}{2}} \int_t^{+\infty} \Phi^{\sigma-1}(\tau)d\tau < \ln 2. \end{gathered} \tag{7}$$

Рассмотрим решение $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0, t_0)$ системы (2), начальные данные которого удовлетворяют условиям $\|\mathbf{X}_0\| < \Phi(t_0)$, $t_0 \geq T$, и покажем, что при всех $t \geq t_0$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{X}(t)\| < 2\sqrt{a_2/a_1}\Phi(t). \tag{8}$$

Действительно, если существует такой момент времени $t_1 > t_0$, что на промежутке $[t_0, t_1)$ выполнено неравенство (8), а при $t = t_1$ оно обращается в равенство, то при всех $t \in [t_0, t_1]$ получим

$$\frac{dV(t, \mathbf{X}(t))}{dt} \leq -\lambda(t)\,\|\mathbf{X}(t)\|^2 + 2cL\|\mathbf{X}(t)\|^{\sigma+1} \leq \Big(-\frac{\lambda(t)}{a_2} + \frac{2cL}{a_1}\|\mathbf{X}(t)\|^{\sigma-1}\Big)V(t, \mathbf{X}(t)).$$

Интегрируя данное неравенство в пределах от $t_0$ до $t_1$ и применяя оценки (4) и (7), имеем

$$\|\mathbf{X}(t_1)\| < \sqrt{a_2/a_1}\,\Phi(t_1)\exp\left(\frac{cL}{a_1}\int_{t_0}^{t_1}\|\mathbf{X}(\tau)\|^{\sigma-1}d\tau\right) <$$

$$< \sqrt{a_2/a_1}\,\Phi(t_1)\exp\left(\frac{cL}{a_1}\left(\frac{4a_2}{a_1}\right)^{\frac{\sigma-1}{2}}\int_{t_0}^{+\infty}\Phi^{\sigma-1}(\tau)d\tau\right) < 2\sqrt{a_2/a_1}\,\Phi(t_1).$$

Приходим к противоречию. Значит, решение $\mathbf{X}(t)$ при всех $t \geq t_0$ удовлетворяет условию (8).

Используя доказанное свойство решений системы (2), а также их непрерывную зависимость от начальных данных в точке $\mathbf{X}_0 = \mathbf{0}$, получаем утверждение теоремы. □

**Следствие.** Пусть $\lambda(t) = a(t+1)^\beta$, где $a > 0$, $\beta \geq -1$. Тогда при $\beta > -1$ нулевое решение системы (2) асимптотически устойчиво при всех $\sigma > 1$. Если $\beta = -1$, то для асимптотической устойчивости нулевого решения достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\sigma > 1 + 2a_2/a$.

**Пример 1.** Рассмотрим скалярное уравнение

$$\dot{x} = -\lambda(t)x + x^{\sigma}, \tag{9}$$

где непрерывная и неотрицательная на промежутке $[0, +\infty)$ функция $\lambda(t)$ удовлетворяет условию (6), $\sigma$ — рациональное число с нечетным знаменателем, $\sigma > 1$.

Общее решение уравнения (9) имеет вид

$$x(t, x_0, t_0) = x_0 \exp\left(-\varphi(t) + \varphi(t_0)\right)\left(1 - (\sigma - 1)x_0^{\sigma-1}\int_{t_0}^{t}\exp\big(-(\sigma-1)(\varphi(\tau) - \varphi(t_0))\big)d\tau\right)^{-\frac{1}{\sigma-1}}.$$

Следовательно, нулевое решение уравнения (9) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\exp(-(\sigma-1)\,\varphi(t))dt$.

**Замечание 1.** В работе [5] для системы (2) с диагональной матрицей $\mathbf{A}(t)$ получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения. Результаты этой работы, а также рассмотренный пример показывают, что определенные в настоящей статье достаточные условия асимптотической устойчивости близки к необходимым.

**Замечание 2.** Предположим, что функция $\lambda(t)$ в оценке (5) может принимать значения разных знаков. В этом случае для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2) достаточно, чтобы сходился интеграл

$$\int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{\sigma-1}{2}\int_0^t\psi(\tau)\lambda(\tau)\,d\tau\right)dt,$$

где

$$\psi(t) = \begin{cases}1/a_2 & \text{при } \ \lambda(t) \ge 0;\\ 1/a_1 & \text{при } \ \lambda(t) < 0.\end{cases}$$

**Замечание 3.** Теорема 1 может быть доказана с использованием результатов работы ([6], с. 132–138). Однако в указанной работе предполагалось, что заранее известна оценка для фундаментальной матрицы системы линейного приближения, а условия асимптотической устойчивости были получены с помощью решения интегральных неравенств.

Покажем далее, что предложенный при доказательстве теоремы 1 способ оценки решений можно применять и для нахождения критериев асимптотической устойчивости по нелинейному неавтономному приближению.

**2.** Пусть система первого приближения имеет вид

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}). \tag{10}$$

Здесь векторная функция $\mathbf{F}(t, \mathbf{X})$ определена и непрерывна при всех $t \ge 0$, $\mathbf{X} \in \mathbf{E}^n$ и является однородной по $\mathbf{X}$ порядка $\mu$, где $\mu$ — рациональное число с нечетным числителем и знаменателем, $\mu > 1$.

Наряду с системой (10) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}) + \mathbf{R}(t, \mathbf{X}). \tag{11}$$

Как и в предыдущем пункте, будем предполагать, что функция $\mathbf{R}(t, \mathbf{X})$ непрерывна при $t \ge 0$, $\|\mathbf{X}\| < H$ и удовлетворяет в указанной области неравенству (3), причем в данном случае считаем, что $\sigma > \mu$.

Н.Н. Красовский [7] установил, что если нулевое решение системы (10) асимптотически устойчиво и все ее решения при $t \to +\infty$ стремятся к началу координат со скоростью, соответствующей автономной системе ($\mathbf{F}(t, \mathbf{X}) \equiv \mathbf{F}(\mathbf{X})$), то асимптотическая устойчивость сохраняется и для возмущенных уравнений.

Определим зависимость между скоростью стремления к нулю решений системы первого приближения и порядком возмущений, не нарушающих асимптотическую устойчивость нулевого решения.

Пусть для системы (10) существует непрерывно дифференцируемая при всех $t \geq 0$, $\mathbf{X} \in \mathbf{E}^n$ функция $V(t, \mathbf{X})$, удовлетворяющая неравенствам

$$a_1 \|\mathbf{X}\|^m \leq V(t, \mathbf{X}) \leq a_2 \|\mathbf{X}\|^m, \quad \left\| \frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}} \right\| \leq a_3 \|\mathbf{X}\|^{m-1}, \tag{12}$$

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(10)} \leq -\lambda(t) \|\mathbf{X}\|^{m+\mu-1}. \tag{13}$$

Здесь $a_1$, $a_2$, $a_3$, $m$ — положительные постоянные, причем $m > 1$, а $\lambda(t)$ — непрерывная и неотрицательная при $t \geq 0$ функция, для которой выполнено условие (6). Применяя метод оценок ([4], с. 70–75), убеждаемся, что при всех $t_0 \geq 0$, $t \geq t_0$, $\mathbf{X}_0 \in \mathbf{E}^n$ для решения $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0, t_0)$ системы (10) справедливо неравенство

$$\|\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0, t_0)\| \leq \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^{\frac{1}{m}} \|\mathbf{X}_0\| \left( 1 + \frac{\mu - 1}{m a_2} \|\mathbf{X}_0\|^{\mu-1} (\varphi(t) - \varphi(t_0)) \right)^{-\frac{1}{\mu-1}}.$$

Введем обозначение $\nu = (\sigma - \mu)/(\mu - 1)$. Далее определим число $b > 0$, удовлетворяющее условию $\varphi(t) > 0$ при $t \geq b$.

**Теорема 2.** *Если*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\varphi(t)} \int_b^t \varphi^{-\nu}(\tau) d\tau = 0,$$

*то нулевое решение системы* (11) *асимптотически устойчиво.*

**Доказательство.** Для производной функции $V(t, \mathbf{X})$ в силу возмущенной системы при $t \geq 0$, $\|\mathbf{X}\| < H$ получаем

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(11)} \leq \left( -\lambda(t)\, a_2^{-1-\frac{\mu-1}{m}} + c\, a_3\, a_1^{-1-\frac{\mu-1}{m}} \|\mathbf{X}\|^{\sigma-\mu} \right) V^{1+\frac{\mu-1}{m}}. \tag{14}$$

Выберем положительные числа $\delta$ и $L$ так, чтобы имели место неравенства

$$\delta < \frac{m a_2}{\mu - 1}, \quad L > \frac{2 m a_2}{\mu - 1} \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^{\frac{\mu-1}{m}}.$$

Зададим $T \geq b$ настолько большим, чтобы при всех $t \geq T$ выполнялись условия

$$L < \varphi(t) H^{\mu-1}, \quad 2 a_3 c L^{\nu} \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^{1+\frac{\mu-1}{m}} \int_b^t \varphi^{-\nu}(\tau) d\tau < \varphi(t).$$

Как и при доказательстве теоремы 1, интегрируя неравенство (14) и применяя оценки (12), покажем, что если начальные данные решения $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0, t_0)$ системы (11) удовлетворяют условиям $\|\mathbf{X}_0\|^{\mu-1} < \delta/\varphi(t_0)$, $t_0 \geq T$, то при всех $t \geq t_0$ имеем $\|\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0, t_0)\|^{\mu-1} < L/\varphi(t)$. При этом рассматриваемое решение на промежутке $[t_0, +\infty)$ остается в области $\|\mathbf{X}\| < H$.

Снова используя непрерывную зависимость решений от $\mathbf{X}_0$ в точке $\mathbf{X}_0 = \mathbf{0}$, получаем утверждение теоремы. □

**Следствие.** Пусть $\lambda(t) = a(t+1)^{\beta}$, где $a > 0$, $-1 < \beta \leq 0$. Тогда при

$$\sigma > \mu - \beta(\mu - 1)/(\beta + 1) \tag{15}$$

нулевое решение системы (11) асимптотически устойчиво.

**Замечание 4.** Если функция $\lambda(t)$ в оценке (13) принимает значения разных знаков, то для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (11) достаточно условия

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{g(t)}\int_b^t g^{-\nu}(\tau)d\tau = 0,$$

где $g(t)=\int\limits_0^t \psi(\tau)\lambda(\tau)\,d\tau$, $g(t)>0$ при $t\geq b$, а функция $\psi(t)$ имеет вид

$$\psi(t)=\begin{cases} a_2^{-1-\frac{\mu-1}{m}} & \text{при}\ \ \lambda(t)\geq 0;\\ a_1^{-1-\frac{\mu-1}{m}} & \text{при}\ \ \lambda(t)<0.\end{cases}$$

**Замечание 5.** Аналогичным образом можно получить достаточные условия асимптотической устойчивости в случае, когда правые части системы первого приближения являются обобщенно-однородными функциями ([8], с. 187–188).

**3.** Покажем теперь, что теорема 2 позволяет определить критерии асимптотической устойчивости нулевого решения для некоторых классов нелинейных систем с неограниченными возмущениями.

Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{X}}=\mathbf{F}(\mathbf{X}), \tag{16}$$

где элементы вектора $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ являются непрерывно дифференцируемыми однородными функциями порядка $\mu$, $\mu$ — рациональное число с нечетным числителем и знаменателем, $\mu>1$.

Предположим, что нулевое решение системы (16) асимптотически устойчиво. Известно ([4], с. 115–123), что в этом случае для исследуемой системы существуют функции Ляпунова $V(\mathbf{X})$ и $W(\mathbf{X})$, обладающие свойствами

1) $V(\mathbf{X})$ и $W(\mathbf{X})$ — положительно-определенные функции;

2) $V(\mathbf{X})$ и $W(\mathbf{X})$ — однородные функции порядка $m$ и $m+\mu-1$ соответственно, $m>1$;

3) функция $V(\mathbf{X})$ непрерывно дифференцируема и

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(16)}=-W(\mathbf{X}).$$

Пусть задана возмущенная система

$$\dot{\mathbf{X}}=\mathbf{F}(\mathbf{X})+\mathbf{R}(t,\mathbf{X}). \tag{17}$$

Будем считать, что функция $\mathbf{R}(t,\mathbf{X})$ непрерывна при $t\geq 0$, $\|\mathbf{X}\|<H$ и удовлетворяет неравенству

$$\|\mathbf{R}(t,\mathbf{X})\|\leq c(t+1)^{\gamma}\,\|\mathbf{X}\|^{\sigma}, \tag{18}$$

где $c,\gamma>0$, $\sigma>\mu$. Таким образом, рассматриваемые возмущения являются неограниченными функциями времени.

Производя в уравнениях (17) замену независимой переменной $\tau+1=(t+1)^{\gamma+1}$, получаем систему

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\tau}=\frac{(\tau+1)^{\beta}}{\gamma+1}\,\mathbf{F}(\mathbf{X})+\mathbf{Q}(\tau,\mathbf{X}). \tag{19}$$

Здесь $\beta=-\gamma/(\gamma+1)$, а для функции $\mathbf{Q}(\tau,\mathbf{X})$ при $\tau\geq 0$, $\|\mathbf{X}\|<H$ справедлива оценка $\|\mathbf{Q}(\tau,\mathbf{X})\|\leq c_1\|\mathbf{X}\|^{\sigma}$, $c_1>0$.

Дифференцируя функцию $V(\mathbf{X})$ в силу соответствующей невозмущенной системы

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\tau}=\frac{(\tau+1)^{\beta}}{\gamma+1}\,\mathbf{F}(\mathbf{X}) \tag{20}$$

и используя свойства однородных функций ([4], с. 117–118), имеем

$$\frac{dV}{d\tau}\Big|_{(20)} = -\frac{(\tau+1)^{\beta}}{\gamma+1}W(\mathbf{X}) \le -a\,(\tau+1)^{\beta}\,\|\mathbf{X}\|^{m+\mu-1},$$

где $a$ — положительная постоянная. Следовательно, в данном случае $\lambda(\tau) = a(\tau+1)^{\beta}$, причем $-1 < \beta < 0$.

Применяя к системе (19) следствие к теореме 2, получаем, что справедлива

**Теорема 3.** *При выполнении неравенства*

$$\sigma > \mu + \gamma(\mu - 1) \tag{21}$$

*нулевое решение системы* (17) *асимптотически устойчиво.*

Покажем далее, что имеет место и обратное утверждение.

**Теорема 4.** *Для того чтобы нулевое решение системы* (17) *было асимптотически устойчиво при любом возмущении* $\mathbf{R}(t,\mathbf{X})$*, удовлетворяющем условию* (18)*, необходимо, чтобы выполнялось неравенство* (21).

**Доказательство.** Рассмотрим систему (16), имеющую асимптотически устойчивое нулевое решение. Пусть $V(\mathbf{X})$ и $W(\mathbf{X})$ — положительно-определенные однородные функции Ляпунова, соответствующие этой системе.

Предположим, что неравенство (21) не выполнено и построим возмущение $\mathbf{R}(t,\mathbf{X})$, удовлетворяющее условию (18), для которого нулевое решение системы (17) не может являться асимптотически устойчивым.

Выберем функцию $\mathbf{R}(t,\mathbf{X}) = c(t+1)^{\gamma}\,\|\mathbf{X}\|^{\sigma-1}\,\mathbf{X}$. Дифференцируя $V(\mathbf{X})$, в силу возмущенной системы имеем

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(17)} = -W(\mathbf{X}) + mc(t+1)^{\gamma}\,\|\mathbf{X}\|^{\sigma-1}\,V(\mathbf{X}).$$

Следовательно,

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(17)} \ge -W(\mathbf{X}) \ge -b_1\,V^{1+\frac{\mu-1}{m}}(\mathbf{X}), \quad b_1 > 0. \tag{22}$$

Пусть нулевое решение системы (17) асимптотически устойчиво. Рассмотрим решение $\mathbf{X}(t)$ этой системы, определенное на промежутке $[0,+\infty)$ и стремящееся к нулю при $t \to +\infty$.

Интегрируя неравенство (22), получаем, что при всех $t \ge 0$ выполняется условие $\|\mathbf{X}(t)\|^{\mu-1} \ge b_2/(t+1)$, $b_2 > 0$, используя которое, более точно оценим производную

$$\begin{aligned}\frac{dV(\mathbf{X}(t))}{dt} &\ge -b_3\|\mathbf{X}(t)\|^{m+\mu-1} + c\,b_4(t+1)^{\gamma}\,\|\mathbf{X}(t)\|^{m+\sigma-1} = \\ &= \|\mathbf{X}(t)\|^{m+\mu-1}(-b_3 + c\,b_4(t+1)^{\gamma}\,\|\mathbf{X}(t)\|^{\sigma-\mu}) \ge \|\mathbf{X}(t)\|^{m+\mu-1}(-b_3 + c\,b_5(t+1)^{\alpha}).\end{aligned}$$

Здесь $b_3$, $b_4$, $b_5$ — положительные постоянные, $\alpha = \gamma - (\sigma-\mu)/(\mu-1)$.

Так как $\alpha \ge 0$, то при достаточно большом $c$ правая часть последнего неравенства положительна. Значит, функция $V(\mathbf{X}(t))$ будет монотонно возрастать на промежутке $[0,+\infty)$, и в силу положительной определенности $V(\mathbf{X})$ решение $\mathbf{X}(t)$ не может стремиться к нулю при $t \to +\infty$. Приходим к противоречию. $\square$

**Замечание 6.** Из доказанной теоремы следует, что достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (11), полученные в теореме 2, близки к необходимым.

**4.** Далее покажем, что в некоторых случаях с использованием способа из [9], [10] построения нестационарных функций Ляпунова для нелинейных систем можно усилить теорему 2.

Снова рассмотрим невозмущенную систему (10). Предположим, что для нее существует дважды непрерывно дифференцируемая положительно-определенная однородная порядка $m$, $m \ge 2$, функция $V(\mathbf{X})$, удовлетворяющая условию (13), где $\lambda(t) = a(t+1)^{\beta}$, $a > 0$, $-1 < \beta \le 0$.

Пусть соответствующая возмущенная система имеет вид

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}) + \mathbf{B}(t)\mathbf{Q}(\mathbf{X}). \tag{23}$$

Здесь $\mathbf{B}(t)$ — $(n \times k)$-матрица, непрерывная и ограниченная при $t \geq 0$, элементы $k$-мерного вектора $\mathbf{Q}(\mathbf{X})$ являются непрерывно дифференцируемыми однородными функциями порядка $\sigma$, $\sigma \geq 1$.

Применяя к уравнениям (23) следствие из теоремы 2, получаем, что при выполнении неравенства (15) возмущения не нарушают асимптотической устойчивости нулевого решения.

Покажем, что при некоторых дополнительных ограничениях на векторную функцию $\mathbf{F}(t, \mathbf{X})$ и матрицу $\mathbf{B}(t)$ найденные условия асимптотической устойчивости можно ослабить.

Будем предполагать, что при всех $t \geq 0$ и $\mathbf{X} \in \mathbf{E}^n$ имеют место неравенства

$$\|\mathbf{F}(t, \mathbf{X})\| \leq c_1(t+1)^{\alpha} \|\mathbf{X}\|^{\mu}, \quad \|\mathbf{I}(t)\| \leq c_2(t+1)^{\gamma},$$

где $c_1, c_2 > 0$, $\alpha \leq 0$, $\gamma \geq 0$, $\mathbf{I}(t) = \int\limits_0^t \mathbf{B}(\tau)d\tau$. Из оценки (13) и ограниченности матрицы $\mathbf{B}(t)$ следует, что $\alpha \geq \beta$, $\gamma \leq 1$.

**Теорема 5.** *При выполнении неравенства*

$$\sigma > 1 + \varepsilon(\mu - 1)/(\beta + 1), \tag{24}$$

*где* $\varepsilon = \max\{\gamma + \alpha - \beta;\, (\gamma + 1)/2\}$, *нулевое решение системы* (23) *асимптотически устойчиво.*

**Доказательство.** В качестве функции Ляпунова выбираем функцию

$$V_1(t, \mathbf{X}) = V(\mathbf{X}) - \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}}\right)^* \mathbf{I}(t)\, \mathbf{Q}(\mathbf{X}).$$

Дифференцируя ее в силу возмущенной системы, имеем

$$\frac{dV_1}{dt}\Big|_{(23)} \leq -\lambda(t)\|\mathbf{X}(t)\|^{m+\mu-1} - \big(\mathbf{F}(t, \mathbf{X}) + \mathbf{B}(t)\mathbf{Q}(\mathbf{X})\big)^* \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}\left(\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}}\right)^* \mathbf{I}(t)\, \mathbf{Q}(\mathbf{X})\right).$$

Значит, при всех $t \geq 0$, $\mathbf{X} \in \mathbf{E}^n$ справедливы оценки

$$a_1\|\mathbf{X}\|^m - a_3(t+1)^{\gamma} \|\mathbf{X}\|^{\sigma+m-1} \leq V_1 \leq a_2\|\mathbf{X}\|^m + a_3(t+1)^{\gamma}\|\mathbf{X}\|^{\sigma+m-1},$$

$$\frac{dV_1}{dt}\Big|_{(23)} \leq (t+1)^{\beta} \|\mathbf{X}\|^{m+\mu-1}\big(-a + a_4(t+1)^{\gamma+\alpha-\beta}\|\mathbf{X}\|^{\sigma-1} + a_5(t+1)^{\gamma-\beta} \|\mathbf{X}\|^{2\sigma-\mu-1}\big),$$

где $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, 5$.

Далее аналогично доказательству теоремы 2 можно показать существование положительных постоянных $\delta$, $L$ и $T$ таких, что если $t_0 \geq T$, $\|\mathbf{X}_0\|^{\mu-1} < \delta(t_0+1)^{-\beta-1}$, то при всех $t \geq t_0$ для решения $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0, t_0)$ системы (23) выполнено условие $\|\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0, t_0)\|^{\mu-1} < L(t+1)^{-\beta-1}$. $\square$

**Следствие 1.** Если интеграл $\mathbf{I}(t)$ ограничен на промежутке $[0, +\infty)$, то при выполнении неравенства $\sigma > 1 + \theta(\mu-1)/(\beta+1)$, где $\theta = \max\{\alpha - \beta;\, 1/2\}$, нулевое решение системы (23) асимптотически устойчиво.

**Следствие 2.** В случае, когда $\alpha = \beta$, для асимптотической устойчивости нулевого решения возмущенной системы достаточно, чтобы имело место неравенство $\sigma > 1+(\mu-1)(\gamma+1)/(2\beta+2)$. Если же $\alpha = \beta = 0$, то это условие совпадает с полученными в работах [9] (при $\gamma = 0$) и [10] (при $0 < \gamma < 1$) критериями асимптотической устойчивости по автономному однородному приближению ($\mathbf{F}(t, \mathbf{X}) \equiv \mathbf{F}(\mathbf{X})$).

**Замечание 7.** При $\alpha - \beta + \gamma < 1$ неравенство (24) задает более широкую область значений параметра $\sigma$ по сравнению с областью, определенной неравенством (15).

**Замечание 8.** Если $\gamma < 2\beta + 1$, то асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (23) может сохраняться и при $\sigma \le \mu$, т. е. в случае, когда порядок однородности возмущений не превосходит порядка правых частей невозмущенной системы.

**Пример 2.** Рассмотрим систему

$$\dot{x}_s = \sum_{j=1}^{n} (p_{sj}(t) + b_{sj}(t)) x_j^{\mu}, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{25}$$

Здесь функции $p_{sj}(t)$ и $b_{sj}(t)$ непрерывны и ограничены при $t \ge 0$, $\mu$ — рациональное число с нечетными числителем и знаменателем, $\mu > 1$.

Пусть для всех $t \ge 0$ и $\mathbf{X} \in \mathbf{E}^n$ справедливо неравенство

$$\mathbf{X}^*(\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}^*(t))\mathbf{X} \le -a(t+1)^{\beta} \|\mathbf{X}\|^2,$$

где $\mathbf{P}(t) = \{p_{sj}(t)\}$, $s, j = 1, \ldots, n$, $a > 0$, $-1 < \beta \le 0$. Тогда нулевое решение невозмущенной ($b_{sj}(t) \equiv 0$) системы асимптотически устойчиво, причем в качестве функции Ляпунова можно выбрать $V(\mathbf{X}) = \sum\limits_{s=1}^{n} x_s^{\mu+1}$.

Предположим, что интегралы $\int\limits_0^t b_{sj}(\tau)d\tau$ также ограничены при $t \ge 0$.

Применяя теорему 5 (здесь $\sigma = \mu$, $\alpha = \gamma = 0$), получаем, что при выполнении неравенства $\beta > -1/2$ нулевое решение системы (25) асимптотически устойчиво.

**Замечание 9.** Используя предложенную в статьях [9], [10] процедуру последовательного построения функций Ляпунова, можно провести дальнейшее уточнение условий асимптотической устойчивости нулевого решения системы (23). Однако при этом потребуются дополнительные ограничения на векторную функцию $\mathbf{F}(t, \mathbf{X})$ и матрицу $\mathbf{B}(t)$.

## Литература


1. Ляпунов А.М. *Общая задача об устойчивости движения.* – 2-е изд. – М.–Л.: ОНТИ, 1935. – 386 с.
2. Малкин И. Г. *Теория устойчивости движения.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1952. – 432 с.
3. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* – М.: Наука, 1967. – 472 с.
4. Зубов В.И. *Устойчивость движения. Методы Ляпунова и их применение.* Учебн. пособие. – М.: Высш. школа, 1973. – 271 с.
5. Изобов Н.А. *Об асимптотической устойчивости и абсолютной интегрируемости на полуоси решений дифференциальной системы с возмущениями высшего порядка* // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31. – № 3. – С. 417–421.
6. Валеев К.Г., Финин Г.С. *Построение функций Ляпунова.* – Киев: Наук. думка, 1981. – 412 с.
7. Красовский Н.Н. *Об устойчивости по первому приближению* // ПММ. – 1955. – Т. 19. – № 5. – С. 516–530.
8. Зубов В.И. *Математические методы исследования систем автоматического регулирования.* – Л.: Судпромгиз, 1959. – 324 с.
9. Александров А.Ю. *Об одном методе построения функций Ляпунова для нелинейных неавтономных систем* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 1. – С. 3–10.
10. Александров А.Ю. *К вопросу об устойчивости по нелинейному приближению* // Сиб. матем. журн. – 1997. – Т. 38. – № 6. – С. 1203–1210.



*Санкт-Петербургский государственный университет*



*Поступила* 09.09.1998