ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 9 (448)

УДК 514.762

А.К. РЫБНИКОВ

О СПЕЦИАЛЬНЫХ СВЯЗНОСТЯХ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Введение

Понятие связности, определяющей представление нулевой кривизны для заданного уравнения с частными производными, играет исключительную роль в математической теории солитонов. Введение связностей, определяющих представление нулевой кривизны, позволяет дать геометрическую интерпретацию таким понятиям как уравнения обратной задачи, преобразования Бэклунда и псевдопотенциалы Уолквиста и Эстабрука [1], [2]. Первым примером такой связности была связность Р. Германа [3], ассоциированная со структурой продолжения Х. Уолквиста и Ф. Эстабрука [4]. Можно утверждать, что появление статьи [3] явилось началом новой главы в дифференциальной геометрии.

Вопрос о существовании связности, определяющей представление нулевой кривизны для заданного дифференциального уравнения с частными производными, является одной из нерешенных фундаментальных проблем. В данной работе доказано (§ 3; теорема 2), что для произвольного эволюционного уравнения второго порядка (с одной пространственной переменной) эта задача имеет решение (в связи с этим см. также замечание 3).

В работе изучаются связности специального типа (см. § 2). Здесь они названы (ρ,ρ_1)-связностями. Тензор кривизны такой связности содержит подтензор с двумя компонентами ρ и ρ_1, где ρ — относительный инвариант. При этом в случае, когда тензор с компонентами ρ и ρ_1 обращается в нуль на решениях (говоря точнее, на соответствующих поднятиях решений) заданного эволюционного уравнения и только на них, (ρ,ρ_1)-связность является связностью, определяющей представление нулевой кривизны для данного эволюционного уравнения. Доказана теорема о существовании (ρ,ρ_1)-связности с произвольным заранее заданным тензором с компонентами ρ и ρ_1. Отсюда следует (см. § 3), что для любого эволюционного уравнения второго порядка всегда существует связность, определяющая представление нулевой кривизны.

Все рассмотрения в этой статье носят локальный характер.

В работе систематически применяется инвариантный аналитический метод Картана–Лаптева и, в частности, теория структурных форм в расслоениях и форм связности, построенная в [5]–[9]. Подробное изложение метода Картана–Лаптева содержится в монографии [10]. Дальнейшему развитию этого метода и его приложениям посвящена монография [11].

1. Связности, определяющие представление нулевой кривизны, и их общие свойства

1.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка

$$F(t,x^1,\dots,x^n,u,u_{\widehat{j}},u_{\widehat{kl}})=0. \qquad (1)$$

Работа выполнена при частичной поддержке программы “Университеты России — фундаментальные исследования” (проект № 5271).

Здесь $i, j, \ldots = 1, \ldots, n$; $\widehat{i}, \widehat{j}, \ldots = 0, 1, \ldots, n$; $u_0 = \frac{\partial u}{\partial t}$; $u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}$; $u_{00} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$; $u_{0i} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^i}$; $u_{kl} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial x^l}$.

Условимся рассматривать переменные t, $x^1, \ldots, x^n$, u как адаптированные локальные координаты $(n+2)$-мерного расслоения общего типа E с расслоенной $(n+1)$-мерной базой M, локальными координатами которой служат переменные t, $x^1, \ldots, x^n$. Допустимыми преобразованиями локальных координат являются невырожденные преобразования

$$\begin{aligned} \widetilde{t} &= \varphi^0(t), \\ \widetilde{x}^i &= \varphi^i(t, x^1, \ldots, x^n), \\ \widetilde{u} &= \varphi^{n+1}(t, x^1, \ldots, x^n, u). \end{aligned} \tag{2}$$

В дальнейшем (см. замечание 1) увидим, что если уравнение (1) является эволюционным уравнением, то допустимые преобразования (2) не выведут его из класса эволюционных уравнений.

Преобразования (2) можно записать и по-другому, выразив $t, x^1, \ldots, x^n, u$ через $\widetilde{t}, \widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^n, \widetilde{u}$

$$\begin{aligned} t &= \psi^0(\widetilde{t}), \\ x^i &= \psi^i(\widetilde{t}, \widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^n), \\ u &= \psi^{n+1}(\widetilde{t}, \widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^n, u). \end{aligned} \tag{2a}$$

Уравнение (1) можно записать в более общем виде

$$F(t, x^1, \ldots, x^n, u, \lambda_{\widehat{j}}, \lambda_{\widehat{kl}}) = 0, \tag{3}$$

где t, x^i, u, $\lambda_{\widehat{j}}$, $\lambda_{\widehat{k}\,\widehat{l}}$ ($\lambda_{\widehat{k}\,\widehat{l}} = \lambda_{\widehat{l}\,\widehat{k}}$) — адаптированные локальные координаты в многообразии J^2E голономных 2-струй.

Для любого сечения $\sigma \subset E$, заданного уравнением $u = u(t, x^1, \ldots, x^n)$, можно рассматривать поднятые сечения (поднятия) $\sigma^r \subset J^rE$, заданные уравнениями

$$u = u(t, x^1, \ldots, x^n), \quad \lambda_{\widehat{i}_1 \ldots \widehat{i}_\alpha} = u_{\widehat{i}_1 \ldots \widehat{i}_\alpha} \quad (\alpha = 1, \ldots, r).$$

На поднятии $\sigma^2 \subset J^2E$ произвольного сечения $\sigma \subset E$ уравнение (3) принимает вид (1). Сечения $\sigma \subset E$, на поднятиях которых уравнение удовлетворяется тождественно, суть решения.

При допустимых преобразованиях локальных координат t, x^i, u многообразия E переменные $\lambda_{\widehat{i}_1 \ldots \widehat{i}_\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots$) преобразуются по тому же закону, по которому преобразуются соответствующие частные производные $u_{\widehat{i}_1 \ldots \widehat{i}_\alpha}$ функций $u(t, x^1, \ldots, x^n)$. Из рассмотрения допустимых преобразований локальных координат в многообразиях струй видно, что переменные t, x^i, u, λ_j можно одновременно рассматривать и как часть локальных координат многообразия J^1E, и как всю совокупность локальных координат некоторого многообразия $\overset{*}{J}{}^1E$, которое является фактормногообразием многообразия J^1E. Соответственно t, x^i, u, $\lambda_{\widehat{j}}$, $\lambda_{i_1 \ldots i_\alpha}$ ($\alpha = 2, \ldots, r$) можно рассматривать как локальные координаты некоторого многообразия $\overset{*}{J}{}^rE$, которое является фактормногообразием многообразия J^rE голономных r-струй ($r = 2, \ldots$).

Напомним, что уравнение второго порядка (3) принято называть эволюционным, если можно указать систему адаптированных локальных координат в J^2E, относительно которой уравнение можно задать соотношением вида

$$\lambda_0 - f(t, x^i, u, \lambda_j, \lambda_{kl}) = 0. \tag{4}$$

Замечание 1. Эволюционное уравнение сохраняет вид (4) при допустимых преобразованиях (2).

Действительно, в результате допустимого преобразования (2) локальных координат t, x^i, u многообразия E и соответствующего преобразования переменных $\lambda_{\widehat{j}}$ и λ_{kl} аналитическое выражение уравнения (4) принимает следующий вид:

$$\psi^{n+1}_{\widetilde{u}}\varphi^0_t(\psi^0(\widetilde{t}))(\widetilde{\lambda}_0 - \widetilde{f}(\widetilde{t}, \widetilde{x}^i, \widetilde{u}, \widehat{\lambda}_j, \widetilde{\lambda}_{kl})) = 0.$$

При этом $\psi^{n+1}_{\widetilde{u}}\varphi^0_t(\psi^0(\widetilde{t})) \neq 0$ ввиду невырожденности преобразований (2).

1.2. Пусть

$$\omega^{\widehat{i}};\ \omega^{n+1};\ \omega^0_0;\ \omega^i_{\widehat{j}};\ \omega^{n+1}_{n+1};\ \omega^{n+1}_{\widehat{j}};\ \omega^0_{00};\ \omega^i_{\widehat{j}\,\widehat{k}};\ \omega^{n+1}_{n+1,\,n+1};\ \omega^{n+1}_{\widehat{j},\,n+1};\ \omega^{n+1}_{\widehat{j}\,\widehat{k}};\ \ldots \tag{5}$$

— последовательность (симметричных по нижним индексам) структурных форм расслоений реперов (порядков $1, 2, \ldots$) многообразия E. При этом формы $\omega^{\widehat{i}}$, ω^{n+1}, $\omega^{n+1}_{\widehat{i}_1\ldots\widehat{i}_\alpha}$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$ являются главными формами в многообразии J^rE, а формы $\omega^{\widehat{i}}$, ω^{n+1}, $\omega^{n+1}_{\widehat{j}}$, $\omega^{n+1}_{i_1\ldots i_\alpha}$ $(\alpha = 2, \ldots, r)$ — главными формами в многообразии $\overset{*}{J}{}^rE$. Структурные уравнения, которым удовлетворяют формы (5), состоят из уравнений

$$\begin{aligned} d\omega^0 &= \omega^0 \wedge \omega^0_0, \\ d\omega^i &= \omega^0 \wedge \omega^i_0 + \omega^j \wedge \omega^i_j, \\ d\omega^{n+1} &= \omega^0 \wedge \omega^{n+1}_0 + \omega^j \wedge \omega^{n+1}_j + \omega^{n+1} \wedge \omega^{n+1}_{n+1} \end{aligned} \tag{6}$$

и уравнений, возникающих в процессе правильного продолжения (см. об этом в [5]) уравнений (6). Среди структурных уравнений содержатся, в частности, уравнения

$$\begin{aligned} d\omega^0_0 &= \omega^0 \wedge \omega^0_{00}, \\ d\omega^i_0 &= \omega^0_0 \wedge \omega^i_0 + \omega^j_0 \wedge \omega^i_j + \omega^0 \wedge \omega^i_{00} + \omega^j \wedge \omega^i_{0j}, \\ d\omega^i_j &= \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^0 \wedge \omega^i_{0j} + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}. \end{aligned}$$

Заметим, что при фиксации точки базы M формы ω^0, ω^i обращаются в нуль, а формы ω^0_0, ω^i_0, ω^i_j превращаются в инвариантные структурные формы $\overline{\omega}^0_0$, $\overline{\omega}^i_0$, $\overline{\omega}^i_j$ группы Ли $\overline{GL}(n+1)$ (она является подгруппой линейной группы $GL(n+1)$), структурные уравнения которой имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} d\overline{\omega}^0_0 &= 0, \\ d\overline{\omega}^i_0 &= \overline{\omega}^0_0 \wedge \overline{\omega}^i_0 + \overline{\omega}^k_0 \wedge \overline{\omega}^i_k, \\ d\overline{\omega}^i_j &= \overline{\omega}^k_j \wedge \overline{\omega}^i_k. \end{aligned}$$

Замечание 2. На многообразии $\overset{*}{J}{}^2E$ можно задать поле относительного инварианта R, удовлетворяющего дифференциальному уравнению

$$dR - R(\omega^0_0 + \omega^1_1) = 0 \ (\mathrm{mod}\, \omega^{\widehat{i}}, \omega^{n+1}, \omega^{n+1}_{\widehat{j}}, \omega^{n+1}_{kl}),$$

который обращается в нуль на поднятиях сечений $\sigma \subset E$ в том и только том случае, когда сечения $\sigma \subset E$ являются решениями заданного эволюционного уравнения.

В справедливости этого утверждения можно убедиться следующим образом. Заметим сначала, что для того чтобы задать поле относительного инварианта на $\overset{*}{J}{}^2E$, достаточно задать значение его компоненты относительно какой-либо исходной системы координат t, x^i, u, $\lambda_{\widehat{j}}$, λ_{kl}. Если относительно этой системы координат заданное эволюционное уравнение выражается в виде соотношения (4), то можно, например, положить

$$R = \lambda_0 - f(t, x^i, u, \lambda_j, \lambda_{kl}).$$

В результате получим искомый относительный инвариант, т. к. после допустимого преобразования (2) компонента относительного инварианта и левая часть уравнения будут отличаться друг от друга лишь отличным от нуля множителем.

Возможностью построения относительного инварианта R воспользуемся в § 3.

1.3. Над многообразием $\overset{*}{J}{}^r E$ как над базой можно построить главное расслоение $P(\overset{*}{J}{}^r E, G)$ с r-параметрической структурной группой Ли G. Структурные формы расслоения ω^A $(A, B, \ldots = 1, \ldots, r)$ удовлетворяют структурным уравнениям (см. [8] и [10])

$$d\omega^A = \frac{1}{2} C^A_{BC} \omega^B \wedge \omega^C + \omega^\delta \wedge \omega^A_\delta,$$

где ω^δ — главные формы многообразия $\overset{*}{J}{}^r E$. Здесь C^A_{BC} — структурные константы группы G; они антисимметричны по нижним индексам и удовлетворяют тождествам Якоби

$$C^A_{BK} C^B_{LM} + C^A_{BL} C^B_{MK} + C^A_{BM} C^B_{KL} = 0.$$

Связность в главном расслоении $P(\overset{*}{J}{}^r E, G)$ определяется заданием на $\overset{*}{J}{}^r E$ поля объекта связности с компонентами Γ^A_ε, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям

$$d\Gamma^A_\varepsilon + C^A_{BC} \Gamma^B_\varepsilon \omega^C - \Gamma^A_\delta \omega^\delta_\varepsilon - \omega^A_\varepsilon = \Gamma^A_{\varepsilon\delta} \omega^\delta,$$

где формы $\omega^\delta_\varepsilon$ определяются из уравнений $d\omega^\delta = \omega^\varepsilon \wedge \omega^\delta_\varepsilon$. Формы связности $\widetilde{\omega}^A = \omega^A + \Gamma^A_\varepsilon \omega^\varepsilon$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\widetilde{\omega}^A = \frac{1}{2} C^A_{BC} \widetilde{\omega}^B \wedge \widetilde{\omega}^C + \Omega^A,$$

где $\Omega^A = R^A_{\varepsilon\delta} \omega^\varepsilon \wedge \omega^\delta$ — формы кривизны. Компоненты тензора кривизны имеют следующий вид:

$$R^A_{\varepsilon\delta} = -\frac{1}{2} (\Gamma^A_{[\varepsilon\delta]} + C^A_{BC} \Gamma^B_\varepsilon \Gamma^C_\delta).$$

Поле тензора кривизны задано на многообразии $J^{r+1} E$.

Лемма 1 ([12]). *Тензор кривизны содержит подтензор с компонентами $R^A_{\widehat{kl}}$. Следовательно, обращение $R^A_{\widehat{kl}}$ в нуль на многообразии $J^{r+1} E$ либо на каком-либо его подмногообразии (или фактормногообразии) носит инвариантный характер.*

Будем говорить, что связность в главном расслоении $P(\overset{*}{J}{}^1 E, G)$ определяет представление нулевой кривизны для эволюционного уравнения (4), если тензор кривизны обращается в нуль на поднятиях сечений $\sigma \subset E$ в том и только том случае, когда сечения $\sigma \subset E$ являются решениями уравнения (4).

Лемма 2 ([12]). *Для того чтобы связность, заданная в расслоении $P(\overset{*}{J}{}^1 E, G)$, определяла представление нулевой кривизны для уравнения (4), необходимо и достаточно, чтобы компоненты $R^A_{\widehat{kl}}$ обращались в нуль на поднятиях сечений $\sigma \subset E$ тогда и только тогда, когда сечения $\sigma \subset E$ являются решениями.*

1.4. Пусть $F(P(\overset{*}{J}{}^r E, G))$ — расслоение с типовым слоем F, ассоциированное с главным расслоением $P(\overset{*}{J}{}^r E, G)$ (F — N-мерное пространство представления группы G). Структурные формы ассоциированного расслоения $F(P(\overset{*}{J}{}^r E, G))$ имеют вид [9], [10]

$$\omega^I = dX^I - \xi^I_A(X) \omega^A,$$

где ω^A — структурные формы главного расслоения $P(\overset{*}{J}{}^r E, G)$ $(I, J, \ldots = 1, \ldots, N)$. Функции $\xi^I_A(X)$ удовлетворяют тождествам Ли

$$\frac{\partial \xi^I_B}{\partial X^K}\xi^K_C - \frac{\partial \xi^I_C}{\partial X^K}\xi^K_B = \xi^I_A C^A_{BC}.$$

Задавая в главном расслоении $P(\overset{*}{J}{}^r E, G)$ связность с формами связности $\widetilde{\omega}^A = \omega^A + \Gamma^A_\varepsilon \omega^\varepsilon$, одновременно задаем связность в ассоциированном расслоении $F(P(\overset{*}{J}{}^r E, G))$ с формами связности $\widetilde{\omega}^I = dX^I - \xi^I_A(X)\widetilde{\omega}^A$, удовлетворяющими структурным уравнениям

$$d\widetilde{\omega}^I = \widetilde{\omega}^K \wedge \widetilde{\omega}^I_K - \xi^I_A R^A_{\varepsilon\delta}\omega^\varepsilon \wedge \omega^\delta,$$

где $\widetilde{\omega}^I_K = -\frac{\partial \xi^I_A}{\partial X^K}\widetilde{\omega}^A$.

Если связность в главном расслоении $P(\overset{*}{J}{}^r E, G)$ с формами связности $\widetilde{\omega}^A$ определяет представление нулевой кривизны для заданного эволюционного уравнения (4), то система форм $\widetilde{\omega}^I$ будет вполне интегрируемой на поднятиях сечений $\sigma \subset E$ в том и только том случае, когда сечения $\sigma \subset E$ являются решениями. Системы форм, обладающие подобным свойством, строили Х. Уолквист и Ф. Эстабрук в [4]. Дифференциально-геометрические структуры, определенные заданием таких систем, они называли структурами продолжения (см. также замечание 3 из § 2).

2. Специальные связности в главном расслоении $P(\overset{*}{J}{}^1 E, \overline{GL}(n+1))$. Понятие (ρ, ρ_1)-связности

2.1. Рассмотрим главное расслоение $P(\overset{*}{J}{}^1 E, \overline{GL}(n+1))$. В качестве слоевых форм могут быть выбраны формы ω^0_0, ω^i_0, ω^i_j. Будем предполагать, что в $P(\overset{*}{J}{}^1 E, \overline{GL}(n+1))$ задана связность. Формы связности имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}^0_0 &= \omega^0_0 + \Gamma^0_{00}\omega^0 + \Gamma^0_{0k}\omega^k + \Gamma^0_{0,n+1}\omega^{n+1} + \Gamma^{0k}_0\omega^{n+1}_k,\\
\widetilde{\omega}^i_0 &= \omega^i_0 + \Gamma^i_{00}\omega^0 + \Gamma^i_{0k}\omega^k + \Gamma^i_{0,n+1}\omega^{n+1} + \Gamma^{ik}_0\omega^{n+1}_k,\\
\widetilde{\omega}^i_j &= \omega^i_j + \Gamma^i_{0j}\omega^0 + \Gamma^i_{jk}\omega^k + \Gamma^i_{j,n+1}\omega^{n+1} + \Gamma^{ik}_j\omega^{n+1}_k.
\end{aligned}$$

При этом предполагается, что $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$.

Из рассмотрения дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют компоненты объекта связности, можно заключить, что подмножество компонент объекта связности, содержащее все компоненты, за исключением Γ^0_{00}, Γ^i_{00}, Γ^i_{0j}, Γ^i_{jk}, есть не что иное, как совокупность компонент некоторого тензора. Следовательно, инвариантным образом выделяется класс специальных связностей, для которых этот тензор обращается в нуль.

Замечание 3. В случае, когда в качестве главных форм выбираются контактные формы, формы ω^0_0, ω^i_0, ω^i_j обращаются в нуль, и формы специальной связности принимают вид

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}^0_0 &= \Gamma^0_{00}dt,\\
\widetilde{\omega}^i_0 &= \Gamma^i_{00}dt + \Gamma^i_{0j}dx^j,\\
\widetilde{\omega}^i_j &= \Gamma^i_{0j}dt + \Gamma^i_{jk}dx^k.
\end{aligned}$$

Формы связности в ассоциированном расслоении $F(P(\overset{*}{J}{}^1 E, \overline{GL}(n+1)))$, порожденной специальной связностью в $P(\overset{*}{J}{}^1 E, \overline{GL}(n+1))$, имеют в этом случае следующий вид:

$$\widetilde{\omega}^I = dX^I - (\xi^{I0}_0(X)\Gamma^0_{00} + \xi^{I0}_i(X)\Gamma^i_{00} + \xi^{Ij}_i(X)\Gamma^i_{0j})dt - (\xi^{I0}_i(X)\Gamma^i_{0k} + \xi^{Ij}_i(X)\Gamma^i_{jk})dx^k.$$

Подобное строение имеют построенные в [4] формы, определяющие структуру продолжения для уравнения Кортевега–де Фриза. Переменные X^I Уолквист и Эстабрук назвали псевдопотенциалами.

Несколько по-другому вводят понятие псевдопотенциала М. Абловиц и Х. Сигур [13]. Они не используют внешних форм, и в их книге нет упоминания о связностях. Однако нетрудно заметить, что псевдопотенциалы в их трактовке — это, по существу, решения системы $\widetilde{\omega}^I = 0$ на поднятиях сечений $\sigma \subset E$, которые являются решениями заданного дифференциального уравнения.

В [13] поставлен вопрос (который авторы рассматривают как "одну из нерешенных фундаментальных проблем"): "Имеется ли систематический метод, позволяющий для заданного дифференциального уравнения в частных производных найти псевдопотенциал, если он существует, либо сделать заключение о его несуществовании?"

Следует заметить, что существование псевдопотенциала в трактовке Абловица и Сигура является очевидным, если связность определяет представление нулевой кривизны (т. к. система в этом случае вполне интегрируемая). Проблема, таким образом, сводится к вопросу о существовании специальной связности, определяющей представление нулевой кривизны для заданного дифференциального уравнения. Для произвольного эволюционного уравнения второго порядка (с одной пространственной переменной) эта задача имеет решение (§ 3, теорема 2). При исследовании на совместность дифференциальных уравнений задачи применяется теория систем уравнений Пфаффа в инволюции ([14], гл. VI, с. 174–206, гл. VIII, с. 227–262).

2.2. В дальнейшем будем рассматривать специальные связности в главном расслоении $P(\overset{*}{J}{}^1E, \overline{GL}(1+1))$ (т. е. в главном расслоении $P(\overset{*}{J}{}^1E, \overline{GL}(n+1))$ при $n = 1$). В этом случае объект связности имеет компоненты Γ^0_{00}, Γ^1_{00}, Γ^1_{01}, Γ^1_{11}, которые удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{gathered}
d\Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{00}\omega^0_0 - \omega^0_{00} = \Gamma^0_{00,0}\omega^0 + \Gamma^0_{00,1}\omega^1 + \Gamma^0_{00,1+1}\omega^{1+1} + \Gamma^{0,1}_{00}\omega^{1+1}_1,\\
d\Gamma^1_{01} - \Gamma^1_{01}\omega^0_0 - \Gamma^1_{11}\omega^1_0 - \omega^1_{01} = \Gamma^1_{01,0}\omega^0 + \Gamma^1_{01,1}\omega^1 + \Gamma^1_{01,1+1}\omega^{1+1} + \Gamma^{1,1}_{01}\omega^{1+1}_1,\\
d\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{11}\omega^1_1 - \omega^1_{11} = \Gamma^1_{11,0}\omega^0 + \Gamma^1_{11,1}\omega^1 + \Gamma^1_{11,1+1}\omega^{1+1} + \Gamma^{1,1}_{11}\omega^{1+1}_1,\\
d\Gamma^1_{00} + (\Gamma^0_{00} - 2\Gamma^1_{01})\omega^1_0 + \Gamma^1_{00}(\omega^1_1 - 2\omega^0_0) - \omega^1_{00} = \Gamma^1_{00,0}\omega^0 + \Gamma^1_{00,1}\omega^1 + \Gamma^1_{00,1+1}\omega^{1+1} + \Gamma^{1,1}_{00}\omega^{1+1}_1.
\end{gathered}$$

Формы связности

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}^0_0 &= \omega^0_0 + \Gamma^0_{00}\omega^0,\\
\widetilde{\omega}^1_0 &= \omega^1_0 + \Gamma^1_{00}\omega^0 + \Gamma^1_{01}\omega^1,\\
\widetilde{\omega}^1_1 &= \omega^1_1 + \Gamma^1_{01}\omega^0 + \Gamma^1_{11}\omega^1
\end{aligned}$$

удовлетворяют структурным уравнениям

$$\begin{aligned}
d\widetilde{\omega}^0_0 &= \Omega^0_0,\\
d\widetilde{\omega}^1_1 &= \Omega^1_1,\\
d\widetilde{\omega}^1_0 &= \widetilde{\omega}^0_0 \wedge \widetilde{\omega}^1_0 + \widetilde{\omega}^1_0 \wedge \widetilde{\omega}^1_1 + \Omega^1_0,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Omega^0_0 &= 2R^0_{001}\omega^0 \wedge \omega^1 + 2R^0_{00,1+1}\omega^0 \wedge \omega^{1+1} + 2R^{01}_{00}\omega^0 \wedge \omega^{1+1}_1,\\
\Omega^1_1 &= 2R^1_{101}\omega^0 \wedge \omega^1 + 2R^1_{10,1+1}\omega^0 \wedge \omega^{1+1} + 2R^{11}_{10}\omega^0 \wedge \omega^{1+1}_1 + 2R^1_{11,1+1}\omega^1 \wedge \omega^{1+1} + 2R^{11}_{11}\omega^1 \wedge \omega^{1+1}_1,\\
\Omega^1_0 &= 2R^1_{001}\omega^0 \wedge \omega^1 + 2R^1_{00,1+1}\omega^0 \wedge \omega^{1+1} + 2R^{11}_{00}\omega^0 \wedge \omega^{1+1}_1 + 2R^1_{01,1+1}\omega^1 \wedge \omega^{1+1} + 2R^{11}_{01}\omega^1 \wedge \omega^{1+1}_1
\end{aligned}$$

— формы кривизны.

Компоненты тензора кривизны выражаются через компоненты продолженного объекта связности. Для компонент R^0_{001}; R^1_{101} и R^1_{001} (которые согласно лемме 1 являются компонентами самостоятельного тензора) эти выражения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
2R^0_{001} &= -\Gamma^0_{00,1},\\
2R^1_{101} &= \Gamma^1_{11,0} - \Gamma^1_{01,1},\\
2R^1_{001} &= \Gamma^1_{01,0} - \Gamma^1_{00,1} + (\Gamma^1_{01})^2 - \Gamma^0_{00}\Gamma^1_{01} - \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{00}.
\end{aligned}$$

Рассматривая дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют R^0_{001}, R^1_{101}, R^1_{001}, видим, что R^0_{001} и R^1_{101} суть относительные инварианты. Кроме того, из рассмотрения дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют компоненты продолженного объекта связности, можно заключить, что $\Gamma^{1,1}_{11}$ также является относительным инвариантом.

Рассмотрим частный случай специальной связности, для которого $R^0_{001} = 0$; $\Gamma^{1,1}_{11} = 0$. Заметим, что из условия $R^0_{001} = 0$ (т. е. $\Gamma^0_{00,1} = 0$) следует $\Gamma^{0,1}_{00} = \Gamma^0_{00,1+1} = 0$. Следовательно, в этом случае система дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют компоненты объекта связности, имеет вид

$$\begin{gathered}
d\Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{00}\omega^0_0 - \omega^0_{00} = \Gamma^0_{00,0}\omega^0,\\
d\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{11}\omega^1_1 - \omega^1_{11} = \Gamma^1_{11,0}\omega^0 + \Gamma^1_{11,1}\omega^1 + \Gamma^1_{11,1+1}\omega^{1+1},\\
d\Gamma^1_{01} - \Gamma^1_{01}\omega^0_0 - \Gamma^1_{11}\omega^1_0 - \omega^1_{01} = \Gamma^1_{01,0}\omega^0 + \Gamma^1_{01,1}\omega^1 + \Gamma^1_{01,1+1}\omega^{1+1} + \Gamma^{1,1}_{01}\omega^{1+1}_1,\\
d\Gamma^1_{00} + (\Gamma^0_{00} - 2\Gamma^1_{01})\omega^1_0 + \Gamma^1_{00}(\omega^1_1 - 2\omega^0_0) - \omega^1_{00} = \Gamma^1_{00,0}\omega^0 + \Gamma^1_{00,1}\omega^1 + \Gamma^1_{00,1+1}\omega^{1+1} + \Gamma^{1,1}_{00}\omega^{1+1}_1.
\end{gathered}$$

Введем обозначения $R^1_{101} = \rho$; $R^1_{001} = \rho_1$. Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют ρ и ρ_1, имеют следующий вид :

$$\begin{aligned}
d\rho - \rho(\omega^0_0 + \omega^1_1) &= \rho_{,0}\omega^0 + \rho_{,1}\omega^1 + \rho_{,1+1}\omega^{1+1} + \rho^{,1}\omega^{1+1}_1 + \rho^{,0}\omega^{1+1}_0 + \rho^{,11}\omega^{1+1}_{11},\\
d\rho_1 - 2\rho_1\omega^0_0 - \rho\omega^1_0 &= \rho_{1,0}\omega^0 + \rho_{1,1}\omega^1 + \rho_{1,1+1}\omega^{1+1} + \rho^{,1}_1\omega^{1+1}_1 + \rho^{,0}_1\omega^{1+1}_0 + \rho^{,11}_1\omega^{1+1}_{11} + \rho^{,01}_1\omega^{1+1}_{01}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Видим, что ρ и ρ_1 суть компоненты тензора, поле которого задано на J^2E. Подтензором этого тензора является относительный инвариант ρ, поле которого задано на $\overset{*}{J}{}^2E$.

Специальные связности в $P(\overset{*}{J}{}^1E, \overline{GL}(1+1))$ указанного типа условимся называть (ρ, ρ_1)-связностями. Структурные уравнения (ρ, ρ_1)-связности имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
d\widetilde{\omega}^0_0 &= 0,\\
d\widetilde{\omega}^1_1 &= 2\rho\omega^0 \wedge \omega^1 + 2R^1_{10,1+1}\omega^0 \wedge \omega^{1+1} + 2R^{11}_{10}\omega^0 \wedge \omega^{1+1}_1 + 2R^1_{11,1+1}\omega^1 \wedge \omega^{1+1},\\
d\widetilde{\omega}^1_0 - (\widetilde{\omega}^0_0 - \widetilde{\omega}^1_1) \wedge \widetilde{\omega}^1_0 &= 2\rho_1\omega^0 \wedge \omega^1 + 2R^1_{00,1+1}\omega^0 \wedge \omega^{1+1} + 2R^{11}_{00}\omega^0 \wedge \omega^{1+1}_1 +\\
&\quad + 2R^1_{01,1+1}\omega^1 \wedge \omega^{1+1} + 2R^{11}_{01}\omega^1 \wedge \omega^{1+1}_1.
\end{aligned}$$

Замечание 4. Можно изучать связности, аналогичные (ρ, ρ_1)-связностям, и в расслоениях с базой, отличной от $\overset{*}{J}{}^1E$. Например, можно рассматривать (ρ, ρ_1)-связность в главном расслоении $P(J^2E, \overline{GL}(1+1))$.

3. Основная теорема. Существование связности, определяющей представление нулевой кривизны для произвольного эволюционного уравнения второго порядка

Рассмотрим главное расслоение $P(\overset{*}{J}{}^1E, \overline{GL}(1+1))$, снабженное некоторой произвольной (ρ, ρ_1)-связностью. Заметим, что для того чтобы задать произвольную (ρ, ρ_1)-связность, достаточно задать произвольным образом значения компонент продолженного объекта специальной связности (при условии $\Gamma^0_{00,1} = 0$; $\Gamma^{1,1}_{11} = 0$) относительно некоторой исходной системы координат.

В дальнейшем при доказательстве основной теоремы 1 понадобится оперировать замкнутой системой форм, содержащей формы (ρ, ρ_1)-связности. Будем предполагать, что такое замыкание системы структурных форм осуществлено посредством замены форм ω_0^{1+1}, ω_1^{1+1}, ω_{1+1}^{1+1}, ω_{11}^{1+1}, ω_{01}^{1+1}, ω_{00}^{1+1} формами $\widetilde{\omega}_0^{1+1}$, $\widetilde{\omega}_1^{1+1}$, $\widetilde{\omega}_{1+1}^{1+1}$, $\widetilde{\omega}_{11}^{1+1}$, $\widetilde{\omega}_{01}^{1+1}$, $\widetilde{\omega}_{00}^{1+1}$, дифференциалы которых являются суммами внешних произведений форм

$$\omega^0,\ \omega^1,\ \omega^{1+1},\ \widetilde{\omega}_0^{1+1},\ \widetilde{\omega}_1^{1+1},\ \widetilde{\omega}_{1+1}^{1+1},\ \widetilde{\omega}_{00}^{1+1},\ \widetilde{\omega}_{01}^{1+1},\ \widetilde{\omega}_{11}^{1+1},\ \widetilde{\omega}_0^0,\ \widetilde{\omega}_1^1,\ \widetilde{\omega}_0^1.$$

Эта процедура равносильна добавлению к компонентам объекта связности дополнительных компонент, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям некоторого специального вида. Можно показать, что такое расширение объекта связности осуществимо.

Заменим исходную (ρ, ρ_1)-связность в $P(\overset{*}{J}{}^1E, \overline{GL}(1+1))$ другой специальной связностью. При этом будем предполагать, что компоненты новой связности $\overset{*}{\Gamma}{}_{00}^0$, $\overset{*}{\Gamma}{}_{11}^1$, $\overset{*}{\Gamma}{}_{01}^1$, $\overset{*}{\Gamma}{}_{00}^1$ имеют вид

$$\overset{*}{\Gamma}{}_{00}^0 = \Gamma_{00}^0; \quad \overset{*}{\Gamma}{}_{11}^1 = \Gamma_{11}^1 + \varkappa; \quad \overset{*}{\Gamma}{}_{01}^1 = \Gamma_{01}^1 + \lambda; \quad \overset{*}{\Gamma}{}_{00}^1 = \Gamma_{00}^1 + \mu,$$

и что компоненты тензора деформации $\varkappa$, λ, μ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} d\varkappa - \varkappa\widetilde{\omega}_1^1 &= \varkappa_{|0}\omega^0 + \varkappa_{|1}\omega^1 + \varkappa_{|1+1}\omega^{1+1}, \\ d\lambda - \lambda\widetilde{\omega}_0^0 - \varkappa\widetilde{\omega}_0^1 &= \lambda_{|0}\omega^0 + \lambda_{|1}\omega^1 + \lambda_{|1+1}\omega^{1+1} + \lambda^{|1}\widetilde{\omega}_1^{1+1} + \lambda^{|0}\widetilde{\omega}_0^{1+1} + \lambda^{|11}\widetilde{\omega}_{11}^{1+1}, \\ d\mu + \mu(\widetilde{\omega}_1^1 - 2\widetilde{\omega}_0^0) - 2\lambda\widetilde{\omega}_0^1 &= \mu_{|0}\omega^0 + \mu_{|1}\omega^1 + \mu_{|1+1}\omega^{1+1} + \mu^{|1}\widetilde{\omega}_1^{1+1} + \mu^{|0}\widetilde{\omega}_0^{1+1} + \mu^{|11}\widetilde{\omega}_{11}^{1+1} + \mu^{|01}\widetilde{\omega}_{01}^{1+1}. \end{aligned} \tag{8}$$

Формы связности $\overset{*}{\widetilde{\omega}}{}_0^0$, $\overset{*}{\widetilde{\omega}}{}_1^1$, $\overset{*}{\widetilde{\omega}}{}_0^1$, соответствующие новой связности, связаны с формами исходной связности $\widetilde{\omega}_0^0$, $\widetilde{\omega}_1^1$, $\widetilde{\omega}_0^1$ соотношениями

$$\begin{aligned} \overset{*}{\widetilde{\omega}}{}_0^0 &= \widetilde{\omega}_0^0, \\ \overset{*}{\widetilde{\omega}}{}_1^1 &= \widetilde{\omega}_1^1 + \lambda\omega^0 + \varkappa\omega^1, \\ \overset{*}{\widetilde{\omega}}{}_0^1 &= \widetilde{\omega}_0^1 + \mu\omega^0 + \lambda\omega^1. \end{aligned}$$

Нетрудно вывести соотношения, связывающие компоненты тензора кривизны исходной связности и компоненты тензора кривизны новой связности. Среди них содержатся равенства

$$\begin{aligned} \overset{*}{R}{}_{001}^0 &= 0, \\ 2\overset{*}{R}{}_{101}^1 &= 2\rho + \varkappa_{|0} - \lambda_{|1}, \\ 2\overset{*}{R}{}_{001}^1 &= 2\rho_1 + (\lambda)^2 - \mu\varkappa + \lambda_{|0} - \mu_{|1}. \end{aligned}$$

Пусть задано поле двухкомпонентного тензора с компонентами $\overset{*}{\rho}$ и $\overset{*}{\rho}_1$, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям того же вида, что и уравнения (7)

$$\begin{aligned} d\overset{*}{\rho} - \overset{*}{\rho}(\widetilde{\omega}_0^0 + \widetilde{\omega}_1^1) &= 0 \ (\operatorname{mod} \omega^0, \omega^1, \omega^{1+1}, \widetilde{\omega}_1^{1+1}, \widetilde{\omega}_0^{1+1}, \widetilde{\omega}_{11}^{1+1}), \\ d\overset{*}{\rho}_1 - 2\overset{*}{\rho}_1\widetilde{\omega}_0^0 - \overset{*}{\rho}\widetilde{\omega}_0^1 &= 0 \ (\operatorname{mod} \omega^0, \omega^1, \omega^{1+1}, \widetilde{\omega}_1^{1+1}, \widetilde{\omega}_0^{1+1}, \widetilde{\omega}_{11}^{1+1}, \widetilde{\omega}_{01}^{1+1}). \end{aligned} \tag{9}$$

Новая связность будет $(\overset{*}{\rho}, \overset{*}{\rho}_1)$-связностью в $P(J^2E, \overline{GL}(1+1))$, если тензор деформации будет удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} 2\overset{*}{\rho} &= 2\rho + \varkappa_{|0} - \lambda_{|1}, \\ 2\overset{*}{\rho}_1 &= 2\rho_1 + (\lambda)^2 - \mu\varkappa + \lambda_{|0} - \mu_{|1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Справедлива

Теорема 1 (основная). *В главном расслоении $P(J^2E, \overline{GL}(1+1))$ всегда можно задать $(\overset{*}{\rho}, \overset{*}{\rho}_1)$-связность с произвольным заранее заданным тензором с компонентами $\overset{*}{\rho}$ и $\overset{*}{\rho}_1$, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям* (9).

Эту теорему можно доказать следующим образом. Рассмотрим сначала главное расслоение $P(\overset{*}{J}{}^1E, \overline{GL}(1+1))$, снабженное произвольной (ρ, ρ_1)-связностью. Затем докажем возможность задания тензора с компонентами $\varkappa$, λ, μ, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям (8) при условии, что

$$\lambda_{|1} = \varkappa_{|0} + 2r,$$
$$\mu_{|1} = \lambda_{|0} + (\lambda)^2 - \mu\varkappa + 2r_1,$$

где $r = \rho - \overset{*}{\rho}$, $r_1 = \rho_1 - \overset{*}{\rho}_1$. Выбрав этот тензор в качестве тензора деформации (условия (10) будут при этом выполнены), осуществим переход от исходной (ρ, ρ_1)-связности к искомой $(\overset{*}{\rho}, \overset{*}{\rho}_1)$-связности.

Доказательство существования искомого тензора с компонентами $\varkappa$, λ, μ можно провести в три этапа.

1) Сначала зададим произвольно поле относительного инварианта $\varkappa$, удовлетворяющего дифференциальному уравнению

$$d\varkappa - \varkappa\widetilde{\omega}_1^1 = \varkappa_{|0}\omega^0 + \varkappa_{|1}\omega^1 + \varkappa_{|1+1}\omega^{1+1}.$$

Задав $\varkappa$, зададим тем самым и его ковариантные производные $\varkappa_{|0}$, $\varkappa_{|1}$ и $\varkappa_{|1+1}$.

2) Затем докажем существование тензора с двумя компонентами $\varkappa$ и λ, у которого компонентой $\varkappa$ является относительный инвариант, выбранный нами на предыдущем этапе, а компонента λ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$d\lambda - \lambda\widetilde{\omega}_0^0 + \varkappa\widetilde{\omega}_0^1 = \lambda_{|0}\omega^0 + (\varkappa_{|0} + 2r)\omega^1 + \lambda_{|1+1}\omega^{1+1} + \lambda^{|1}\widetilde{\omega}_1^{1+1} + \lambda^{|0}\widetilde{\omega}_0^{1+1} + \lambda^{|11}\widetilde{\omega}_{11}^{1+1}. \qquad (11)$$

При доказательстве совместности системы Пфаффа, состоящей из одного уравнения (11), применим метод Кэлера [14].

3) В заключение, снова применив метод Кэлера, докажем совместность системы Пфаффа, состоящей из одного уравнения

$$d\mu + \mu(\widetilde{\omega}_1^1 - 2\omega_0^0) - 2\lambda\widetilde{\omega}_0^1 = \mu_{|0}\omega^0 + (\lambda_{|0} + (\lambda)^2 - \varkappa\mu + 2r_1)\omega^1 + \mu_{|1+1}\omega^{1+1} +$$
$$+\mu^{|1}\widetilde{\omega}_1^{1+1} + \mu^{|0}\widetilde{\omega}_0^{1+1} + \mu^{|11}\widetilde{\omega}_{11}^{1+1} + \mu^{|01}\widetilde{\omega}_{01}^{1+1}.$$

При этом предполагается, что $\varkappa$, λ (и, следовательно, $\lambda_{|0}$) определены на предыдущих этапах.

Следствием теоремы 1 является

Теорема 2. *Для любого эволюционного уравнения второго порядка существует соответствующая связность в $P(J^2E, \overline{GL}(1+1))$, определяющая представление нулевой кривизны.*

Очевидно, достаточно показать, что для любого эволюционного уравнения второго порядка (4) можно построить двухкомпонентный тензор с компонентами $\overset{*}{\rho}$ и $\overset{*}{\rho}_1$ (удовлетворяющими дифференциальным уравнениям (9)), которые обращаются в нуль на поднятиях решений уравнения (4) и только на них. Тогда $(\overset{*}{\rho}, \overset{*}{\rho}_1)$-связность (существование которой следует из теоремы 1) является связностью, определяющей представление нулевой кривизны для уравнения (4). Чтобы построить искомый тензор, достаточно задать значения его компонент таким образом, чтобы относительно некоторой произвольной исходной системы координат они имели значения

$$\overset{*}{\rho} = R, \quad \overset{*}{\rho}_1 = 0,$$

где R — относительный инвариант, о котором идет речь в замечании 2. Обращение тензора в нуль имеет инвариантный смысл. Таким образом, очевидно, построенный нами тензор обращается в нуль на решениях $\sigma \subset E$ уравнения (4) и только на них.

Литература

1. Рыбников А.К. *Дифференциально-геометрические структуры, ассоциированные с уравнениями обратной задачи и преобразованиями Бэклунда* // Международн. геометрич. школа-семин. памяти Н.В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 1996). Тез. докл. – Ростов-на-Дону, 1996. – С. 24–25.
2. Рыбников А.К. *Уравнения обратной задачи, преобразования Бэклунда и теория связностей* // Международн. геометрич. семин. "Современная геометрия и теория физических полей". Тез. докл. – Казань, 1997. – С. 106.
3. Hermann R. *Pseudopotentials of Estabrook and Wahlquist, the geometry of solitons, and the theory of connections* // Phys. Rev. Lett. – 1976. – V. 36. – № 15. – P. 835–836.
4. Wahlquist H.D., Estabrook F.B. *Prolongation structures of nonlinear evolution equations* // J. Math. Phys. – 1975. – V. 16. – P. 1–7.
5. Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
6. Лаптев Г.Ф. *Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований* // Тр. 3-го Всесоюзн. матем. съезда. 1956. – 1958. – Т. 3. – С. 409–418.
7. Лаптев Г.Ф. *Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии* // Тр. Геометрич. семин. ВИНИТИ. – 1966. – Т. 1. – С. 139–189.
8. Лаптев Г.Ф. *Структурные уравнения главного расслоенного многообразия* // Тр. Геометрич. семин. ВИНИТИ. – 1969. – Т. 2. – С. 161–178.
9. Лаптев Г.Ф. *К инвариантной теории дифференцируемых отображений* // Тр. Геометрич. семин. ВИНИТИ. – 1974. – Т. 6. – С. 37–42.
10. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1979. – Т. 9. – С. 5–246.
11. Васильев А.М. *Теория дифференциально-геометрических структур.* – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 190 с.
12. Рыбников А.К. *О геометрии псевдопотенциалов эволюционных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 5. – С. 55–67.
13. Абловиц М., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи.* – М.: Мир, 1987. – 479 с.
14. Фиников С.П. *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии.* – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.

Московский государственный университет

Поступила 03.03.1999