ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 3 (454)

УДК 519.642

Л.Б. ЕРМОЛАЕВА

ОБ ОДНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ

При вычислении интегралов и решении интегральных уравнений (см., напр., [1], [2] и библиографию в них) часто используется квадратурная формула

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \frac{\pi}{n} {\sum_{k=0}^{n}}' f(\tau_k) + R_n(f), \quad n \in N, \tag{1}$$

где $f(\tau) \in C[-1,1]$, $R_n(f)$ — остаточный член, штрих у знака суммы здесь и далее означает, что при $k=0$ и $k=n$ соответствующие ее слагаемые следует разделить на 2, узлы

$$\tau_k = \cos\theta_k, \quad \theta_k = \frac{k\pi}{n}, \quad k = \overline{0,n}, \quad n \in N, \tag{2}$$

— экстремальные точки многочленов Чебышева первого рода $T_n(\tau) = \cos n \arccos\tau$, $-1 \le \tau \le 1$, а N — множество всех натуральных чисел.

Ниже устанавливаются структурные и аппроксимативные свойства формулы (1) для функции $f(\tau)$ из различных классов.

Теорема 1. *Квадратурная формула* (1) *точна для любого многочлена степени не выше* $2n-1$. *Кроме того, она точна для многочленов Чебышева первого рода* $T_l(\tau) = \cos l \arccos\tau$ *степеней* $l = l(n)$, *удовлетворяющих условиям*

$$2nr + 1 \le l \le 2n(r+1) - 1, \quad n \in N, \tag{3}$$

где r *— произвольное натуральное число.*

Доказательство. Первую часть теоремы, как известно ([3], с. 117–118), достаточно доказать для многочленов Чебышева $T_l(t)$, $l = 0, 1, \dots, 2n-1$. При $l=0$ имеем

$$R_n(1) = \int_{-1}^{1} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} - \frac{\pi}{n} {\sum_{k=0}^{n}}' 1 = \pi - \pi = 0.$$

Пусть $1 \le l \le 2n-1$. Тогда, используя соотношения (1) и (2), легко находим

$$R_n(T_l) = \int_{-1}^{1} \frac{T_l(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} - \frac{\pi}{n} {\sum_{k=0}^{n}}' T_l(\tau_k) = 0 - \frac{\pi}{n} {\sum_{k=0}^{n}}' \cos l\theta_k = -\frac{\pi}{n} {\sum_{k=0}^{n}}' \cos k\theta_l =$$
$$= -\frac{\pi}{n}\Big[D_n(\theta_l) - \frac{1}{2}\cos n\theta_l\Big] = -\frac{\pi}{n}\Big[\frac{\sin(l\pi + \theta_l/2)}{2\sin(\theta_l/2)} - \frac{1}{2}\cos l\pi\Big] = 0,$$

где $D_n(\phi)$ — ядро Дирихле порядка n. В то же время легко показать, что

$$R_n(T_{2n}) = \int_{-1}^{1} \frac{T_{2n}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} - \frac{\pi}{n} {\sum_{k=0}^{n}}' T_{2n}(\tau_k) = 0 - \frac{\pi}{n} {\sum_{k=0}^{n}}' \cos 2k\pi = -1 \ne 0.$$

Таким образом, алгебраическая степень точности квадратурной формулы (1) равна $2n-1$.

Далее, для всех l, удовлетворяющих неравенствам (3), легко находим

$$R_n(T_l) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{T_l(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} - \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n}{}' T_l(\tau_k) = 0 - \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n}{}' \cos k\theta_l = -\frac{\pi}{n}\left[D_n(\theta_l) - \frac{1}{2}\cos l\pi\right] = 0.$$

Замечание. Утверждение, аналогичное второй части теоремы 1, справедливо также для квадратурной формулы Эрмита (напр., [2], [3]) с узлами $t_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi$, $k = \overline{1,n}$, являющейся формулой наивысшей алгебраической степени точности.

Теорема 2. *Если функция $f(t)$ имеет на $[-1,1]$ ограниченную производную порядка $2n$, то для остаточного члена квадратурной формулы* (1) *справедливо представление*

$$R_n(f) = -\frac{\pi}{2^{2n-1}}\frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!},$$

где η — некоторая точка из интервала $(-1,1)$.

Доказательство. Обозначим через $H(\tau)$ интерполяционный многочлен Эрмита, однозначно определяемый по условиям (напр., [2], [3])

$$H(\tau_k) = f(\tau_k), \quad k = \overline{0,n}; \qquad H'(\tau_k) = f'(\tau_k), \quad k = \overline{1,n-1}, \tag{4}$$

где узлы τ_k приведены в (2). Тогда в силу (2), (4) справедлива формула

$$r(\tau) \equiv f(\tau) - H(\tau) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\Omega(\tau), \quad -1 \le \xi \le 1,$$

где

$$\Omega(\tau) = (\tau-\tau_0)(\tau-\tau_1)^2\cdots(\tau-\tau_{n-1})^2(\tau-\tau_n) = (\tau^2-1)\frac{U_{n-1}^2(\tau)}{2^{2n-2}} = -\frac{1}{2^{2n-2}}\sin^2 n\arccos\tau,$$

а $U_m(\tau) = (1-\tau^2)^{-1/2}\sin(m+1)\arccos\tau$ — многочлены Чебышева второго рода степени m. Поэтому

$$r(\tau) = -\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\frac{1}{2^{2n-2}}\sin^2 n\arccos\tau = -\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\frac{1-\tau^2}{2^{2n-2}}U_{n-1}^2(\tau), \quad -1 \le \tau \le 1. \tag{5}$$

Степень многочлена $H(\tau)$ равна $2n-1$, поэтому в силу теоремы 1 и условий (4) имеем

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{H(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n}{}' H(\tau_k) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n}{}' f(\tau_k).$$

Отсюда в силу (1) и (5) последовательно находим

$$R_n(f) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(\tau)-H(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau = \int\limits_{-1}^{1} \frac{r(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = -\int\limits_{-1}^{1} \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\frac{1}{2^{2n-2}}\frac{\sin^2 n\arccos\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau =$$

$$= -\frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!\,2^{2n-2}}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sin^2 n\arccos\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau = -\frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!\,2^{2n-2}}\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2 n\theta d\theta = -\frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!\,2^{2n-2}}\frac{\pi}{2}.$$

Теорема 3. *Квадратурная формула* (1) *сходится для любой функции $f(\tau)$, интегрируемой по Риману на $[-1,1]$. Если же $f(\tau) \in C[-1,1]$, то скорость сходимости может быть определена неравенством*

$$|R_n(f)| \le 2\pi E_{2n-1}(f), \quad n \in N, \tag{6}$$

где $E_{2n-1}(f)$ — наилучшее равномерное приближение функции $f(\tau)$ алгебраическими многочленами степени не выше $2n-1$.

Доказательство. Первая часть теоремы очевидна в силу того, что квадратурная сумма в (1) является одной из интегральных сумм Римана для интеграла из (1).

Пусть $Q(\tau)$ — произвольный алгебраический многочлен степени не выше $2n-1$. Тогда из теоремы 1 и формулы (1) для любой функции $f \in C[-1,1]$ находим

$$|R_n(f)| \le \left| \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(\tau)-Q(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau \right| + \frac{\pi}{n} \left| {\sum_{k=0}^{n}}' [Q(\tau_k) - f(\tau_k)] \right| \le$$
$$\le \pi \max_{-1\le\tau\le1} |f(\tau)-Q(\tau)| + \pi \max_{0\le k\le n} |Q(\tau_k) - f(\tau_k)| \le 2\pi \|f-Q\|,$$

где $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $C[-1,1]$. Отсюда ввиду произвольности многочлена $Q(\tau)$ следует оценка (6).

Отметим, что теорема 3 и прямые теоремы теории приближения функций (напр., [4], [5]) позволяют установить скорость сходимости и эффективные оценки погрешности квадратурной формулы (1) в зависимости от структурных свойств функции $f(\tau) \in C[-1,1]$.

Приведенные выше утверждения дополняются следующими двумя теоремами.

Теорема 4. *Если функция $f(\tau)$ имеет на $[-1,1]$ вторую ограниченную производную, то для остаточного члена квадратурной формулы (1) справедливо представление*

$$R_n(f) = \frac{\pi^3}{12n^2}\{\overline{\tau} f'(\overline{\tau}) + (\overline{\tau}^2 - 1) f''(\overline{\tau})\}, \quad n \in N, \tag{7}$$

где $\overline{\tau}$ — некоторая точка из интервала $(-1,1)$.

Доказательство. Полагая

$$\tau = \cos\theta, \quad -1 \le \tau \le 1, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad \widetilde{f}(\theta) = f(\cos\theta), \tag{8}$$

из (1) и (2) находим формулу

$$\int\limits_{0}^{\pi} \widetilde{f}(\theta) d\theta = \frac{\pi}{n} {\sum_{k=0}^{n}}' \widetilde{f}(\theta_k) + R_n(\widetilde{f}), \quad n \in N, \tag{9}$$

являющуюся квадратурной формулой трапеций с узлами $\theta_k = k\pi/n$ $(k = \overline{0,n})$ для функции $\widetilde{f}(\theta) \in C[0,\pi]$. В силу (1), (2), (7) и (8) имеем $R_n(f) = R_n(\widetilde{f})$. Ясно, что функция $\widetilde{f}(\theta)$ имеет вторую ограниченную производную в $[0,\pi]$ и в силу (8)

$$\widetilde{f}''(\theta) = (1-\tau^2) f''(\tau) - \tau f'(\tau). \tag{10}$$

Поэтому (напр., [3], с. 101) для квадратурной формулы (9) имеем

$$R_n(\widetilde{f}) = -\frac{\pi^3}{12n^2} \widetilde{f}''(\overline{\theta}), \tag{11}$$

где $\overline{\theta}$ — некоторая точка из интервала $(0,\pi)$. Очевидно, $\cos\overline{\theta} = \overline{\tau}$, $\overline{\tau} \in (-1,1)$. Тогда из соотношений (8)–(11) следует (7).

Теорема 5. *Если существует $f^{(r)}(\tau) \in C[-1,1]$ $(r = 0$ и 1; $f^{(0)} = f)$, то для остаточного члена квадратурной формулы (1) справедливы оценки*

$$|R_n(f)| \le \pi \left(\frac{\pi}{4n}\right)^r \omega\left(\frac{d^r \widetilde{f}(\theta)}{d\theta^r}; \frac{\pi}{n}\right), \quad n \in N, \tag{12}$$

где $\omega(\phi;\delta)$ — модуль непрерывности функции $\phi(\theta) \in C[0,\pi]$ с шагом $\delta \in (0,\pi]$.

Доказательство. Для функции $\widetilde{f}(\theta) \in C[0,\pi]$ обозначим через $S_n^1(\widetilde{f};\theta)$ интерполяционный сплайн первой степени по узлам $\theta_k = k\pi/n$ $(k=\overline{0,n})$. Известно, что

$$S_n^1(\widetilde{f};\theta) = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{f}(\theta_k) s_k(\theta),$$

где $s_k(\theta) = s_{k,n}(\theta)$, $k=\overline{0,n}$, — фундаментальные сплайны, определяемые формулами

$$s_{0,n}(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\theta_1-\theta}{\theta_1-\theta_0}, & \theta_0 \le \theta \le \theta_1, \\ 0, & \theta \ge \theta_1; \end{cases}$$

$$s_{n,n}(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \le \theta_{n-1}, \\ \dfrac{\theta-\theta_{n-1}}{\theta_n-\theta_{n-1}}, & \theta_{n-1} \le \theta \le \theta_n; \end{cases}$$

$$s_{k,n}(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\theta-\theta_{k-1}}{\theta_k-\theta_{k-1}}, & \theta_{k-1} \le \theta \le \theta_k, \\ \dfrac{\theta_{k+1}-\theta}{\theta_{k+1}-\theta_k}, & \theta_k \le \theta \le \theta_{k+1}, \\ 0, & \theta \notin [\theta_{k-1},\theta_{k+1}] \end{cases} \qquad (k=\overline{1,n-1}).$$

Тогда легко находим

$$\int_0^\pi \widetilde{f}(\theta)d\theta = \int_0^\pi S_n^1(\widetilde{f};\theta)d\theta + Q_n(\widetilde{f}) = \frac{\pi}{n}{\sum_{k=0}^{n}}' \widetilde{f}(\theta_k) + Q_n(\widetilde{f}), \quad n \in N, \tag{13}$$

где $Q_n(\widetilde{f})$ — соответствующий остаточный член. Из формул (1), (2), (8), (9), (13) находим

$$R_n(f) = R_n(\widetilde{f}) = Q_n(\widetilde{f}) = \int_0^\pi [\widetilde{f}(\theta) - S_n^1(\widetilde{f};\theta)]d\theta. \tag{14}$$

Поскольку $f^{(r)} \in C[-1,1]$, то $\widetilde{f}^{(r)}(\theta) \in C[0,\pi]$. Поэтому (напр., [5]) равномерно относительно $\theta \in [0,\pi]$ имеем

$$|\widetilde{f}(\theta) - S_n^1(\widetilde{f};\theta)| \le \left(\frac{\pi}{4n}\right)^r \omega\left(\frac{d^r\widetilde{f}(\theta)}{d\theta^r};\frac{\pi}{n}\right), \quad n \in N,$$

где $r=0$ и 1. Отсюда и из (14) следует неравенство (12).

Литература

1. Васильев Н.И., Клоков Ю.А., Шкерстена А.Я. *Применение полиномов Чебышева в численном анализе.* – Рига: Изд-во “Зинатне”, 1984. – 240 с.
2. Крылов В.И., Шульгина Л.Т. *Справочная книга по численному интегрированию.* – М.: Наука, 1966. – 371 с.
3. Бахвалов Н.С. *Численные методы. Анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М.: Наука, 1973. – 631 с.
4. Тиман А.Ф. *Теория приближения функций действительного переменного.* – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
5. Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения.* – М.: Наука, 1987. – 423 с.

Казанская государственная
архитектурно-строительная
академия

Поступила
11.04.1997