ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 12 (535)

УДК 519.854

Е.Е. ГУРЕВСКИЙ, В.А. ЕМЕЛИЧЕВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ БУЛЕВОЙ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ АБСОЛЮТНЫХ УКЛОНЕНИЙ ОТ НУЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Изучению различных аспектов устойчивости скалярных и векторных задач дискретной оптимизации посвящен ряд публикаций (напр., [1]–[9]). Данная работа продолжает начатые в [7], [8], [10]–[12] исследования устойчивости векторных задач с различными видами частных критериев и принципов оптимальности.

Здесь для многокритериальной булевой задачи с паретовским принципом оптимальности и частными критериями, являющимися модулями линейных функций, получены нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости при возмущении параметров векторного критерия в пространстве с метрикой l_∞. Показано, что нижняя оценка является достижимой.

Рассмотрим векторную (m-критериальную) задачу булева программирования

$$Z^m(A,b) : \min\{f(x,A,b) : x \in X\},$$

где $f(x,A,b) = (|A_1x+b_1|, |A_2x+b_2|, \dots, |A_mx+b_m|)$, $X \subseteq \mathbf{E}^n = \{0,1\}^n$, $n \geq 2$, $|X| \geq 2$, A_i — i-я строка матрицы $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $m \geq 1$, $i \in N_m = \{1,2,\dots,m\}$, $b = (b_1,b_2,\dots,b_m)^T \in \mathbf{R}^m$, $x = (x_1,x_2,\dots,x_n)^T$.

Задачу $Z^m(A,b)$ будем понимать как задачу поиска множества эффективных решений (множества Парето)

$$P^m(A,b) = \{x \in X : \pi(x,A,b) = \emptyset\},$$

где $\pi(x,A,b) = \{x' \in X : f(x,A,b) \geq f(x',A,b) \ \&\ f(x,A,b) \neq f(x',A,b)\}$.

В силу неравенств $1 < |X| < \infty$ множество $P^m(A,b) \neq \emptyset$ при любых $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ и $b \in \mathbf{R}^m$.

Отметим, что векторная функция $f(x,A,b)$ характеризует меру несовместности (уклонений) системы линейных булевых уравнений

$$Ax + b = \mathbf{0}^{(m)}, \quad x \in X, \tag{1}$$

где $\mathbf{0}^{(m)} = (0,0,\dots,0)^T \in \mathbf{R}^m$.

Тем самым минимизация функций $|A_ix+b_i|$, $i \in N_m$, на множестве X равносильна минимизации абсолютных уклонений от нуля линейных функций A_ix+b_i. Поэтому задача $Z^m(A,b)$ является задачей отыскания множества всех решений системы (1) при условии, что эта система совместна. В противном случае множество Парето $P^m(A,b)$ можно считать множеством квазирешений системы (1). Нетрудно видеть, что система уравнений (1) совместна тогда и только тогда, когда множество эффективных векторных оценок $f(P^m(A,b)) = \{y \in \mathbf{R}^m : y = f(x,A,b),\ x \in P^m(A,b)\}$ состоит лишь из нулевого вектора $\mathbf{0}^{(m)}$.

Будем исследовать устойчивость множества $P^m(A,b)$, возмущая параметры векторной функции $f(x,A,b)$ путем прибавления к паре (A,b) возмущающих пар. Для этого в пространстве

Работа выполнена при финансовой поддержке Межвузовской программы “Фундаментальные и прикладные исследования” Республики Беларусь, грант № 492/28.

$\mathbf{R}^k$ произвольной размерности $k \in \mathbf{N}$ зададим две метрики l_1 и l_∞, т. е. под нормами вектора $z = (z_1, z_2, \ldots, z_k) \in \mathbf{R}^k$ будем понимать соответственно числа

$$\|z\|_1 = \sum_{j \in N_k} |z_j|, \quad \|z\|_\infty = \max_{j \in N_k} |z_j|,$$

а под нормой матрицы — норму вектора, составленного из ее элементов.

Для любого числа $\varepsilon > 0$ введем множество возмущающих пар

$$\Omega(\varepsilon) = \{(A', b') \in \mathbf{R}^{m \times (n+1)} : \max\{\|A'\|_\infty, \|b'\|_\infty\} < \varepsilon\}.$$

Задачу $Z^m(A + A', b + b')$, где $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$, будем называть возмущенной.

Следуя [1], [2], [4], [7], [13], под устойчивостью задачи $Z^m(A, b)$ будем понимать свойство непоявления новых эффективных решений при "малых" независимых возмущениях элементов матрицы A и вектора b. Тем самым задача $Z^m(A, b)$ устойчива тогда и только тогда, когда множество

$$\Xi = \{\varepsilon > 0 : \forall (A', b') \in \Omega(\varepsilon) \ (P^m(A + A', b + b') \subseteq P^m(A, b))\} \neq \emptyset.$$

Отметим, что устойчивость задачи является дискретным аналогом свойства полунепрерывности сверху по Хаусдорфу в точке (A, b) многозначного отображения $P^m : \mathbf{R}^{m \times (n+1)} \to 2^X$, т. е. точечно-множественного отображения, которое каждому набору параметров задачи (паре (A, b)) ставит в соответствие множество Парето $P^m(A, b)$.

В связи с вышеизложенным, радиусом устойчивости задачи $Z^m(A, b)$ назовем число

$$\rho^m(A, b) = \begin{cases} \sup \Xi, & \text{если } \Xi \neq \emptyset; \\ 0, & \text{если } \Xi = \emptyset. \end{cases}$$

Очевидно, что при выполнении равенства $P^m(A, b) = X$ радиус устойчивости задачи $Z^m(A, b)$ равен бесконечности. Поэтому в дальнейшем этот случай будем исключать из рассмотрения, а задачу $Z^m(A, b)$, для которой множество $\overline{P}^m(A, b) := X \setminus P^m(A, b) \neq \emptyset$, будем называть нетривиальной.

Для $x, x' \in X$, $i \in N_m$ и $z \in \mathbf{R}$ введем обозначения

$$\alpha_i(x, x') = \min\{\beta_i(x, x', s) : s \in \{-1; 1\}\},$$
$$\beta_i(x, x', s) = \frac{|A_i(x + sx') + b_i(s + 1)|}{\|x + sx'\|_1 + s + 1},$$
$$\operatorname{sg} z = \begin{cases} 1, & \text{если } z \geq 0; \\ -1, & \text{если } z < 0. \end{cases}$$

Будем также пользоваться очевидной импликацией

$$\exists s \in \{-1; 1\} \ (sz > \pm z') \Rightarrow |z| > |z'|, \tag{2}$$

которая выполняется для любых чисел $z, z' \in \mathbf{R}$.

Далее будем использовать обозначение $\varphi^m(A, b) = \min\limits_{x \in \overline{P}^m(A,b)} \max\limits_{x' \in \pi(x,A,b)} \min\limits_{i \in N_m} \alpha_i(x, x')$.

Теорема. *Для радиуса устойчивости $\rho^m(A, b)$ векторной нетривиальной задачи $Z^m(A, b)$, $m \geq 1$, справедливы оценки*

$$\varphi^m(A, b) \leq \rho^m(A, b) \leq \max\{\|A\|_\infty, \|b\|_\infty\},$$

причем $\rho^m(A, b) = \varphi^m(A, b)$, если $|P^m(A, b)| = 1$.

Доказательство. Легко видеть, что $\varphi := \varphi^m(A,b) \geq 0$. Сначала докажем неравенство $\rho^m(A,b) \geq \varphi$. Не уменьшая общности, считаем, что $\varphi > 0$ (в противном случае неравенство $\rho^m(A,b) \geq \varphi$ очевидно). Пусть $(A',b') \in \Omega(\varphi)$. Тогда в соответствии с определением числа φ для любого решения $x \in \overline{P}^m(A,b)$ существует такое решение $x^* \in \pi(x,A,b)$, что

$$\max\{\|A'\|_\infty, \|b'\|_\infty\} < \varphi \leq \alpha_i(x,x^*), \quad i \in N_m. \tag{3}$$

Учитывая неравенство $\alpha_i(x,x^*) > 0$, легко получим $|A_ix + b_i| > |A_ix^* + b_i|$. Отсюда, полагая $\sigma_i = \mathrm{sg}(A_ix + b_i)$, убеждаемся в справедливости равенств

$$A_i(\sigma_i x + sx^*) + b_i(\sigma_i + s) = |A_i(x + \sigma_i sx^*) + (1 + \sigma_i s)b_i|, \quad s \in \{-1;1\}.$$

Поэтому, используя (3) и определение числа $\alpha_i(x,x^*)$, выводим

$$\begin{gathered}\sigma_i((A_i + A'_i)x + (b_i + b'_i)) + s((A_i + A'_i)x^* + (b_i + b'_i)) = |A_i(x + \sigma_i sx^*) + (1 + \sigma_i s)b_i| + \\ +\sigma_i(A'_i(x+\sigma_i sx^*)+b'_i(1+\sigma_i s)) \geq |A_i(x+\sigma_i sx^*)+(1+\sigma_i s)b_i| - (\|A'\|_\infty\|x+\sigma_i sx^*\|_1+\|b'\|_\infty|1+\sigma_i s|) \geq \\ \geq |A_i(x + \sigma_i sx^*) + (1 + \sigma_i s)b_i| - \max(\|A'\|_\infty, \|b'\|_\infty)(\|x + \sigma_i sx^*\|_1 + |1 + \sigma_i s|) > \\ > |A_i(x + \sigma_i sx^*) + (1 + \sigma_i s)b_i| - \alpha_i(x,x^*)(\|x + \sigma_i sx^*\|_1 + |1 + \sigma_i s|) \geq \\ \geq |A_i(x + \sigma_i sx^*) + (1 + \sigma_i s)b_i| - \beta_i(x,x^*,\sigma_i s)(\|x + \sigma_i sx^*\|_1 + |1 + \sigma_i s|) = 0.\end{gathered}$$

Таким образом, находим

$$\sigma_i((A_i + A'_i)x + (b_i + b'_i)) > s((A_i + A'_i)x^* + (b_i + b'_i)), \quad s \in \{-1;1\}, \quad i \in N_m.$$

Отсюда, вследствие указанной выше импликации (2), получаем $|(A_i + A'_i)x + (b_i + b'_i)| > |(A_i + A'_i)x^* + (b_i + b'_i)|$, $i \in N_m$, что влечет $x^* \in \pi(x, A + A', b + b')$. Поэтому $x \in \overline{P}^m(A + A', b + b')$.

Итак, доказано, что $\forall (A',b') \in \Omega(\varphi), \forall x \in \overline{P}^m(A,b) \ (x \in \overline{P}^m(A+A',b+b'))$, т. е. $\forall (A',b') \in \Omega(\varphi)$ $(P^m(A + A', b + b') \subseteq P^m(A,b))$. Следовательно, верна оценка $\rho^m(A,b) \geq \varphi$.

Далее, если в качестве возмущающей пары (A',b') взять пару $(-A,-b)$, то с учетом нетривиальности задачи получим $P^m(A + A', b + b') = X \not\subseteq P^m(A,b)$. Это и означает справедливость верхней оценки $\rho^m(A,b) \leq \max\{\|A\|_\infty, \|b\|_\infty\}$.

Наконец, в случае, когда $P^m(A,b) = \{x^0\}$, докажем равенство $\rho^m(A,b) = \varphi^m(A,b)$. Тогда

$$\varphi^m(A,b) = \min_{x' \in X \setminus \{x^0\}} \min_{i \in N_m} \alpha_i(x^0, x'). \tag{4}$$

Поэтому с учетом ранее доказанного неравенства $\rho^m(A,b) \geq \varphi$ для завершения доказательства теоремы осталось показать, что $\rho^m(A,b) \leq \xi$, где ξ — правая часть равенства (4). Для этого докажем, что для любого числа $\varepsilon > \xi$ верна формула

$$\exists\, (A',b') \in \Omega(\varepsilon), \quad \exists\, \widetilde{x} \in X \setminus \{x^0\} \ \ (\widetilde{x} \in P^m(A + A', b + b')).$$

Согласно определению числа $\xi \geq 0$ найдутся такие $x^* \in X \setminus \{x^0\}$ и $k \in N_m$, что

$$\alpha_k(x^0, x^*) = \xi. \tag{5}$$

Далее будем использовать обозначения

$$N(x^0, x^*) = |\{j \in N_n : x^0_j = 1 \ \& \ x^*_j = 0\}|,$$
$$\sigma^0 = \mathrm{sg}(A_k x^0 + b_k), \quad \sigma^* = \mathrm{sg}(A_k x^* + b_k).$$

Легко видеть, что хотя бы одно из чисел $N(x^0, x^*)$ или $N(x^*, x^0)$ положительно и

$$\max\{N(x^*, x^0),\, N(x^0, x^*)\} \leq \|x^0 + x^*\|_1, \tag{6}$$
$$N(x^*, x^0) + N(x^0, x^*) = \|x^0 - x^*\|_1. \tag{7}$$

Для построения необходимой пары $(A',b') \in \Omega(\varepsilon)$, $\varepsilon > \xi$, рассмотрим три возможных случая.

Случай 1. $\beta_k(x^0,x^*,-1) < \beta_k(x^0,x^*,1)$. Тогда

$$0 < \beta_k(x^0,x^*,1) \le \frac{|A_k x^0 + b_k| + |A_k x^* + b_k|}{\|x^0 + x^*\|_1 + 2} \tag{8}$$

и согласно (5) существует такое число $\delta < \varepsilon$, что

$$0 \le \beta_k(x^0,x^*,-1) = \xi < \delta < \beta_k(x^0,x^*,1). \tag{9}$$

Отсюда, задавая элементы возмущающей пары (A',b') по правилам

$$a'_{ij} = \begin{cases} \sigma^0\delta, & \text{если } i=k,\ x^0_j = 1,\ x^*_j = 0; \\ -\sigma^*\delta, & \text{если } i=k,\ x^0_j = 0,\ x^*_j = 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{10}$$

$$b' = \mathbf{0}^{(m)}$$

и учитывая (7), имеем $\max\{\|A'\|_\infty, \|b'\|_\infty\} = \delta < \varepsilon$,

$$\sigma^0((A_k + A'_k)x^0 + (b_k + b'_k)) - \sigma^*((A_k + A'_k)x^* + (b_k + b'_k)) = |A_k x^0 + b_k| - |A_k x^* + b_k| +$$
$$+ \delta(N(x^0,x^*) + N(x^*,x^0)) \ge -|A_k(x^* - x^0)| + \delta\|x^* - x^0\|_1 >$$
$$> -|A_k(x^* - x^0)| + \beta_k(x^0,x^*,-1)\|x^* - x^0\|_1 = 0, \tag{11}$$

$$\sigma^0((A_k + A'_k)x^0 + (b_k + b'_k)) + \sigma^*((A_k + A'_k)x^* + (b_k + b'_k)) =$$
$$= |A_k x^0 + b_k| + |A_k x^* + b_k| + \delta(N(x^0,x^*) - N(x^*,x^0)). \tag{12}$$

Правую часть последнего равенства обозначим ψ. Если $N(x^*,x^0) = 0$, то ввиду (8) $\psi > 0$. Если $N(x^*,x^0) > 0$, то благодаря (6), (8) и (9) выводим $\delta N(x^*,x^0) < |A_k x^0 + b_k| + |A_k x^* + b_k|$. Поэтому получаем $\psi > \delta N(x^0,x^*) \ge 0$. Итак, $\psi > 0$, и потому $\sigma^0((A_k + A'_k)x^0 + (b_k + b'_k)) > s\sigma^*((A_k + A'_k)x^* + (b_k + b'_k))$, $s \in \{-1;1\}$, откуда, используя (2), находим

$$|(A_k + A'_k)x^0 + (b_k + b'_k)| > |(A_k + A'_k)x^* + (b_k + b'_k)|. \tag{13}$$

Случай 2. $\beta_k(x^0,x^*,-1) > \beta_k(x^0,x^*,1)$. Тогда согласно (5) найдется такое число $\delta < \varepsilon$, что справедливы неравенства $0 \le \beta_k(x^0,x^*,1) = \xi < \delta < \beta_k(x^0,x^*,-1)$. Отсюда, определяя элементы пары (A',b') по формулам

$$a'_{ij} = \begin{cases} -\sigma^*\delta, & \text{если } i=k,\ j \in N_n; \\ 0, & \text{если } i \in N_m \setminus \{k\},\ j \in N_n, \end{cases}$$

$$b'_i = \begin{cases} -\sigma^*\delta, & \text{если } i=k; \\ 0, & \text{если } i \in N_m \setminus \{k\}, \end{cases}$$

выводим

$$\max\{\|A'\|_\infty, \|b'\|_\infty\} = \delta < \varepsilon,$$
$$-\sigma^*((A_k + A'_k)x^0 + (b_k + b'_k)) - \sigma^*((A_k + A'_k)x^* + (b_k + b'_k)) = -\sigma^*(A_k(x^0 + x^*) + 2b_k) +$$
$$+\delta(\|x^0\|_1 + \|x^*\|_1 + 2) > -|A_k(x^0 + x^*) + 2b_k| + \beta_k(x^0,x^*,1)(\|x^0 + x^*\|_1 + 2) = 0,$$
$$-\sigma^*((A_k + A'_k)x^0 + (b_k + b'_k)) + \sigma^*((A_k + A'_k)x^* + (b_k + b'_k)) = \sigma^* A_k(x^* - x^0) - \delta(\|x^*\|_1 - \|x^0\|_1) =$$
$$= |A_k(x^* - x^0)| - \delta(\|x^*\|_1 - \|x^0\|_1) > |A_k(x^* - x^0)| - \beta_k(x^0,x^*,-1)\|x^* - x^0\|_1 = 0.$$

Поэтому имеют место неравенства $-\sigma^*((A_k + A'_k)x^0 + (b_k + b'_k)) > s\sigma^*((A_k + A'_k)x^* + (b_k + b'_k))$, $s \in \{-1;1\}$, откуда ввиду (2) получаем неравенство (13).

Случай 3. $\beta_k := \beta_k(x^0, x^*, -1) = \beta_k(x^0, x^*, 1) = \alpha_k(x^0, x^*)$. Тогда

$$\beta_k \leq \frac{|A_k x^0 + b_k| + |A_k x^* + b_k|}{\|x^0 + x^*\|_1 + 2}. \tag{14}$$

Рассмотрим два возможных варианта. Пусть сначала $\beta_k = 0$. Тогда очевидны равенства

$$A_k x^0 + b_k = A_k x^* + b_k = 0. \tag{15}$$

Если $N(x^0, x^*) > 0$, то, полагая элементы возмущающей пары (A', b') по формулам

$$a'_{ij} = \begin{cases} \delta, & \text{если } i = k,\ x^0_j = 1,\ x^*_j = 0; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$b' = \mathbf{0}^{(m)},$$

где $0 = \xi < \delta < \varepsilon$, убеждаемся, что $\max\{\|A'\|_\infty, \|b'\|_\infty\} = \delta$, и согласно (15) верно неравенство (13).

Если же $N(x^0, x^*) = 0$, то $N(x^*, x^0) > 0$, т. е. существует такой индекс $p \in N_n$, что $x^*_p = 1$, $x^0_p = 0$. Тогда, задавая элементы пары (A', b') формулами

$$a'_{ij} = \begin{cases} -\delta/2, & \text{если } (i, j) = (k, p); \\ 0, & \text{если } (i, j) \neq (k, p), \end{cases}$$

$$b'_i = \begin{cases} \delta, & \text{если } i = k; \\ 0, & \text{если } i \in N_m \setminus \{k\}, \end{cases}$$

$$0 \leq \xi < \delta < \varepsilon,$$

вновь убеждаемся (ввиду (15)) в справедливости (13), причем $\max\{\|A'\|_\infty, \|b'\|_\infty\} = \delta$.

Пусть теперь $\beta_k > 0$. Тогда, полагая

$$\beta_k = \xi < \delta < \varepsilon, \tag{16}$$

построим возмущающую пару (A', b') по формулам (10). Значит, $\max\{\|A'\|_\infty, \|b'\|_\infty\} = \delta$ и верны соотношения (11) и (12). Как и в случае 1, покажем, что $\psi > 0$. Если $N(x^*, x^0) = 0$, то согласно (14) $\psi > 0$. Если $N(x^*, x^0) > 0$, то, учитывая (6) и (14), на число δ можно дополнительно к условию (16) наложить требование $\delta N(x^*, x^0) < |A_k x^0 + b_k| + |A_k x^* + b_k|$. Поэтому (см. случай 1) $\psi > \delta N(x^0, x^*) \geq 0$. Следовательно, и в этом случае справедливо неравенство (13).

Итак, в трех изученных случаях построена такая возмущающая пара $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$, что справедливо неравенство (13). Оно свидетельствует о том, что решение $x^0 \in P^m(A + A', b + b')$ не может быть единственным решением возмущенной задачи $Z^m(A + A', b + b')$.

Резюмируя, заключаем, что для любого числа $\varepsilon > \xi$ существует такая возмущающая пара $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$, что $P^m(A + A', b + b') \nsubseteq P^m(A, b)$. Следовательно, $\rho^m(A, b) \leq \xi$. $\square$

Теорема свидетельствует о том, что нижняя оценка $\varphi^m(A, b)$ радиуса устойчивости является достижимой, т. е. точной.

Следствие 1. Если нетривиальная задача $Z^m(A, b)$ не является устойчивой, то $\varphi^m(A, b) = 0$.

Введем множество Слейтера, т. е. множество слабо эффективных решений задачи $Z^m(A, b)$:

$$x \in Sl^m(A, b) \;\Leftrightarrow\; \{x' \in X \setminus \{x\} : f_i(x, A_i, b_i) > f_i(x', A_i, b_i),\ i \in N_m\} = \emptyset.$$

Очевидно, что включение $P^m(A, b) \subseteq Sl^m(A, b)$ справедливо при любых $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$.

Легко видеть, что из следствия 1 вытекает

Следствие 2. Если $P^m(A, b) = Sl^m(A, b)$, то нетривиальная задача $Z^m(A, b)$ устойчива.

Поскольку $P^1(A, b) = Sl^1(A, b)$, то следствие 2 влечет

Следствие 3. Скалярная (однокритериальная) нетривиальная задача $Z^1(A, b)$ устойчива при любых $A \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}$.

В заключение отметим, что в работе [14] исследована связь между множествами Парето векторных задач линейного программирования и целочисленного линейного программирования.

Литература

1. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. *Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач.* – Киев: Наук. думка, 1995. – 169 с.
2. Сергиенко И.В., Шило В.П. *Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования.* – Киев: Наук. думка, 2003. – 261 с.
3. Сотсков Ю.Н., Сотскова Н.Ю. *Теория расписаний. Системы с неопределенными числовыми параметрами.* – Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2004. – 290 с.
4. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко И.В. *Исследование устойчивости задач дискретной оптимизации* // Кибернетика и системный анализ. – 1993. – № 3. – С. 78–93.
5. Sotskov Yu.N., Leontev V.K., Gordeev E.N. *Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization* // Discrete Appl. Math. – 1995. – V. 58. – № 2. – P. 169–190.
6. Greenberg H.J. *An annotated bibliography for post-solution analysis in mixed integer and combinatorial optimization* // Advances in Computational and Stochastic Optimization, Logic Programming and Heuristic Search. – Boston, MA: Kluwer Academic Publishers. – 1998. – P. 97–148.
7. Emelichev V.A., Girlich E., Nikulin Yu.V., Podkopaev D.P. *Stability and regularization of vector problems of integer linear programming* // Optimization. – 2002. – V. 51. – № 4. – P. 645–676.
8. Бухтояров С.Е., Емеличев В.А., Степанишина Ю.В. *Вопросы устойчивости векторных дискретных задач с параметрическим принципом оптимальности* // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – № 4. – С. 155–166.
9. Сотсков Ю.Н. *Исследование устойчивости оптимальных расписаний* // Информатика. – 2004. – № 4. – С. 65–75.
10. Емеличев В.А., Кричко В.Н. *Формула радиуса устойчивости векторной l_∞-экстремальной траекторной задачи* // Дискретная матем. – 2004. – Т. 16. – Вып. 1. – С. 16–20.
11. Емеличев В.А., Подкопаев Д.П. *Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования* // Дискретный анализ и исследование операций. – Сер. 2. – 2001. – Т. 8. – № 1. – С. 47–69.
12. Емеличев В.А., Кузьмин К.Г., Леонович А.М. *Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации* // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 2. – С. 79–92.
13. Емеличев В.А., Янушкевич О.А. *О регуляризации многокритериальной задачи целочисленного линейного программирования* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С. 38–42.
14. Чирков А.Ю., Шевченко В.Н., Золотых Н.Ю. *О многокритериальной задаче целочисленного линейного программирования* // Дискретный анализ и исследование операций. – Сер. 2. – 2005. – Т. 12. – № 2. – С. 72–85.

Белорусский государственный университет

Поступила 23.02.2006