И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2000 МАТЕМАТИКА № 10 (461)

УДК 517.544

Е.П. АКСЕНТЬЕВА

СТЕПЕННАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С ПОСТОЯННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ДЛЯ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С НУЛЯМИ НА КОНТУРЕ

На плоскости нелинейная задача Римана степенного типа

$$[\Phi^+(t)]^\alpha = G(t)[\Phi^-(t)]^\beta, \quad t \in L \setminus \{\widetilde{t}\}, \tag{1}$$

в классе функций с допустимыми нулями на контуре рассматривалась впервые Ф.Д. Гаховым [1] при $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. М.Э. Толочко [2], исследуя задачу (1) для многосвязной области и кусочно-постоянных целых показателей α, β, получил необходимое и достаточное условие разрешимости. Г.В. Аржанов [3], [4] при функциональных показателях α, β изучил различные ситуации, связанные с нулями функций $\Phi^\pm(t)$ на L. При этом точка $\widetilde{t}$ не фиксировалась, и допускалось аналитическое продолжение в полуокрестности нулей соответственно слева и справа у функций $[\Phi^+(t)]^\alpha$ и $[\Phi^-(t)]^\beta$. В работе автора [5] при измененной постановке задачи (1) с фиксированной точкой $\widetilde{t}$ получен критерий разрешимости в случае функциональных показателей. На римановой поверхности рода 1, а также ее аналоге — параллелограмме, задача (1) с постоянными показателями в классе функций без нулей на контуре рассматривалась В.В. Кашевским [6], [7].

В данной работе для задачи (1) при постоянных показателях в параллелограмме получены критерий разрешимости и решение в явном виде. Дан анализ условий разрешимости в зависимости от числа нулей решения и их расположения, включая случай граничных нулей. Общую теорию дополняет пример, в котором определен произвол входящих в решение постоянных.

1. Критерий разрешимости, явный вид решения

Пусть $R = \{z \in \mathbb{C} \mid z = t_1 + s_1\omega_1 + s_2\omega_2,\ 0 < s_1 < 1,\ 0 < s_2 < 1\}$ — внутренность параллелограмма, $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$, l_1, l_1' — его боковые стороны, l_2, l_2' — нижнее и верхнее основания, $\{t_k\} = \{t_1,\ t_1+\omega_1,\ t_1+\omega_1+\omega_2,\ t_1+\omega_2\}$ — вершины. Пусть ∂R — граница области R, ориентированная против часовой стрелки, $L = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $L \subset R$ — окружность, ориентированная по часовой стрелке. Через D^+ обозначим двусвязную область с границей $\partial D^+ = L \cup \partial R$, а через $D^- = \overline{R} \setminus \overline{D}^+$ — односвязную (рис. 1).

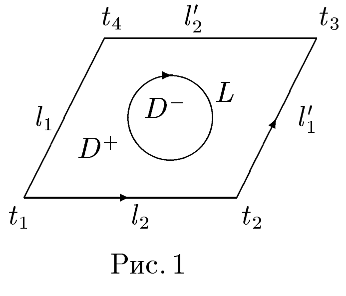

Рис. 1

Требуется найти все функции $\Phi(z) \not\equiv 0$, аналитические в $R \setminus L$, непрерывные в $\overline{D}^{\pm}$ (т.е. $\Phi(z) \in H^{\infty}(D^{\pm}) \cap C(\overline{D}^{\pm})$), имеющие конечное число нулей, по граничным условиям

$$[\Phi^{+}(t)]^{\alpha} = G(t)[\Phi^{-}(t)]^{\beta}, \quad t \in L \setminus \Omega, \tag{2}$$

$$\Phi^{+}(t+\omega_k) = \Phi^{+}(t), \qquad t \in l_k, \quad k = 1, 2, \tag{3}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\Omega = \{\tau_j\}_1^r$, точки $\tau_j \in L$ произвольно фиксированы и различны, $r \geq 1$, $G(t)$ — гёльдерова функция на L, $G(t) \neq 0$. Для определенности считаем, что точки $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ расположены в порядке обхода L против часовой стрелки. Будем рассматривать два случая: случай A, когда все точки τ_j, $j = \overline{1, r}$, являются нулями (других нулей на L нет) функции $\Phi(z) = \Phi^{\pm}(z)$, $z \in \overline{D}^{\pm}$ (т. е. $\lim \Phi^{\pm}(z) = 0$ при $z \to \tau_j$, $z \in \overline{D}^{\pm}$), и случай B, когда $\Phi^{\pm}(t) \neq 0$, $t \in L$, $\Omega = \{\tau_1\}$, т. е. точка τ_1 является точкой разрыва краевого условия. Условие (2) следует понимать так, что существуют ветви $\ln \Phi^{\pm}(t)$ на $L \setminus \Omega$, при которых выполняется равенство

$$\exp[\alpha \ln \Phi^{+}(t)] = G(t) \exp[\beta \ln \Phi^{-}(t)].$$

Аналитического продолжения функций $[\Phi^{+}(t)]^{\alpha}$, $[\Phi^{-}(t)]^{\beta}$ в полуокрестности точки τ_j не требуется.

Получим необходимое условие разрешимости задачи. Обозначим все возможные нули функции $\Phi(z)$ в $\Pi \setminus L$ (с учетом их кратности и аналитичности функции $\Phi(z)$ на ∂R): $a_j \in \Pi \setminus \overline{D}^{-}$, $j = \overline{1, n^{+}}$; $b_j \in D^{-}$, $j = \overline{1, n^{-}}$, где $\Pi = R \cup l_1 \cup l_2 \cup \{t_1\}$. У функции $\Phi(z)$ выделим явно эти нули, используя функцию Вейерштрасса $\sigma(z; \omega_1, \omega_2) = \sigma(z)$ [8],

$$\Phi^{+}(z) = \left[\prod_{j=1}^{n^{+}} \frac{\sigma(z-a_j)}{\sigma(z-z_0)}\right] F^{+}(z), \tag{4}$$

$$\Phi^{-}(z) = \left[\prod_{j=1}^{n^{-}} \sigma(z-b_j)\right] F^{-}(z), \tag{5}$$

где точка $z_0 \in D^{-}$ фиксирована, $F(z) \in H^{\infty}(D^{\pm}) \cap C(\overline{D}^{\pm})$, $F(z) \neq 0$ в $\Pi \setminus L$. Однозначное выделение ветвей $\Psi^{\pm}(z) = \ln F^{\pm}(z)$ в $D^{\pm}$ возможно, т. к. у $F^{\pm}(z)$ нет нулей в $D^{\pm}$ и справедливы следующие выкладки:

$$F^{+}(t+\omega_k) = F^{+}(t) \exp\left[\eta_k \sum_{j=1}^{n^{+}} (a_j - z_0)\right], \quad t \in l_k, \quad k = 1, 2,$$

$\eta_k = 2\zeta(\omega_k/2)$, $\zeta(z) = \zeta(z; \omega_1, \omega_2)$ — функция Вейерштрасса $\Longrightarrow \frac{F'^{+}(t+\omega_k)}{F^{+}(t+\omega_k)} = \frac{F'^{+}(t)}{F^{+}(t)} \Longrightarrow \int\limits_{\partial R} \frac{F'(t)dt}{F(t)} = 0$ $\Longrightarrow [\ln F^{+}(t)]_{L_1} = [\ln F^{+}(t)]_{\partial R} = 0$, где L_1 — любой замкнутый контур в R, ориентированный против часовой стрелки, причем $L \subset \operatorname{int} L_1$, $[f]_{L_1}$— изменение f вдоль L_1.

Краевое условие (2) для функции $F(z)$ с учетом (4), (5) преобразуется в условие вида

$$[F^{+}(t)]^{\alpha} = G_1(t)[F^{-}(t)]^{\beta}, \quad t \in L \setminus \Omega, \tag{6}$$

где

$$G_1(t) = G(t) \prod_{j=1}^{n^{+}} \left[\frac{\sigma(t-z_0)}{\sigma(t-a_j)}\right]^{\alpha} \prod_{j=1}^{n^{-}} [\sigma(t-b_j)]^{\beta}.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что ветви многозначных множителей функции $G_1(t)$, а также $\ln G(t)$ фиксированы на $L \setminus \{\tau_1\}$.

Учитывая, что функции $\ln F^{\pm}(t)$ теряют непрерывность в точках τ_j, прологарифмируем условие (6). Получим

$$\alpha \Psi^{+}(t) = \beta \Psi^{-}(t) + g(t), \quad t \in L \setminus \Omega, \tag{7}$$

где $g(t) = \ln G_1(t) + 2\pi i N_k(t)$, $\Psi(z) = \ln F(z)$, $N_k(t) = \Big\{N_0,\, t \in \tau_1\tau_2;\, N_0 + \sum\limits_{j=2}^{k} \alpha_j,\, t \in \tau_k\tau_{k+1},\, k = \overline{2,r},$ $\tau_{r+1} = \tau_1\Big\}$,

$$\alpha_j = m_j - \alpha k_j - \beta l_j, \tag{8}$$

$N_0, k_j, l_j, m_j \in \mathbb{Z}$ произвольны, $j = \overline{2,r} \Longrightarrow g(\tau_j - 0) - g(\tau_j + 0) = 2\pi i \alpha_j$, $j = \overline{1,r}$, где

$$\alpha_1 = \varkappa - \sum_{j=2}^{r} \alpha_j - \alpha n^+ - \beta n^-. \tag{9}$$

Если $r = 1$, то единственной точкой разрыва функции $g(t)$ является τ_1, $N_k(t) = N_0$ на $L \setminus \{\tau_1\}$, а сумма $\sum\limits_{j=2}^{r} \alpha_j$ в (9) отсутствует. Получена

Теорема 1. *Краевая задача* (2), (3) *эквивалентна совокупности линейных задач* (7) *в классе функций* $\Psi^\pm(z) \in H^\infty(D^\pm) \cap C(\overline{D}^\pm \setminus \Omega)$ *с условием*

$$\Psi^+(t + \omega_k) = \Psi^+(t) + \eta_k \sum_{j=1}^{n^+} (a_j - z_0) + 2\pi i \widetilde{N}_k, \quad t \in l_k, \quad k = 1, 2, \tag{10}$$

где $\widetilde{N}_k \in \mathbb{Z}$, *причем в случае* A

$$\lim \operatorname{Re} \Psi^\pm(z) = -\infty \ \ \textit{при} \ \ z \to \tau_j, \quad j = \overline{1,r}, \tag{11}$$

а в случае B *функции* $\Psi^\pm(z)$ *непрерывны в точке* τ_1.

Имеет место

Теорема 2. *Для разрешимости задачи* (2), (3) *необходима разрешимость в целых неотрицательных числах* n^+, n^- *в случае* A *системы*

$$\operatorname{Re}[(\varkappa - \alpha n^+ - \beta n^-)/\alpha] > 0, \quad \operatorname{Re}[(\varkappa - \alpha n^+ - \beta n^-)/\beta] > 0, \tag{12}$$

где $\varkappa = \operatorname{ind}_L G(t)$, *а в случае* B — *уравнения*

$$\alpha n^+ + \beta n^- = \varkappa \Longleftrightarrow \alpha_1 = 0. \tag{13}$$

Доказательство. Учитывая эквивалентность краевых задач (2), (3) и (7), будем искать необходимое условие разрешимости задач (7). Пусть класс $\widetilde{B} = H^\infty(D^\pm) \cap C(\overline{D}^\pm \setminus \Omega)$. Через $\widehat{B}$ обозначим подкласс функций из $\widetilde{B}$, для которых

$$\operatorname{Re} \Psi^\pm(z) \le M < +\infty$$

при $z \in \overline{D}^\pm$ в окрестности точек τ_j множества Ω. Решения класса $\widehat{B}$, удовлетворяющие условию (11) в точках τ_j в случае A и непрерывные в τ_1 в случае B, являются искомыми.

Возьмем интеграл $I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L g(\tau)\zeta(\tau - z)\mathrm{d}\tau$. В окрестности точек Ω он имеет поведение (напр., [9]) $I(z) = \alpha_j \ln(z - \tau_j) + I_j(z)$, $j = \overline{1,r}$, где функции $I_j(z)$ ограничены. Поэтому $I(z) \in \widetilde{B}$. Введем функции $\chi^+(z) = \alpha\Psi^+(z) - I^+(z)$, $\chi^-(z) = \beta\Psi^-(z) - I^-(z)$. Поскольку на $L \setminus \Omega$ функция $\chi(z)$ непрерывна, то в точках Ω она может иметь лишь изолированные особенности. Из рассуждений, аналогичных [5] для функциональных показателей, следует, что эти особые точки могут быть только полюсами первого порядка и только при $\alpha/\beta < 0$ в этих точках. Однако, если α, β постоянные, то функция $\chi(z)$ ограничена в окрестности точек Ω. Без потери общности покажем это для случая $\tau_j = 1$. Пусть $\chi(z)$ в окрестности $\tau_j = 1$ имеет представление $\chi(z) =$

$c_1/(z-1)+\chi_1(z)$, где $\chi_1(z)$ ограничена. Тогда в случае A для функции $\Psi(z)$, удовлетворяющей условию (11), имеем

$$\lim \operatorname{Re}\left[\frac{c_1}{\alpha(z-1)}+\frac{\alpha_j}{\alpha}\ln(z-1)\right]=-\infty,\quad z\to 1,\ \ z\in\overline{D}^+,$$
$$\lim \operatorname{Re}\left[\frac{c_1}{\beta(z-1)}+\frac{\alpha_j}{\beta}\ln(z-1)\right]=-\infty,\quad z\to 1,\ \ z\in\overline{D}^-.$$

Если z стремится к $\tau_j=1$ по L, то для выполнения этих условий необходимо, чтобы $\operatorname{Im}(c_1/\alpha)=0$, $\operatorname{Im}(c_1/\beta)=0$; тогда первые слагаемые ограничены, откуда следуют неравенства

$$\operatorname{Re}(\alpha_j/\alpha)>0,\quad \operatorname{Re}(\alpha_j/\beta)>0,\quad j=\overline{1,r},\tag{14}$$

что противоречит тому, что $\alpha/\beta<0$. Значит, $c_1=0$, что приводит снова к (14), следствием чего в силу (9) будут неравенства (12).

В случае B как $\Psi(z)$, так и $\chi(z)$ в окрестности точки τ_1 ограничены. Поэтому $\alpha_1=0\iff$ (13). □

Заметим, что из доказательства теоремы 2 следует, что в окрестности τ_j имеют место представления

$$[\Phi^+(z)]^\alpha=(z-\tau_j)^{\alpha_j}\Psi_j^+(z),\quad [\Phi^-(z)]^\beta=(z-\tau_j)^{\alpha_j}\Psi_j^-(z),\tag{15}$$

где функции $\Psi_j^\pm(z)$ ограничены и не обращаются в нуль в полуокрестностях точки τ_j, $j=\overline{1,r}$.

Найдем решения исходной задачи, считая условия теоремы 2 выполненными. Тогда определены числа n^+, n^- и число $\delta=\sum\limits_{j=1}^{r}\alpha_j$ из (9). Зная δ, находим α_j, $j=\overline{1,r}$, учитывая (8), (14). При этом всегда возможен случай одного граничного нуля, когда при $r=1$ берем $\alpha_1=\delta$. Удобнее искать решение не приведением к линейным задачам (7), (8) (чтобы избежать вычисления интегралов), а применением аналитического продолжения и представления (15) к условиям (2), (3).

Положим

$$f(z)=\exp\left[\sum_{j=2}^{r}\int_{\tau_j\tau_1}(\alpha_j/\alpha)\zeta(\tau-z)\,\mathrm{d}\tau+\sum_{j=1}^{n^-}\int_{b_j\tau_1}(\beta/\alpha)\zeta(\tau-z)\,\mathrm{d}\tau+\sum_{j=1}^{n^+}\int_{a_j\tau_1}\zeta(\tau-z)\,\mathrm{d}\tau\right]=$$
$$=\frac{[\sigma(z-\tau_1)]^{\varkappa/\alpha}}{\prod\limits_{j=1}^{n^+}\sigma(z-a_j)\prod\limits_{j=1}^{r}[\sigma(z-\tau_j)]^{\alpha_j/\alpha}\prod\limits_{j=1}^{n^-}[\sigma(z-b_j)]^{\beta/\alpha}},$$

где $a_j\tau_1\in D^+$. Ветви многозначных множителей фиксируем линиями интегрирования с учетом (8): $b_j\tau_1\in D^-$, $\int\limits_{\tau_j\tau_1}(\alpha_j/\alpha)\zeta(\tau-z)\mathrm{d}\tau=\int\limits_{\tau_j\tau_1}(m_j/\alpha)\zeta(\tau-z)\mathrm{d}\tau-\int\limits_{\tau_j\tau_1}k_j\zeta(\tau-z)\mathrm{d}\tau-\int\limits_{\tau_j\tau_1}(\beta l_j/\alpha)\zeta(\tau-z)\mathrm{d}\tau$, $j=\overline{2,r}$. В первом интеграле $\tau_j\tau_1\in D^-$, если $z\in D^+$; $\tau_j\tau_1\in D^+$, если $z\in D^-$, во втором интеграле $\tau_j\tau_1\in D^+$, а в третьем — $\tau_j\tau_1\in D^-$. Хотя функция $f(z)$ разрывна в D^- и на L, однако функции $[f^-(z)]^{-\alpha/\beta}$ в D^- и $[f(z)]^\alpha$ на $L\setminus\Omega$ являются непрерывными.

Запишем условие (2) в эквивалентной форме $[\Phi^+(t)f^+(t)]^\alpha=[\Phi^-(t)]^\beta[f^-(t)]^\alpha G(t)\iff \Phi^+(t)f^+(t)=[\Phi^-(t)]^{\beta/\alpha}f^-(t)[G(t)]^{1/\alpha}\exp(2\pi iN/\alpha)$, где N — любое целое число.

Введем вспомогательную функцию

$$F_1(z)=\{F_1^+(z),\ \ z\in D^+;\ \ F_1^-(z),\ \ z\in D^-\},$$
$$F_1^+(z)=\Phi^+(z)f^+(z)\exp[-\Gamma^+(z)/\alpha],$$
$$F_1^-(z)=[\Phi^-(z)]^{\beta/\alpha}f^-(z)\exp[(2\pi iN-\Gamma^-(z))/\alpha],$$

где $\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\ln G(\tau)\zeta(\tau-z)\,\mathrm{d}\tau$.

Функция $F_1(z)$ не обращается в нуль в $\overline{R}$, аналитична там, т. к. не имеет скачка на L, однозначна и удовлетворяет условию

$$F_1^+(t+\omega_k) = F_1^+(t)\exp\gamma_k, \quad t\in l_k, \;\; k=1,2, \tag{16}$$

где

$$\gamma_k = \eta_k\Big[\sum_{j=1}^{n^+}(a_j-\tau_1) + \beta\sum_{j=1}^{n^-}(b_j-\tau_1)/\alpha + \sum_{j=2}^{r}\alpha_j(\tau_j-\tau_1)/\alpha + \frac{1}{2\pi i\alpha}\int_L \ln G(t)\mathrm{d}t\Big].$$

Критерием существования функции $F_1(z)$ с условием (16) является (напр., [9]) равенство $\gamma_1\omega_2-\gamma_2\omega_1 = 2\pi i\widetilde{\omega} \Longleftrightarrow$

$$\sum_{j=1}^{n^+}a_j + \Big[\beta\sum_{j=1}^{n^-}b_j + \sum_{j=1}^{r}\alpha_j\tau_j\Big]/\alpha = \widetilde{\omega}+\gamma, \tag{17}$$

где

$$\gamma = -\frac{1}{2\pi i\alpha}\int_L \ln[G(t)t^{\varkappa}]\mathrm{d}t, \quad \widetilde{\omega} = n_1\omega_1+n_2\omega_2, \;\; n_1,n_2\in\mathbb{Z}.$$

При выполнении (17) получим $F_1(z) = \exp(C+\widetilde{\eta}z) \Longrightarrow$

$$\Phi^+(z) = [f^+(z)]^{-1}\exp[\Gamma^+(z)/\alpha + \widetilde{\eta}z + C], \tag{18}$$

$$\Phi^-(z) = [f^-(z)]^{-\alpha/\beta}\exp\{[\Gamma^-(z)+\widetilde{\eta}z\alpha + C\alpha - 2\pi iN]/\beta\}, \tag{19}$$

где $\widetilde{\eta} = n_1\eta_1+n_2\eta_2$, C — произвольная постоянная.

Получена

Теорема 3. *Критерием разрешимости задачи* (2), (3) *являются условия теоремы* 2 *и* (17). *При их выполнении все решения определяются формулами* (18), (19).

2. Исследование условий разрешимости теоремы 2

Рассмотрим два различных случая.

Случай A. По теореме 2 необходимым условием существования решения с нулями на контуре будут неравенства (12). Справедлива

Теорема 4. *Для выполнения неравенств* (12)

1) *при* $\mathrm{Re}(\alpha/\beta)\ge 0$ *необходимы и достаточны неравенства*

$$\varkappa\,\mathrm{Re}\,\alpha > 0, \quad \mathrm{Re}\,\alpha\,\mathrm{Re}\,\beta > 0; \tag{20}$$

2) *при* $\mathrm{Re}(\alpha/\beta) < 0$ *необходимы условия*

$$\mathrm{Im}\,\alpha\,\mathrm{Im}\,\beta < 0, \quad \varkappa\,\mathrm{Im}\,\alpha\,\mathrm{Im}(\alpha/\beta) > 0, \tag{21}$$

и достаточно выполнения (20). *При этом пары нулей* n^+, n^- *удовлетворяют системе*

$$n^+ + \mathrm{Re}(\beta/\alpha)n^- < \mathrm{Re}(\varkappa/\alpha), \quad \mathrm{Re}(\alpha/\beta)n^+ + n^- < \mathrm{Re}(\varkappa/\beta), \tag{22}$$

и число таких пар конечно.

Доказательство. Неравенства (12) эквивалентны системе (22). При выполнении условий (20) пара $n^+=0$, $n^-=0$ удовлетворяет системе (22). Докажем необходимость (20) и (21). При $\mathrm{Re}(\alpha/\beta)\ge 0$ условия (20) следуют из неотрицательности левых частей в (22). При $\mathrm{Re}(\alpha/\beta)<0$ из (22) имеем

$$n^+ < [\mathrm{Re}(\varkappa/\alpha) - \mathrm{Re}(\beta/\alpha)\,\mathrm{Re}(\varkappa/\beta)]/[1-\mathrm{Re}(\beta/\alpha)\,\mathrm{Re}(\alpha/\beta)],$$

$$n^- < [\mathrm{Re}(\varkappa/\beta) - \mathrm{Re}(\alpha/\beta)\,\mathrm{Re}(\varkappa/\alpha)]/[1-\mathrm{Re}(\beta/\alpha)\,\mathrm{Re}(\alpha/\beta)],$$

$\Longrightarrow \varkappa \operatorname{Im}\beta \operatorname{Im}(\overline{\alpha}\beta) > 0$, $\varkappa \operatorname{Im}\alpha \operatorname{Im}(\alpha\overline{\beta}) > 0 \Longrightarrow$ (21). Конечность числа решений системы (22) следует из конечности числа решений каждого из ее неравенств. $\square$

В заключение остановимся на частном случае, когда $r > 1$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{2,r}$. Здесь для выполнения неравенств (14) при $j = \overline{2,r}$ и условия (12) необходимо, чтобы числа $\operatorname{Re}\alpha$, $\operatorname{Re}\beta$, α_j, $\varkappa$ имели одинаковый знак. Для выполнения неравенства (14) при $j = 1$ необходимо добавить условие $\Big(\varkappa - \sum\limits_{j=2}^{r}\alpha_j\Big)\operatorname{Re}\alpha > 0 \Longrightarrow \Big|\sum\limits_{j=2}^{r}\alpha_j\Big| = \overline{1, |\varkappa| - 1}$. Тогда система $\operatorname{Re}(\alpha_1/\alpha) > 0$, $\operatorname{Re}(\alpha_1/\beta) > 0$ $\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} &n^+ + \operatorname{Re}(\beta/\alpha)n^- < \operatorname{Re}\left[\Big(\varkappa - \sum_{j=2}^{r}\alpha_j\Big)/\alpha\right], \\ &\operatorname{Re}(\alpha/\beta)n^+ + n^- < \operatorname{Re}\left[\Big(\varkappa - \sum_{j=2}^{r}\alpha_j\Big)/\beta\right] \end{aligned} \tag{23}$$

разрешима в целых неотрицательных числах (n^+, n^-). Число таких пар конечно.

Случай B. Пусть $r = 1$ и τ_1 не является нулем решения. На плоскости задача без граничных нулей решения исследовалась в работах [6], [7], [10]–[13] (в работе [12] — для автоморфных функций в случае нулевого рода фундаментальной области). Здесь по теореме 2 необходимым условием разрешимости будет уравнение (13).

Лемма 1. *Если* $\operatorname{Im}(\varkappa/\beta) \neq 0$, *то уравнение* (13) *имеет единственное решение*

$$n^+ = \varkappa \operatorname{Im}\beta/D, \quad n^- = -\varkappa \operatorname{Im}\alpha/D, \tag{24}$$

$D = \operatorname{Re}\alpha \operatorname{Im}\beta - \operatorname{Re}\beta \operatorname{Im}\alpha$, *тогда и только тогда, когда правые части в* (24) *— целые неотрицательные числа.*

Действительно, выделяя вещественную и мнимую части в (13), получим систему

$$n^+ \operatorname{Re}\alpha + n^- \operatorname{Re}\beta = \varkappa, \quad n^+ \operatorname{Im}\alpha + n^- \operatorname{Im}\beta = 0. \tag{25}$$

При $\operatorname{Im}(\varkappa/\beta) \neq 0$ и $D = 0$ система не имеет решения. При $D \neq 0$ и условиях теоремы имеем единственное решение (24).

Лемма 2. *Если* $\varkappa/\beta$ *— иррациональное число, то уравнение* (13) *разрешимо тогда и только тогда, когда показатель* α *имеет вид*

$$\alpha = (\varkappa - \beta p_1)/q_1, \quad q_1 \in \mathbb{N}, \quad p_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{26}$$

В этом случае уравнение (13) *имеет единственное решение* $n^+ = q_1$, $n^- = p_1$.

Действительно, поскольку здесь $n^+ \neq 0$, то $\alpha = (\varkappa - \beta n^-)/n^+ \Longrightarrow$ (26). Единственность следует из иррациональности β.

Лемма 3. *Если* $\varkappa/\beta = l/k \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, *то уравнение* (13) *имеет решение тогда и только тогда, когда* $\alpha/\beta = p/q$, $d(k, q) = k$, *и либо* $\alpha/\beta < 0$, *либо при* $\alpha/\beta > 0$ *отрезок* $[(1 - \widetilde{n}^+)/q, \widetilde{n}^-/p]$ *содержит целое число. Здесь* $(\widetilde{n}^+, \widetilde{n}^-)$ *— произвольное частное решение уравнения* (13) *в целых числах. Общее решение имеет вид*

$$n^+ = \widetilde{n}^+ + qu, \quad n^- = \widetilde{n}^- - pu \tag{27}$$

при любых целых u, *удовлетворяющих условиям*

$$u \in [(1 - \widetilde{n}^+)/q, \widetilde{n}^-/p] \qquad \text{при } p > 0, \tag{28}$$

$$u \geq \max\{(1 - \widetilde{n}^+)/q, \widetilde{n}^-/p\} \quad \text{при } p < 0. \tag{29}$$

Здесь $p, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $q, k \in \mathbb{N}$, $d(l, k) = 1$, $d(p, q) = 1$.

Действительно, для $\varkappa/\beta \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеем $n^+ \neq 0$ при $n^- \geq 0$, откуда следует рациональность α/β, т. е. $\alpha/\beta = p/q$. Из (13) получим

$$k(pn^+ + qn^-) = lq. \tag{30}$$

Известно ([14], с. 52), что критерием разрешимости (30) в целых числах является равенство $d(k,q) = k$. Пусть оно выполнено, а $(\tilde{n}^+, \tilde{n}^-)$ — частное решение уравнения (30). Тогда его общее решение в целых числах имеет вид (27) при любых $u \in \mathbb{Z}$. Требуя выполнения неравенств $n^+ \geq 1$, $n^- \geq 0$, получим (28), (29).

Заметим, что при $\alpha/\beta = p/q > 0$ и $d(k,q) = k$ необходимым условием разрешимости уравнения (13) для $n^+ \geq 1$, $n^- \geq 0$ является неравенство $\varkappa/\beta \geq p/q \iff |\varkappa| \geq |\alpha|$, а достаточным — $\varkappa/\beta \geq p$.

Лемма 4. *Если $\varkappa/\beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то уравнение* (13) *всегда разрешимо* ($n^+ = 0$, $n^- = \varkappa/\beta$). *Для существования других решений необходимо и достаточно, чтобы было справедливо $\alpha/\beta = p/q$ и либо $\alpha/\beta < 0$, либо при $\alpha/\beta > 0$ выполнялось неравенство $\varkappa/\beta p \geq 1$. Все решения имеют вид $n^+ = qu$, $n^- = \varkappa/\beta - pu$, $u = 0, 1, 2, \ldots$ при $p < 0$; $u = \overline{0, [\varkappa/\beta p]}$ при $p > 0$. Здесь $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; $d(p,q) = 1$, $[x]$ — целая часть x.*

Первая часть утверждения очевидна. Для нахождения других решений следует повторить предыдущие рассуждения, полагая в них $k = 1$, $\tilde{n}^+ = 0$, $\tilde{n}^- = \varkappa/\beta$.

3. Исследование условий разрешимости (17)

Имеет место

Теорема 5. *При $n^+ \geq 2$ условию* (17) *можно удовлетворить всегда, оставляя произвольными точки a_j, $j = \overline{3, n^+}$, b_j, $j = \overline{1, n^-}$, τ_j, $j = \overline{1, r}$.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из того, что взяв $a_j \in l_j \cup \{t_1\}$, $j = 1, 2$, можно представить суммой $a_1 + a_2$ любую точку из параллелограмма $T(\Pi)$, где $T(z) = z + t_1$, а за счет $\tilde{\omega} = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$ — любую точку плоскости. При этом целые числа n_1 и n_2 фиксируются. $\square$

При $n^+ = 0$ и $n^+ = 1$ получим критерий для функции $G(t)$, при котором существуют точки $a_1 \in \Pi \setminus \overline{D}^-$, $b_j \in D^-$, $j = \overline{1, n^-}$, $\tau_j \in L$, $j = \overline{1, r}$, удовлетворяющие условию (17). Считаем условия теоремы 2 выполненными. Обозначим $R_1 = |\beta/\alpha| n^- + \sum\limits_{j=1}^{r} |\alpha_j/\alpha|$.

Теорема 6. *Пусть $n^+ = 0$. Для выполнения равенства* (17) *необходимо и достаточно, чтобы точка γ была конгруэнтна точкам кольца*

$$2|\alpha|_{\max}/|\alpha| - R_1 \leq |z| \leq R_1, \tag{31}$$

причем равенство слева достигается только при $n^- = 0$, $r \leq 2$, а справа — при $n^- = 0$, $r = 1$. Здесь $|\alpha|_{\max} = \max\{|\alpha_j|\}$. Если левая часть неравенства (31) *отрицательна, то кольцо вырождается в круг.*

Доказательство. Пусть в условии (17) $n^- \neq 0$, $r \geq 0$ или $n^- = 0$, $r > 2$. Тогда при всех возможных значениях b_j, τ_j левая часть (17) покрывает внутренность кольца (31). Если $n^- = 0$, $r = 2$, то в (31) возможно слева равенство, а справа его не будет из-за того, что все точки τ_j различны. Если $n^- = 0$, $r = 1$, то получим окружность $|z| = |\varkappa/\alpha|$. Здесь левая и правая части в (31) совпадут. $\square$

Теорема 7. *Пусть $n^+ = 1$. Тогда при $R_1 > 1$, в частности, при $|\varkappa/\alpha - 1| > 1$ равенству* (17) *можно удовлетворить при любом γ. Для выполнения равенства* (17) *при $R_1 \leq 1$ необходимо и достаточно, чтобы точка γ была конгруэнтна точке области*

$$S = \Pi \setminus \{z : |z| \leq 1 - R_1\}.$$

Доказательство. При всех возможных значениях нулей решения $\Phi(z)$ левая часть в (17) при $n^+ = 1$ и $R_1 \leq 1$ покрывает без пропусков область S и точки в окрестности ∂R, конгруэнтные точкам области S. При $R_1 > 1$ левая часть в (17) покрывает полностью Π или, возможно, другой параллелограмм периодов. Так как в силу (9) $R_1 \geq |\sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_j + \beta n^-|/|\alpha| = |\varkappa/\alpha - 1|$, то $R_1 > 1$ при $|\varkappa/\alpha - 1| > 1$. В случае отсутствия граничных нулей из (13) имеем $R_1 = |\beta/\alpha| n^- = |\varkappa/\alpha - 1|$, $n^- = (\varkappa - \alpha)/\beta$, τ_1 — любая точка на окружности. $\square$

Замечания. 1°. То, что контур L является единичной окружностью, а не произвольным гладким замкнутым контуром, используется существенно в п. 3 для описания области расположения точки γ, а также для упрощения исследования поведения функций $\Phi^\pm(z)$ в окрестности граничных нулей.

2°. Из п. 2 следует, что в случае A число нулей функций $\Phi^\pm(z)$ в $D^\pm$ ограничено. Поэтому появление там бесконечного числа нулей решения в качестве предельного варианта невозможно. В случае B, т. е. отсутствия граничных нулей, неограниченное число нулей возможно в силу (13) только при $\alpha\beta < 0$. Но тогда при $n^+ \to \infty$, $n^- \to \infty$, во-первых, нули решения должны сгущаться к граничной точке, а значит, в ней решение будет иметь нуль, правда, неизолированный. Во-вторых, либо $G(t) = 0$ на L (при $\operatorname{Re}\alpha \neq 0$, $\operatorname{Re}\beta \neq 0$), либо $\arg G(t)$ становится неограниченным (при $\operatorname{Re}\alpha = \operatorname{Re}\beta = 0$). Отсюда можно сделать предположение, что функция $\Phi(z)$ имеет лишь конечное число нулей.

Пример. Исследуем задачу с краевым условием

$$[\Phi^+(t)]^{1+i} = 5t^{-3}[\Phi^-(t)]^{\sqrt{3}}, \tag{32}$$

периодами $\omega_1 = 2{,}1$; $\omega_2 = 4i$, вершиной $t_1 = -(\omega_1 + \omega_2)/2$. Здесь $\alpha = 1 + i$, $\beta = \sqrt{3}$, $\varkappa = 3$, $\gamma = 0$. Рассмотрим два различных случая.

Случай A. Система (22) имеет вид

$$2n^+ + \sqrt{3}n^- < 3, \quad n^+ + \sqrt{3}n^- < 3$$

$\Longrightarrow \Big\{n^+ = 0,\, n^- = 0,\, \delta = \sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_j = 3\Big\}$, $\{n^+ = 1,\, n^- = 0,\, \delta = 2 - i\}$, $\{n^+ = 0,\, n^- = 1,\, \delta = 3 - \sqrt{3}\}$. Ограничимся отысканием решений с одним граничным нулем и $r > 1$ граничными нулями, когда $\alpha_j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $j = \overline{2, r}$. Отсюда с учетом (23) получим семь возможных вариантов: 1) $n^+ = 0$, $n^- = 0$, $\alpha_1 = 3$; 2) $n^+ = 1$, $n^- = 0$, $\alpha_1 = 2-i$; 3) $n^+ = 0$, $n^- = 1$, $\alpha_1 = 3-\sqrt{3}$; 4) $n^+ = 0$, $n^- = 1$, $\alpha_1 = 2-\sqrt{3}$, $\alpha_2 = 1$; 5) $n^+ = 0$, $n^- = 0$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$; 6) $n^+ = 0$, $n^- = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$; 7) $n^+ = 0$, $n^- = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$. Рассмотрим условие (17). По теореме 6 в случае 1) задача не разрешима. В случае 2) по теореме 7 задача имеет решение. Найдем произвол в расположении его нулей. Условие (17) имеет вид $a_1 + (1-3i)\tau_1/2 = \widetilde{\omega}$. Отсюда определяется множество $L_\tau \subset L$ допустимых нулей $\tau_1 : \operatorname{arctg} 3 + \arg z_1 < \arg \tau_1 < \operatorname{arctg} 3 - \arg z_1 + \pi$; $\operatorname{arctg} 3 + \arg z_1 - \pi < \arg \tau_1 < \operatorname{arctg} 3 - \arg z_1$, где $z_1 = L_1 \cap L_2$, $\operatorname{Im} z_1 > 0$, $L_1 : |t| = \sqrt{10}/2$, $L_2 : |t - 2{,}1| = 1$. При $\tau_1 \in L_\tau$ и только тогда точка $a_1 \in D^+$ или a_1 конгруэнтна точке из D^+. При построении решения (18), (19) следует брать $\widetilde{\omega} = 0$.

В остальных случаях, где $n^+ = 0$, применим теорему 6. В случае 4) из (31) имеем неравенство

$$|z| < 3\sqrt{2}/2, \tag{33}$$

а из (17) — равенство

$$\sqrt{3}b_1 + (2 - \sqrt{3})\tau_1 + \tau_2 = \widetilde{\omega}(1 + i). \tag{34}$$

В круг (33) попадают три точки-периоды $\widetilde{\omega} = 0, \widetilde{\omega} = \pm\omega_1$. Каждая из них определяет решение. Условие (34) дает область $D_b^- \subset D^-$ произвольного расположения нуля b_1:

$D_b^- = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 - \sqrt{3}/3 \leq |z| < \sqrt{3} - 1\}$ при $\widetilde{\omega} = 0$;

$D_b^- = D_1 \cap D^-$ при $\widetilde{\omega} = \omega_1$; $D_b^- = D_2 \cap D^-$ при $\widetilde{\omega} = -\omega_1$, где

$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \omega_1(1+i)/\sqrt{3}| < \sqrt{3} - 1\}$, $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + \omega_1(1+i)/\sqrt{3}| < \sqrt{3} - 1\}$.
Каждому $b_1 \in D_b^-$ соответствуют из (34) две пары нулей τ_1 и τ_2. Случай 3) можно считать предельным для 4) при $\tau_1 = \tau_2$. Здесь $D_b^- = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \sqrt{3} - 1\}$ при $\widetilde{\omega} = 0$; $D_b^- = \partial D_1 \cap D^-$ при $\widetilde{\omega} = \omega_1$; $D_b^- = \partial D_2 \cap D^-$ при $\widetilde{\omega} = -\omega_1$. Здесь каждому $b_1 \in D_b^-$ соответствует единственный нуль τ_1 из условия $\sqrt{3}b_1 + (3 - \sqrt{3})\tau_1 = \widetilde{\omega}(1+i)$.

В случае 7) из (31) имеем (33), а из (17) — равенство

$$\sum_{j=1}^{3} \tau_j = \widetilde{\omega}(1+i). \tag{35}$$

При $\widetilde{\omega} = 0$ имеем нули τ_1, $\tau_1 \exp(2\pi i/3)$, $\tau_1 \exp(-2\pi i/3)$, где τ_1 — любая точка дуги $0 \le \arg \tau_1 < 2\pi/3$. При $\widetilde{\omega} = \omega_1$ рассмотрим треугольник $z_1 z_2 z_3$, где $z_1 = \omega_1(1+i)$, $z_2 = 0$, а $z_3 = \tau_1 + \tau_2$ — подвижная точка. При $\tau_1 = \tau_2$ обозначим острые углы при вершине z_j через φ_j, $j = 1, 2$. Очевидно, если $\tau_2 = \tau_3$, треугольник с вершинами z_1, z_2, τ_1 имеет при z_1 угол φ_2, а при z_2 — угол φ_1. Нули τ_j, $j = \overline{1,3}$, в силу (35) могут лежать только на дуге $L_3 = \{t \in \mathbb{C} \mid \pi/4 - \varphi_1 < \arg t < \pi/4 + \varphi_1\}$. Каждому $\tau_1 \in L_3$ соответствует одна пара различных τ_2 и τ_3. Однако и здесь не все эти тройки дают разные решения задачи (32), ибо среди них будут тройки, отличающиеся перестановкой нулей. Поэтому произвол в изменении τ_1 меньше: $\pi/4 - \varphi_2 < \arg \tau_1 < \pi/4 + \varphi_2$. При $\widetilde{\omega} = -\omega_1$ имеем соответственно нули с противоположными знаками.

В случае 5) из (31) получим неравенства

$$\sqrt{2}/2 < |z| < 3\sqrt{2}/2, \tag{36}$$

а из (17) — равенство $2\tau_1 + \tau_2 = \widetilde{\omega}(1+i)$. В кольцо (36) попадают две точки $\widetilde{\omega} = \pm\omega_1$. Рассматривая этот случай как предельный для 7) при двух совпадающих нулях, получим при $\widetilde{\omega} = \omega_1$ два нуля $(\tau_1, \tau_2) = (\exp i(\pi/4 - \varphi_2),\ \exp i(\pi/4 + \varphi_1))$ и $(\exp i(\pi/4 + \varphi_2),\ \exp i(\pi/4 - \varphi_1))$. При $\widetilde{\omega} = -\omega_1$ имеем еще два нуля с противоположными знаками. И, наконец, в случае 6) получим те же решения задачи (32), что и в 5), ибо здесь нули τ_1 и τ_2 меняются местами.

Случай В. Если $r = 1$, точка τ_1 не является нулем решения, то по лемме 2 задача не имеет решения.

Литература

1. Гахов Ф.Д. *О нелинейной краевой задаче с допустимыми нулями на контуре* // ДАН СССР. – 1973. – Т. 210. – № 6. – С. 1269–1272.
2. Толочко М.Э. *О нелинейной краевой задаче степенного типа для многосвязной области* // Научн. тр. Юбил. семин. по краев. задачам, посвящ. 75-летию со дня рожд. акад. АН БССР Ф.Д.Гахова. – Минск, 1985. – С. 192–194.
3. Аржанов Г.В. *О разрешимости однородной нелинейной краевой задачи степенного типа* // Изв. вузов. Математика. – 1978. – № 8. – С. 8–18.
4. Аржанов Г.В. *О разрешимости однородной нелинейной краевой задачи степенного типа.* II. – Рост. ун-т. – Ростов-на-Дону, 1986. – 15 с. – Деп. в ВИНИТИ 30.07.86, № 5556-В86.
5. Аксентьева Е.П. *К исследованию степенной краевой задачи Римана* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 4. – С. 3–10.
6. Кашевский В.В. *Обобщенная нелинейная краевая задача на торе.* – Ред. журн. “Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1”. – Минск, 1981. – 14 с. – Деп. в ВИНИТИ 28.05.81, № 2523-81.
7. Кашевский В.В. *Одна нелинейная краевая задача на римановой поверхности, гомеоморфной тору* // Изв. АН БССР. Сер. физ-матем. наук. – 1981. – № 6. – С. 50–54.
8. Ахиезер Н.И. *Элементы теории эллиптических функций.* – М.: Наука, 1970. – 304 с.
9. Аксентьева Е.П. *Функции Вейерштрасса в краевых задачах.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 42 с.

10. Гахов Ф.Д. *О нелинейной краевой задаче, обобщающей краевую задачу Римана* // ДАН СССР. – 1968. – Т. 181. – № 2. – С. 271–274.
11. Комяк И.И. *Нелинейная краевая задача типа задачи Римана с положительными показателями* // Изв. АН БССР. Сер. физ-матем. наук. – 1970. – № 6. – С. 83–87.
12. Рысюк Н.А. *Нелинейная краевая задача типа задачи Римана с действительными показателями в классе автоморфных функций* // Изв. АН БССР. Сер. физ-матем. наук. – 1973. – № 4. – С. 51–56.
13. Рысюк Н.А. *Нелинейная краевая задача типа задачи Римана с комплексными показателями.* – Ред. журн. "Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук". – Минск, 1974. – 7 с. – Деп. в ВИНИТИ 27.02.74, № 392-74.
14. Арнольд И.В. *Теория чисел.* – М.: Учпедгиз, 1939. – 288 с.

Казанский государственный университет

Поступила
15.02.1999